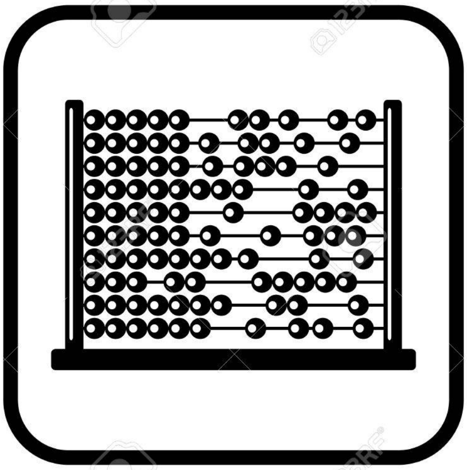
Name Datum

... von der Kunst zu Zählen

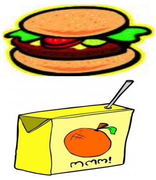
Kombinatorik



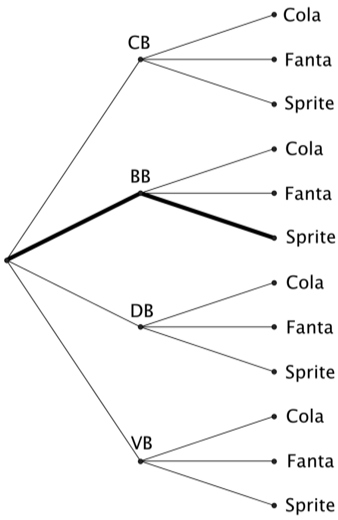
Strategien*: Baumdiagramm, Reduzieren des Problems (kleinere Zahlen wählen!)*

Inhalt

Fundamentales Zählprinzip



<u>Sonderangebot</u>
Ein Hamburger und ein Getränk
nach Wahl: 6.50 Fr.
Burger: Cheese-, Big-, Double-, Vegiburger
Getränk: Cola, Fanta, Sprite



Ein „Menü“ lässt sich auf verschiedene Arten zusammenstellen...

Das Baumdiagramm veranschaulicht das fundamentale Zählprinzip. Es gibt $4 \cdot 3 = 12$ verschiedene Menüs (Möglichkeiten). Der „**dicke**“ Pfad ist die Möglichkeit „Bigburger & Sprite“.

Fundamentales Zählprinzip

Hat ein Zufallsversuch m verschiedene Ergebnisse und ein anderer Zufallsversuch n verschiedene Ergebnisse, so hat die Hintereinanderausführung dieser Versuche $m \cdot n$ verschiedene Ergebnisse.
Das **Baumdiagramm** (wichtiges „Analyse-Werkzeug“) veranschaulicht dies.

Beispiel 1

Es seien A, B, C und D vier Dörfer. Von A nach B führen drei Wege, von B nach C fünf und von C nach D vier Wege.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, von A nach D zu wandern?

b) Wie viele Möglichkeiten existieren, von A nach D und zurück nach A zu wandern?

c) Nach einem Bergsturz gibt es für den Rückweg nur noch insgesamt 20 verschiedene Möglichkeiten. Wo ging der Bergsturz nieder?

Beispiel 2

Sie möchten den Zugang zu Ihrem Computer mit Hilfe eines Pass“wortes“ (5 Zeichen) schützen.

a) Wie viele Möglichkeiten haben Sie für ein Passwort?

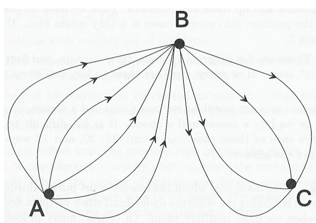
b) Wie viele Möglichkeiten haben Sie, wenn sich die Zeichen nicht wiederholen dürfen?

c) Ihr kleiner Bruder will Ihr Passwort „knacken“. Pro Versuch benötigt er 5 Sekunden. Wie lange hat er?

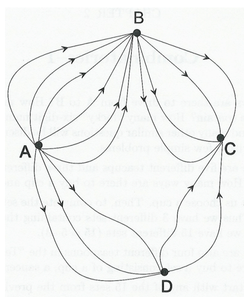
Beispiel 3

Nochmals wandern!
Wie viele Wege gibt es von A nach C?

a)



b)



Beispiel 4

a) Jedes Feld in einem 2×2–Spielfeld kann schwarz oder weiss bemalt werden. Wie viele Färbungen des Spielfeldes sind möglich?

b) *Verallgemeinern* Sie die Aufgabenstellung in a)!

n! (n Fakultät)

Definition

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen bezeichnet man mit n! (lies: **n Fakultät**).

$$\mathbf{n!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

Beispiel: $10! = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 3'628'800$

Formel

Es gibt n! Möglichkeiten, n Objekte in einer Reihe anzuordnen.

Wir sagen auch: die Anzahl **Permutationen** von n Objekten ist n!.

Beispiel: Es gibt $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$ Möglichkeiten, vier Personen in eine Reihe zu stellen.

Überlegung dazu:
Jede der vier Personen kann auf dem „ersten" Platz sein. Für den „zweiten" Platz bleiben dann noch drei Personen zur Verfügung (vier minus die eine, die bereits auf dem „ersten" Platz sitzt).
Für den „dritten" Platz bleiben dann entsprechend noch zwei Personen zur Verfügung und für den „letzten" Platz noch eine.
Nach dem *fundamentalen Zählprinzip* gibt es also insgesamt $4\cdot3\cdot2\cdot1 = 4!$ solche Möglichkeiten.

Beispiel 5

Wie viele Möglichkeiten gibt es, fünf Bälle (in den Farben schwarz, weiss, rot, blau und grün) in eine Reihe zu legen?

Beispiel 6

Berechnen Sie *ohne Taschenrechner*.

a) $\frac{11!}{9!}$ **b)** $\frac{75!}{74!}$ **c)** $8! - 7\cdot7!$ **d)** $\frac{2^{5!}}{2^{115}}$

e) $\frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}$ **f)** $\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$ **g)** $\frac{10!-10}{9!-1}$ **h)** $\frac{4!\cdot5!}{6!}$

Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

i) $n!\cdot(n+1)$ **j)** $\frac{n!}{n(n-1)}$ **k)** $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ **l)** $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

Beispiel 7

a) Wie viele siebenstellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 2, ... , 7 bilden, wenn in jeder Zahl jede Ziffer nur einmal auftreten darf (also *ohne Wiederholung* einer Ziffer)?

b) Wie viele dieser Zahlen beginnen mit 7?

c) Wie viele dieser Zahlen enden mit 3?

d) Wie viele dieser Zahlen beginnen mit 7 und enden mit 3?

e) Wie viele dieser Zahlen sind grösser als 4'000'000?

f) Wie viele dieser Zahlen sind kleiner als 5'300'000?

Beispiel 8

a) Ordnen Sie die Terme nach ihrer Grösse: $a = 70!\cdot70!$, $b = 69!\cdot71!$, $c = 60!\cdot80!$

b) Warum ist keine der Zahlen: $100! + 2, 100! + 3, 100! + 4, \ldots, 100! + 100$ eine Primzahl?

c*) Ist p eine Primzahl, dann ist $(p-1)!$ nicht durch p teilbar. Warum?

Reihenfolge *wichtig*

Aufgabe

Aus n Objekten werden k Objekte ausgewählt, wobei die Reihenfolge bei der Auswahl *berücksichtigt* wird („*wichtig*“ ist). Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Überlegung

Für die 1. Stelle gibt es n Möglichkeiten, für die 2.Stelle gibt es noch n – 1, für die 3.Stelle noch n – 2 etc. und schliesslich für die k-te Stelle noch deren n – k + 1. Insgesamt also

Formel

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\ \text{Faktoren}}\ \text{Möglichkeiten.}$$

Beispiel 9

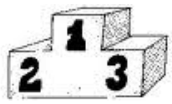
a) In Ihrer Klasse wird gewählt: eine KlassenchefIn, deren StellvertreterIn und eine KlassenkassiererIn und deren StellvertreterIn. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

b) In der vordersten Reihe im Matheunterricht gibt es 6 Plätze. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 6 Plätze zu besetzen?

c) Wie viele Möglichkeiten hat Ihre Klasse, sich in einer Reihe hinzustellen?

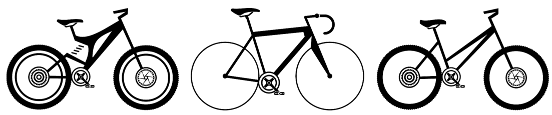
Beispiel 10

An der MisterCH –Wahl nehmen jeweils 16 Kandidaten teil. Aussen schön sind sie (fast) alle, aber nur drei schaffen es „aufs Podest“. Wie viele verschiedene „Podeste“ kann es geben?



Beispiel 11

Es hat fünf freie Veloparkplätze. Nun kommen



a) drei **b)** vier **c)** fünf

SchülerInnen mit dem Velo.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die freien Plätze zu verteilen?

Beispiel 12

Wie viele *drei*stelligen Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 2, ... , 9 bilden, wenn

a) in der Zahl alle Ziffern verschieden sein sollen?

b) in der Zahl die Ziffern mehrmals auftreten dürfen?

Wir *verallgemeinern* nun diese beiden Aufgaben:

Wie viele k-stelligen Zahlen lassen sich mit n Ziffern bilden, wenn

c) in der Zahl alle Ziffern verschieden sein sollen?

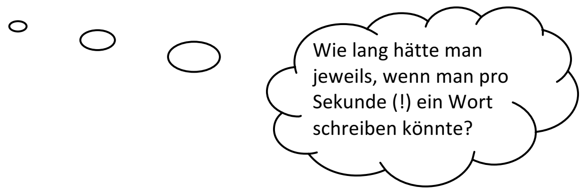
d) in der Zahl die Ziffern mehrmals auftreten dürfen?

Beispiel 13

Wie viele „Wörter“ bestehend aus sieben Buchstaben kann man schreiben, wenn sich

a) die Buchstaben im Wort *nicht* wiederholen dürfen?

b) die Buchstaben im Wort wiederholen dürfen?



Reihenfolge *unwichtig*

Aufgabe

Aus n Objekten werden k Objekte ausgewählt, wobei die Reihenfolge bei der Auswahl *nicht berücksichtigt* wird („*unwichtig*" ist). Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Überlegung

Wenn wir die Reihenfolge berücksichtigen würden, dann gäbe es zuerst einmal

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{\text{k Faktoren}} \text{ Möglichkeiten.}$$

Die k Objekte lassen sich ihrerseits auf k! untereinander vertauschen (permutieren).
Also gibt es insgesamt:

Formel

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \text{ Möglichkeiten.}$$

Für diesen häufig auftretenden und wichtigen Term schreiben wir kurz $\binom{n}{k}$ (gelesen: „n tief k"). Also:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Beachte: Im Zähler und im Nenner je k Faktoren!

Beispiel 14

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus sieben Personen vier auszuwählen?

b) Bei einer Prüfung müssen von zehn Fragen deren sieben beantwortet werden. Auf wie viele Arten lassen sich die Fragen auswählen?

Beispiel 15

a) Auf wie viele Arten kann man zwei aus den acht Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H auswählen?

b) An einem Fussballturnier nehmen acht Mannschaften teil, wobei jede gegen jede einmal spielen muss. Anzahl der Spiele? (Tipp: a))

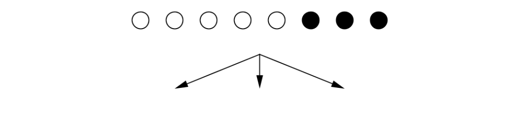
c) Auf einem Papier sind 20 Geraden gezeichnet. Wie viele Schnittpunkte kann es geben? (Tipp: b))

Beispiel 16

a) Mit dem in den Sommerferien verdienten Geld möchten Sie drei von Ihren sechs LieblingsCDs und zwei von Ihren acht LieblingsDVDs kaufen. Auf wie viele Arten geht das?
Tipp: Betrachten Sie die CDs und DVDs zuerst getrennt und wenden Sie dann das Zählprinzip an.

b) Sie wollen mit Ihrem iPhone Bilder von Ihren vier KollegInnen machen und zwar zuerst einzeln, dann je zwei, je drei und alle vier zusammen.
Wie viele Bilder gibt das insgesamt?

Beispiel 17



Sie haben 3 schwarze Chips und 5 weisse.
Sie sollen diese 8 Chips auf 8 „Plätze" verteilen.
Auf wie viele verschiedene Arten geht das?

Der Term $\binom{n}{k}$ heisst auch **Binomialkoeffizient**. (Die Begründung für diese Namensgebung findet sich im Anhang 2.)
Er spielt später noch eine wichtige Rolle. Wir beschäftigen uns noch ein bisschen mit ihm.

Beispiel 18

a) Geben Sie eine Aufgabenstellung an, bei der die Antwort „$\binom{6}{4}$" lautet.

b) Berechnen Sie nacheinander die folgenden Binomialkoeffizienten: $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{6}{5}$.

Fällt Ihnen etwas auf? Können Sie das „intuitiv" erklären? (Tipp: a))

c) Berechnen Sie $\binom{6}{6}$. Und dann: $\binom{6}{0}$. Stört Sie etwas? Oder nicht? Oder vielleicht? (Tipp: a))

d) Berechnen Sie ohne TR: $\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$.

Schreibweise

Wir werden nun noch eine „kompaktere" Art kennenlernen den Binomialkoeffizienten auszuschreiben.

Machen Sie sich klar, dass folgendes richtig ist.

$$\binom{8}{3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\cdot\underbrace{\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}_{\text{erweitern}} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{8!}{3!\cdot5!}$$

Wir haben also eine neue Art der Schreibweise gefunden!

Merken Sie sich diese Schreibweise!!

Formen Sie in gleicher Weise um:

- $\binom{10}{4} =$

- $\binom{n}{k} =$

Beispiel 19 **Berechnen Sie ohne TR**

a) $\binom{10}{7}$ **b)** $\binom{10}{2} - \binom{9}{2}$ **c)** $\binom{10}{5} : \binom{9}{4}$ **d)** $\binom{7}{4}\cdot4! - \binom{6}{3}\cdot3!$

Beispiel 20 **Vereinfachen Sie soweit wie möglich**

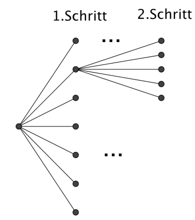
a) $\binom{n+1}{n-1}$ **b)** $\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2}$ **c)** $\dfrac{\binom{n}{7}\cdot7!}{\binom{n}{6}\cdot6!}$ **d*)** $\dfrac{n!}{(n-3)!\cdot3!} + \binom{n}{4}$

**** Zusatz*** *Lösen Sie noch einmal Beispiel 14 mit der „neuen Schreibweise" des Binomialkoeffizienten. Verstehen Sie, was „kombinatorisch" vor sich geht? Was bedeutet etwa das Produkt im Nenner?*

Zusammenfassung, Formeln in der Kombinatorik

Alle Formeln basieren auf folgendem Prinzip:

Baumdiagramm



Fundamentales Zählprinzip

Gibt es „in einem ersten Schritt“ n Möglichkeiten und „in einem zweiten Schritt“ m Möglichkeiten, dann gibt es insgesamt $n \cdot m$ Möglichkeiten.
Am **Baumdiagramm** gibt es also insgesamt $m \cdot n$ „Pfade“.

Beispiel

Auf der Menukarte gibt es sieben Vorspeisen und fünf Hauptspeisen.
Auf wie viele Arten lassen sich Vorspeise und Hauptspeise kombinieren?

Lösung

Es gibt $\# = 7 \cdot 5 = 35$ *Möglichkeiten*

n! (n Fakultät)

n Objekte lassen sich auf n! verschiedene Arten in einer Reihe anordnen.

Beispiel

Auf wie viele Arten können vier Personen nebeneinander Platz nehmen?

Lösung

Es gibt $\# = 4! = 24$ *Möglichkeiten*

$\binom{n}{k}$ **(Binomialkoeffizient)**

k Objekte lassen sich auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Arten aus n Objekten auswählen.

Beispiel

Auf wie viele Arten können vier Personen aus sechs Personen ausgewählt werden?

Lösung

Es gibt $\# = \binom{6}{4} = 15$ *Möglichkeiten*

Beispiel

Aus einer Gruppe von acht Männern und zehn Frauen soll eine Kommission gebildet werden, die aus vier Männern und drei Frauen besteht.
Auf wie viele Arten ist das möglich?

Lösung

Mit dem Binomialkoeffizienten folgt:

- Es gibt $\# = \binom{8}{4} = 70$ Möglichkeiten, vier Männer aus acht auszuwählen
- und $\# = \binom{10}{3} = 120$ Möglichkeiten, drei Frauen aus deren zehn auszuwählen

Mit dem fundamentalen Zählprinzip folgt:

- Insgesamt gibt es also $\# = \binom{8}{4} \cdot \binom{10}{3} = 70 \cdot 120 = 8'400$ Möglichkeiten (!!!)

Weitere Aufgaben mit Lösungen

Strategien *Baumdiagramm, Reduzieren des Problems (kleinere Zahlen wählen!)*

Bemerkung

Einfach zu berechnende Anzahlen sollen berechnet, die anderen können in der entsprechenden Form – als "kombinatorische" Antwort – belassen werden.

Beispiel

a) $\binom{10}{2} = 45$ *hingegen* $\binom{23}{10}$ *b)* $3^4 = 81$ *hingegen* 3^{11}

Aufgabe 1 „Sachen" verteilen

Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten 12 Bilder unter 3 Personen so aufzuteilen, dass jede Person 4 Bilder erhält.

Aufgabe 2 Mastermind

a) Eine Einfach-Version von „Mastermind" verlangt Farbkombinationen der Länge 4 (ohne Wiederholung) zu erraten, die aus 6 verschiedenen Farben erzeugt wurden. Wie viele solche Farbkombinationen gibt es?

b) Wie viele Farbkombinationen der Länge 4 kann man aus 6 verschiedenen Farben erzeugen, wenn Wiederholungen erlaubt sind?

Aufgabe 3 Bücherregal

4 Kochbücher, 5 Physikbücher und 6 Chemiebücher sollen auf einem Regal nebeneinander gestellt werden. Auf wie viele Arten kann man das tun, wenn Bücher des gleichen Stoffgebietes nebeneinander gestellt werden sollen und alle Bücher verschieden sind?

Aufgabe 4 Münzserie

Mit einer Münze werden 10er Serien geworfen.

a) Wie viele verschiedene 10er Serien gibt es,

b) Wie viele verschiedene 10er Serien gibt es, die 0, 1, 2, 3,... Mal „Zahl" erhalten?

Aufgabe 5 Gruppe

a) Aus einer Gruppe von 8 Amerikanern, 5 Engländern und 3 Franzosen soll ein Viererkomitee zufällig ausgewählt werden.

- Wie viele Varianten gibt es insgesamt?
- Wie viele Varianten enthalten nur Amerikaner?
- Wie viele Varianten enthalten keinen Amerikaner?

b) Aus einer Gruppe von n Herren und einer Dame sollen k Personen ausgewählt werden.

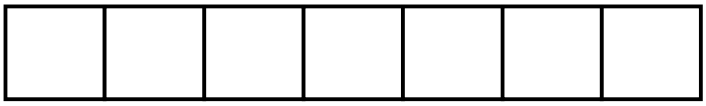
- Wie viele Möglichkeiten der Auswahl gibt es überhaupt?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Dame in die Auswahl kommen soll?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Dame nicht in die Auswahl kommen darf?

Aufgabe 6 Eier & Tore

a) Auf wie viele Arten kann man 20 verschiedene Ostereier auf drei verschiedenartige Nester verteilen?

b) Ein Fussballspiel endet mit 5:3. Wie viele verschiedene Halbzeitresultate sind möglich?

Aufgabe 7 Felder färben



Sie haben 9 verschiedene Farben (inklusive rot, blau, grün). Auf wie viele Arten können Sie die sieben Felder färben, wenn

a) keine Einschränkung besteht?

b) jedes Feld eine andere Farbe haben soll?

c) benachbarte Felder verschieden gefärbt werden sollen?

d) die beiden Felder links und rechts aussen rot sein sollen?

e) 3 Felder rot, 2 blau und der Rest grün sein soll?

f) 3 nebeneinander liegende Felder rot, die übrigen beliebig, aber nicht rot gefärbt sind?

Aufgabe 8 Mädchen und Knaben

Die Klassen A und B sind im Lager:
A hat 12 Mädchen und 9 Knaben; B hat 8 Mädchen und 16 Knaben.

a) Eine Dreiergruppe muss einkaufen gehen; wie viele Möglichkeiten zur Bestimmung dieser Gruppe gibt es?

b) Eine Dreiergruppe muss einkaufen gehen; wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Gruppe nicht nur aus Mädchen oder nur aus Knaben bestehen soll?

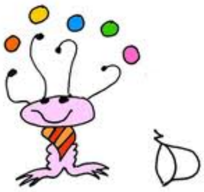
c) Gesucht werden vier Kinder, die ganz verschiedene Aufträge ausführen sollen;
wie viele Möglichkeiten gibt es?

d) Wie viele Zweiergruppen Mädchen/Knabe sind möglich?

e) Wie viele Zweiergruppen Mädchen/Knabe sind möglich, wenn die beiden aus verschiedenen Klassen kommen sollen?

Aufgabe 9 die Kunst zu zählen

Um was geht es in der Kombinatorik? Machen Sie ein Beispiel.



Lösungen

Aufgabe 1

$\# = \binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}$

Aufgabe 2

a) $\# = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$

b) $\# = 6^4$ (= 1’296)

Aufgabe 3

$\# = (4!\cdot5!\cdot6!)\cdot3!$

Aufgabe 4

a) $\# = 2^{10}$

b) $\# = \binom{10}{0} = 1,\ \binom{10}{1} = 10,\ \binom{10}{2} = 45, \ldots$

Aufgabe 5

a)
- $\# = \binom{16}{4}$
- $\# = \binom{8}{4}$
- $\# = \binom{8}{4}$

b)
- $\# = \binom{n+1}{k}$
- $\# = \binom{n}{k-1}$
- $\# = \binom{n}{k}$

Aufgabe 6

a) $\# = 3^{20}$

b) $\# = 6\cdot4 = 24$

Aufgabe 7

a) $\# = 9^7$

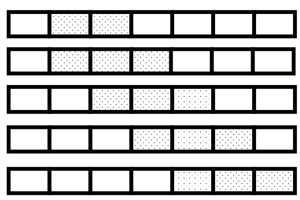
b) $\# = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$

c) $\# = 9\cdot8^6$

d) $\# = 9^5$

e) $\# = \binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2} = 35\cdot6\cdot1 = 210$; Alternative: $\frac{7!}{3!\cdot2!\cdot2!} = 210$

f) 3 nebeneinander liegende Felder kann man auf 5 Arten auswählen, vgl. Abbildung rechts.
Für die verbleibenden 4 Felder stehen noch je 8 Farben zur Verfügung
Insgesamt: $5\cdot8^4$



Aufgabe 8

a) $\# = \binom{45}{3}$

b) reine Knabengruppe: $\binom{25}{3}$; reine Mädchengruppe: $\binom{20}{3}$. Insgesamt: $\# = \binom{45}{3} - \binom{25}{3} - \binom{20}{3}$

c) $\# = 45\cdot44\cdot43\cdot42$

d) $\# = 20\cdot25 = 500$

e) $\# = 12\cdot16 + 9\cdot8 = 192 + 72 = 264$

Anhang 1 Kombinatorik, ganz schön vertrackt!

Kombinatorik ist *nicht* einfach.

Manchmal führen scheinbar „einfache“ Aufgaben zu unterschiedlichen Antworten, von denen jede „logisch“ erscheint.

Dazu zwei Beispiele.

Beispiel 1

Im Sportunterricht sollen aus acht SchülerInnen zwei Mannschaften mit je vier SchülerInnen gebildet werden. Wie viele verschiedene Mannschaften sind möglich?

- Antwort A

  $\# = \binom{8}{4}$

- Antwort B

  $\# = \binom{8}{4} : 2$

Welche Antwort ist richtig? Oder: ist das Ansichtssache?

Beispiel 2

Es hat n Knaben und n Mädchen. Wie viele Tanzpaare sind möglich?

- Antwort A

  $\# = n^2$

- Antwort B

  $\# = n!$

Welche Antwort ist richtig? Oder: ist das Ansichtssache?

Anhang 2 Der binomische Lehrsatz

Pascal'sches Dreieck

- Ergänzen Sie die nächste Zeile!

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Binome

In vielen mathematischen Betrachtungen treten Terme der Form $(a + b)^n$ auf.
Der Ausdruck a + b heisst Binom. Für den Exponenten n ergibt sich:

n = 0 $(a + b)^0 = 1$

n = 1 $(a + b)^1 = a + b$

n = 2 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

n = 3 $(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = ... = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

n = 4 $(a + b)^4 = (a + b)^3 \cdot (a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a + b) = ... = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Wir erkennen, dass die *Koeffizienten* (= Zahlen die bei den a's und b's stehen) im Pascal'schen Dreieck abgelesen werden können.

- Schreiben Sie „direkt" hin

  $(a + b)^5 =$

Das folgende „erweiterte" Pascalsche Dreieck zeigt noch einmal den Zusammenhang zwischen dem Exponenten n und den Koeffizienten im Binom $(a + b)^n$.

$$
\begin{array}{l|ccccccccccc}
n = 0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n = 1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n = 2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n = 3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n = 4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n = 5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck lassen sich auch mit Hilfe von *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ berechnen!

Wie?

Das erfahren Sie auf der nächsten Seite!

n = 0					1					
n = 1				1		1				
n = 2			1		2		1			
n = 3		1		3		3		1		
n = 4	1		4		6		4		1	
	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$	

- Alles klar?
  Berechnen Sie noch einmal die Zahlen in der n = 5. Zeile. Diesmal aber mit Hilfe von Binomialkoeffizienten!

$\binom{5}{0}$ = $\binom{5}{1}$ = $\binom{5}{2}$ = $\binom{5}{3}$ = $\binom{5}{4}$ = $\binom{5}{5}$ =

Wir können die Binomialkoeffizienten auch „stehen lassen“ und schreiben

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3b + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4$$

- Schreiben Sie analog mit Hilfe von Binomialkoeffizienten

  $(a + b)^6 =$

  $(a + b)^n =$

  Die eben von Ihnen hingeschrieben Zeile heisst auch der **binomische Lehrsatz**!

Warum sind die Koeffizienten beim Binom gerade die Binomialkoeffizienten?

Es ist zum Beispiel

$(a + b)^3 = (a + b)\cdot(a + b)\cdot(a + b) = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$

Der Koeffizient $\binom{3}{2}$ lässt sich so deuten: Aus den drei Faktoren (aus den drei Klammern) müssen zwei b's ausgewählt werden; dies ist auf $\binom{3}{2}$ Arten möglich.

Lösen Sie in Ihr Heft: Schlussaufgabe

- Schreiben Sie $(x + y)^7$ als Summe mit Hilfe von Binomialkoeffizienten und erklären Sie, warum beim vierten Summanden der Koeffizient $\binom{7}{3}$ steht.

- Zeigen Sie: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Was hat dies mit dem Pascal'schen Dreieck zu tun?