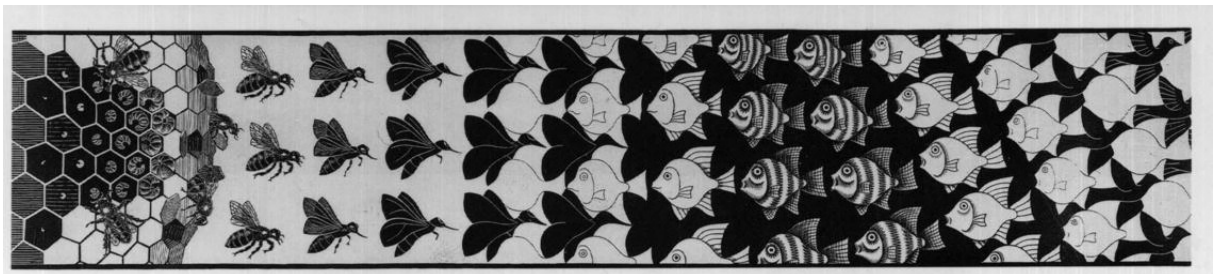


Geometrie

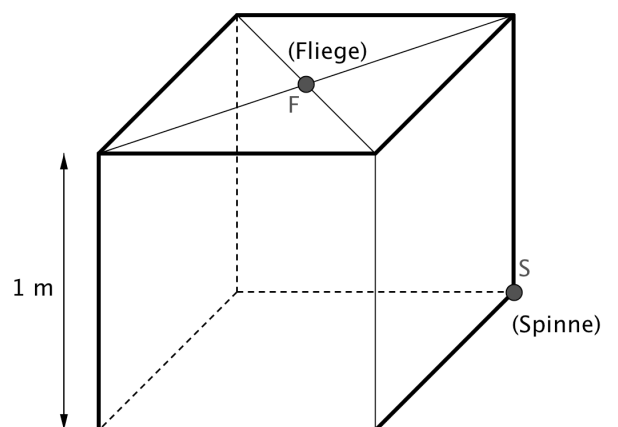


Spinne & Fliege & Würfel

In einer würfelförmigen Kiste (Kantenlänge 1m) sitzt eine Spinne in der Ecke S, die zur Fliege F laufen will, welche sich in der Mitte der Decke im Spinnennetz verfangen hat.

Wie lang ist der kürzeste Weg?

Beachte Die Spinne darf „nur“ auf der Oberfläche des Würfels laufen, nicht durch die Kiste hindurch.

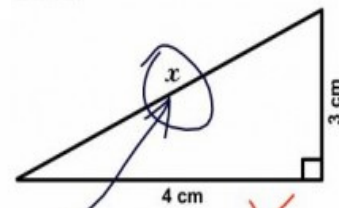


Lösung 1.58 m

Inhalt

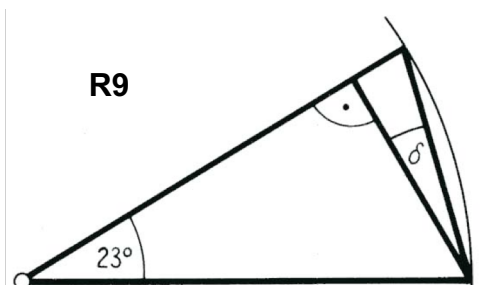
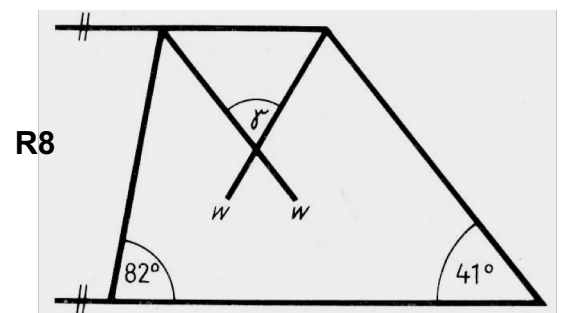
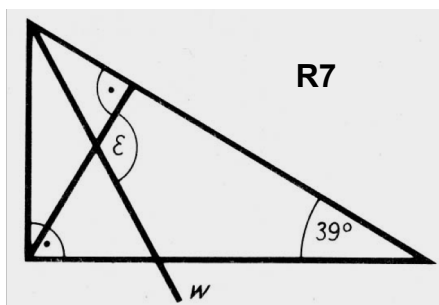
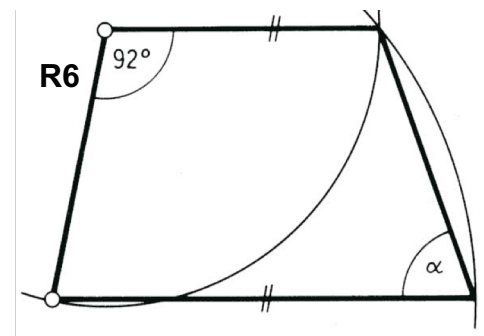
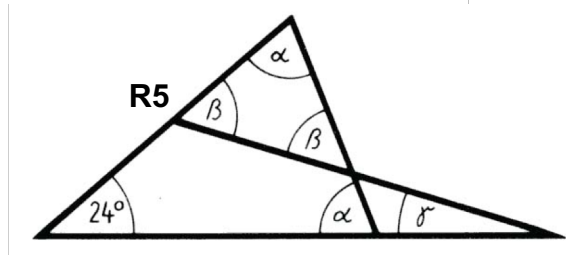
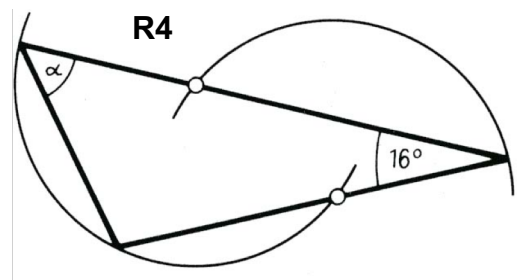
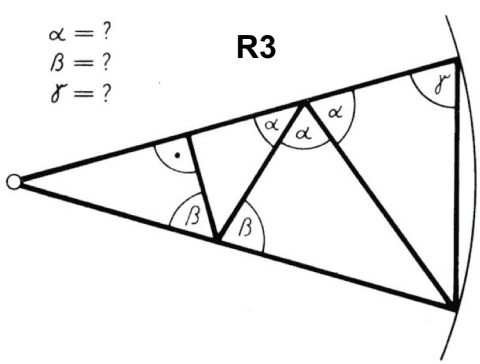
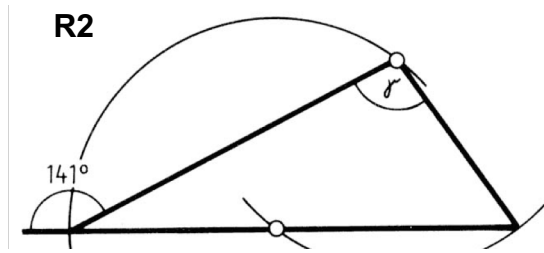
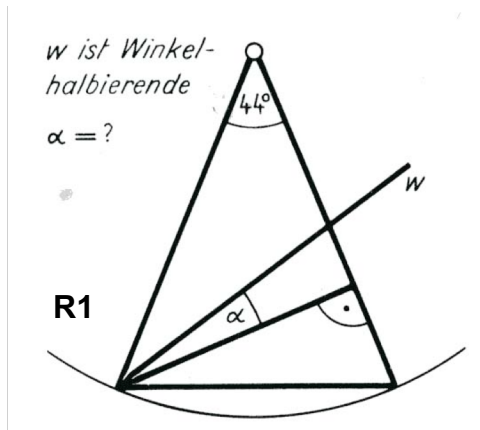
0	Wie gross ist der Winkel?	3
1	Winkel, Fläche, Thales	5
2	Pythagoras	7
3	Kreis	8
Exkurs	zentrische Streckung	9
4	Ähnlichkeit	11
Anhang		17
	<ul style="list-style-type: none">• Kongruenzsätze• Pythagoras und die irrationalen Zahlen• Quadratwurzeln• Verallgemeinerung des Thales (Peripheriewinkelsatz)	

Find x .



Here it is ~~X~~ 0

0 Wie gross ist der Winkel?



Lösungen

- R1** $\alpha = 12^\circ$ **R2** $\gamma = 63^\circ$ **R3** $\alpha = 60^\circ; \beta = 75^\circ; \gamma = 82.5^\circ$
R4 $\alpha = 66^\circ$ **R5** $\gamma = 27^\circ$ **R6** $\alpha = 68^\circ$ **R7** $\epsilon = 115.5^\circ$
R8 $\gamma = 61.5^\circ$ **R9** $\delta = 11.5^\circ$

Geometrie ... ist altgriechisch und setzt sich zusammen aus den Wörtern

- geos = Erde und
- metron = Mass



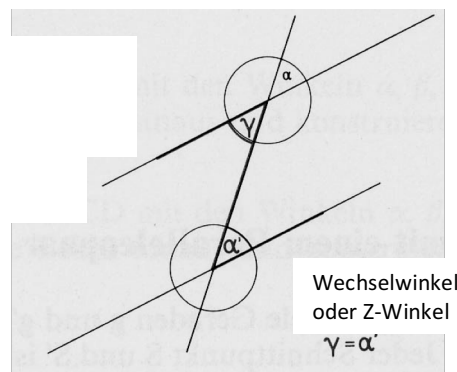
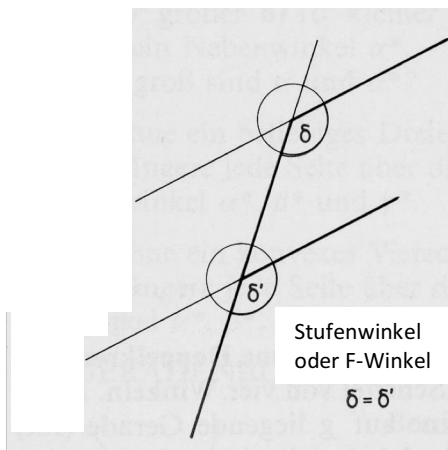
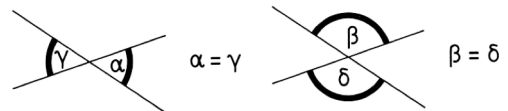
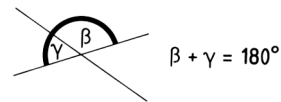
In der Geometrie geht es also um das richtige Messen und Vermessen!

Griechisches Alphabet

<i>A α</i>	<i>A α</i>	Alpha	<i>N ν</i>	<i>N ν</i>	Ny
<i>B β</i>	<i>B β</i>	Beta	<i>Ξ ξ</i>	<i>Ξ ξ</i>	Xi
<i>Γ γ</i>	<i>Γ γ</i>	Gamma	<i>Ο ο</i>	<i>Ο ο</i>	Omikron
<i>Δ δ</i>	<i>Δ δ</i>	Delta	<i>Π π</i>	<i>Π π</i>	Pi
<i>E ε</i>	<i>E ε</i>	Epsilon	<i>Ρ ρ</i>	<i>Ρ ρ</i>	Rho
<i>Z ζ</i>	<i>Z ζ</i>	Zeta	<i>Σ σ</i>	<i>Σ σ</i>	Sigma
<i>H η</i>	<i>H η</i>	Eta	<i>Τ τ</i>	<i>Τ τ</i>	Tau
<i>Θ θ</i>	<i>Θ θ</i>	Theta	<i>Υ υ</i>	<i>Υ υ</i>	Ypsilon
<i>I ι</i>	<i>I ι</i>	Iota	<i>Φ φ</i>	<i>Φ φ</i>	Phi
<i>K κ</i>	<i>K κ</i>	Kappa	<i>Χ χ</i>	<i>Χ χ</i>	Chi
<i>Λ λ</i>	<i>Λ λ</i>	Lambda	<i>Ψ ψ</i>	<i>Ψ ψ</i>	Psi
<i>M μ</i>	<i>M μ</i>	My	<i>Ω ω</i>	<i>Ω ω</i>	Omega

Geradenkreuzung

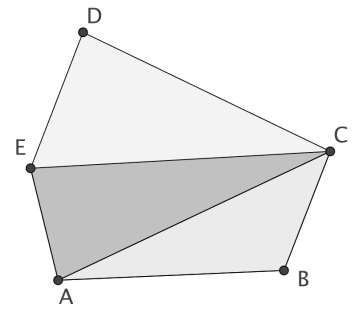
- Nebenwinkel ergeben zusammen 180°
- Scheitelwinkel sind gleich gross
- Doppelkreuzung an Parallelenpaar



1 Winkel, Fläche, Thales



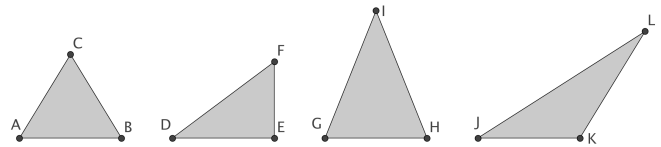
Warum sind Dreiecke so wichtig?



Fünfeck - zerlegt in drei Dreiecke

Beispiel 1 verschiedene Dreiecke, Fläche, Winkelsumme

Dreiecke können ganz verschieden aussehen!
Sie haben schon viele Dreiecke gesehen!



a) Wie heissen die rechts abgebildeten Dreiecke?

b) Wie berechnet man die Fläche eines Dreiecks? Begründen Sie dies!

c) Bei Dreiecken können Seiten, Winkel und Fläche ganz **verschieden** gross sein. Was ist aber bei allen Dreiecken **immer gleich** gross? Begründen Sie dies!

Beispiel 2 Dreiecke als kleinste Bausteine

Wir wissen, dass Dreiecke die kleinsten Bausteine von ebenen Vielecken sind, weil sich jedes Vieleck durch Einzeichnen von entsprechenden Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt.
Wenden Sie nun diesen „Zerlegungstrick“ an, um folgende Antworten zu finden und zu begründen!

a) Winkelsumme

- Wie gross ist die Winkelsumme in einem 4-eck?
- Wie gross ist die Winkelsumme in einem n-eck?

b) Fläche

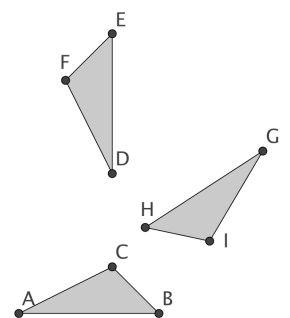
- Wie berechnet man die Fläche eines Parallelogramms?
- Wie berechnet man die Fläche eines Trapezes?

Beispiel 3 was heisst „gleich“?

Die abgebildeten Dreiecke sind nicht „gleich“; sie haben aber die gleiche Form und die gleiche Grösse. Man könnte sie „*ausschneiden und aufeinander legen*“.

a) Wie heissen solche Dreiecke?

b*) Entdecken Sie mehr über solche Dreiecke im **Anhang 1!**



Beispiel 4 Satz von Thales (624–546 v. Chr.), Tangente

a) Wie lautet der Satz des Thales?

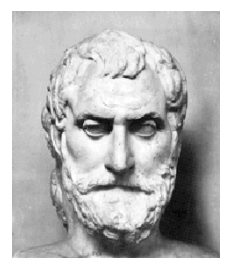
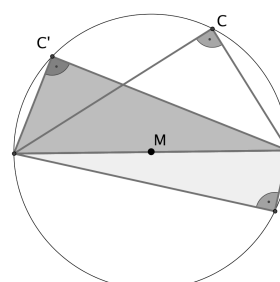
Machen Sie eine Skizze, nicht zu klein. Begründen Sie den Satz.

Hinweis Ziehen Sie eine Hilfslinie von M zu C.

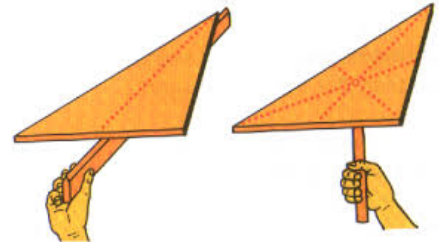
b) Zeichnen Sie einen Kreis in Ihr Heft und einen Punkt.

Konstruieren Sie die Tangente(n) von diesem Punkt an den Kreis!

Hinweis Verbinden Sie den Punkt mit dem Kreismittelpunkt.



Neben den drei Eckpunkten eines Dreiecks ist ein weiterer Punkt von besonderem Interesse, der sogenannte **Schwerpunkt**.



→ Was ist der Schwerpunkt eines Dreiecks?

Beispiel 5 Wo liegt der Schwerpunkt?

a) Wo liegt der Schwerpunkt S? Zeichnen Sie!

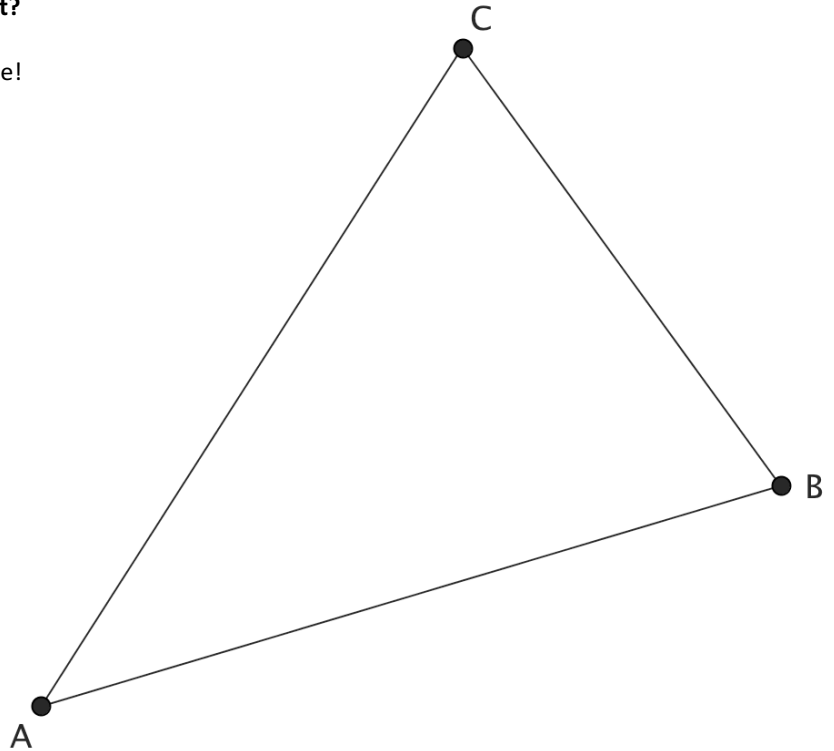
Hinweis Seitenhalbierende!

b) In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden?

Ist es im Verhältnis

- 1 : 1 ? oder
- 2 : 1 ? oder
- 3 : 1 ?

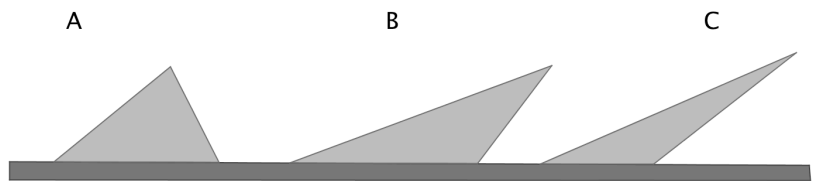
Messen Sie!



Beispiel 6 Überlegungen zum Schwerpunkt

a) Kann der Schwerpunkt eines Dreiecks auch ausserhalb des Dreiecks liegen?

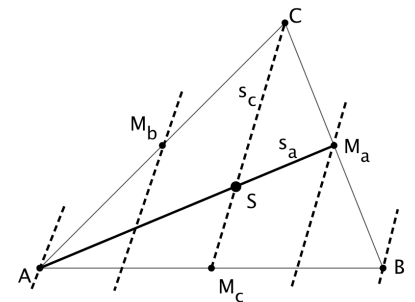
b) Die drei Dreiecke A, B und C stehen auf einer Tischplatte. Das linke Dreieck A wird stehen bleiben, wo hingegen das rechte Dreieck C nach rechts kippen wird. Kann man voraussagen, ob das mittlere Dreieck auch umfällt?



c*) Können Sie „sehen“ (begründen), warum die Seitenhalbierenden vom Schwerpunkt im Verhältnis 2:1 geteilt werden?

Hinweis nebenstehende Skizze.

Die gestrichelten Linien sind alle parallel.

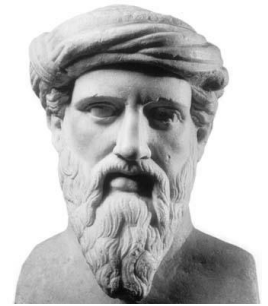
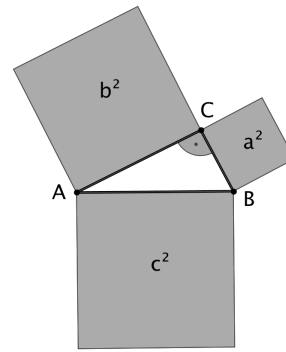


Zusatz

Es gibt noch weitere, „wichtige“ Punkte im Dreieck:

zB. *Umkreismittelpunkt* und *Inkreismittelpunkt*. Wissen Sie noch, wie man diese Punkte „konstruiert“?

2 Pythagoras



Beispiel 7 Satz von Pythagoras (570–510 v.Chr.)

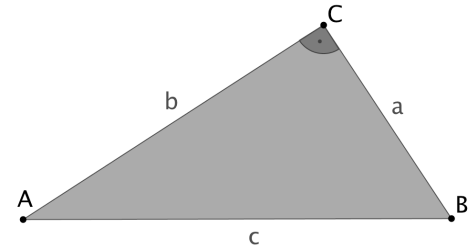
Wie lautet der Satz des Pythagoras?
Machen Sie eine Skizze, nicht zu klein.
Begründen Sie den Satz.

Beispiel 8 Pythagoras pur

a) In einem *rechtwinkligen* Dreieck gilt: $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$. $c = ?$

b) In einem *rechtwinkligen* Dreieck gilt: $a = 3 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$. $b = ?$

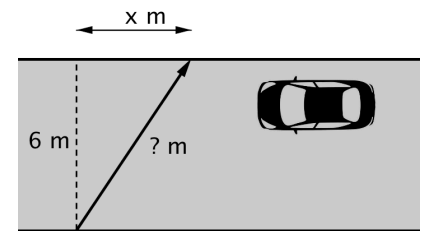
Lösen Sie diese Aufgaben *zeichnerisch* und *rechnerisch*!
Welche Methode bevorzugen Sie? Warum?



Beispiel 9 Pythagoras angewandt

a) Sie laufen über eine 6 m breite Strasse und zwar „schräg“ (vgl. Pfeil).

- Wie lang ist Ihr Weg, wenn $x = 3 \text{ m}$
- Ihr Weg ist 8 m. Wie gross ist x ?



b) Wie lang muss der Trinkhalm mindestens sein, damit er nicht in die Dose fällt?
Die Dose ist ein 10 cm hoher Zylinder mit einem Durchmesser von 5 cm.

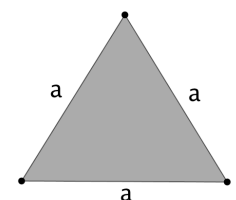
Beispiel 10 gleichseitige Figur & Pythagoras

a) Quadrat

- Wie lang ist die Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge a ?
- Die Diagonale eines Quadrates hat die Länge d . Wie lang ist die Quadratseite?

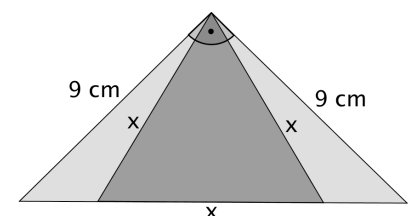
b) gleichseitiges Dreieck

- Das nebenstehende *gleichseitige* Dreieck besitzt die Seitenlänge $a = 12$. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.
- Geben Sie eine *allgemeine Formel* an für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a .



Beispiel 11 ... Herausforderung!

Wie lang ist die Strecke x ?



3 Kreis

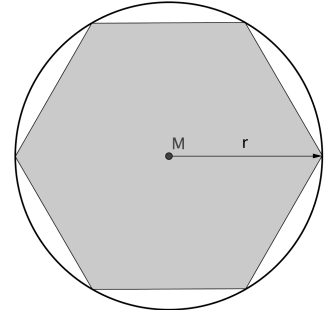


Neben dem Dreieck gibt es eine weitere wichtige „Basisfigur“: den Kreis.

→ Warum sind Kreise so wichtig?

Beispiel 12 Kreisumfang abschätzen

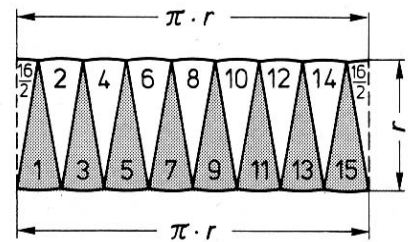
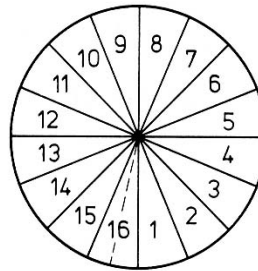
- a) Wir versuchen, den Kreisumfang abzuschätzen. Dazu nehmen wir die nebenstehende Figur. Welche Idee wird hier verfolgt? Warum wurde ein Sechseck gewählt?
- b) Wie erhalten wir eine bessere Abschätzung?



Kreiszahl $\pi = 3.14\dots$ Merksatz: "how I wish I could enumerate Pi easily..."
Wie lauten also die nächsten Stellen?

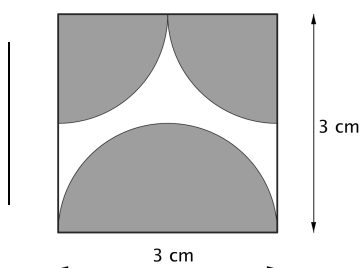
Beispiel 13 Kreisfläche

- a) Begründen Sie mit Hilfe der nebenstehenden Abbildung die Formel für die Kreisfläche.
- b) Ein Kreis hat den Radius $r = 5$ cm. Berechnen Sie Umfang und Fläche.



Beispiel 14 Kreis angewandt

- a) Der (kreisrunde...) Stamm eines Baumes hat den Umfang 170 cm. Berechnen Sie seinen Durchmesser und seine Querschnittsfläche.
- b) Aus einem Stoffresten von 1.40 m Breite und 1.60 m Länge soll eine möglichst grosse kreisrunde Tischdecke hergestellt werden. Wie gross ist die Decke, wie gross der Abfall?
- c) Die Erde hat am Äquator einen Umfang von 40'077 km. Bestimmen Sie den Erdradius am Äquator.
- d) Ein Satellit umkreist die Erde auf einer Kreisbahn mit einer Geschwindigkeit von 8 km/sec. Für eine Erdumkreisung braucht er 1 h 28 Minuten. In welcher Höhe fliegt der Satellit?



Beispiel 15 Figur

- a) Berechnen Sie Umfang und Inhalt der nebenstehenden weissen Figur.
- b) Wie lautet die Lösung, wenn das Quadrat die Seitenlänge a besitzt?

Exkurs zentrische Streckung

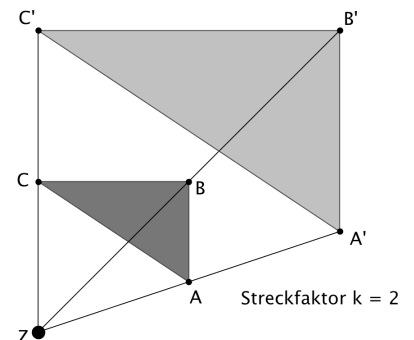
Vergrössern – Verkleinern, Verhältnis

Das Dreieck ABC wird vom „Zentrum“ Z aus gestreckt. Man spricht von einer „zentrischen Streckung“.

Das Resultat (oder das „Bild“) ist das Dreieck A'B'C'. Das entstandene Dreieck ist grösser.

Der Streckfaktor beträgt hier $k = 2$.

Heute kann man Figuren bequem am Computer vergrössern oder verkleinern. Dennoch ist es wissenswert, wie man von Hand die Grösse einer Figur verändern kann.



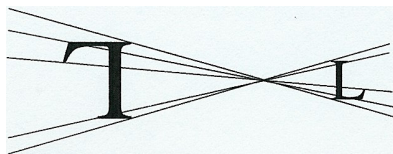
Beispiel 16 zentrische Streckung

a) Ein Dreieck wird – so wie in der Abbildung – gestreckt mit dem Streckungsfaktor $k = 2$. Wie verändern sich

- die **Seitenlängen**?
- die **Winkel**?
- die **Fläche**? ... im *Verhältnis* zum ursprünglichen Dreieck?

b) Was lässt sich in a) verallgemeinern? Tun Sie dies! Was passiert allgemein mit **Seitenlängen**, **Winkeln** und **Flächen**?

Hinweis

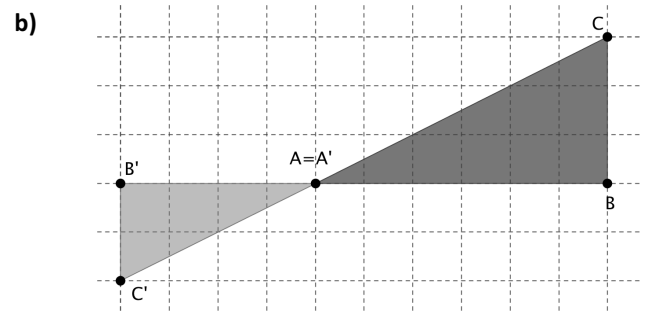
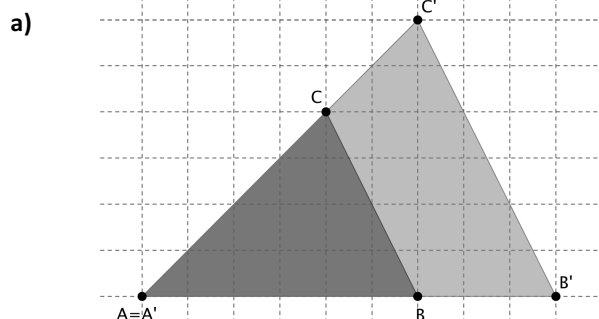


Hier liegt ein *negativer* Streckfaktor vor!



Man kann *beliebige* Figuren vergrössern. Wo liegt hier das Streckzentrum Z?

Beispiel 17 grundlegende „Figuren“



- Wir fassen die Abbildung als zentrische Streckung auf. Wo liegt das Zentrum Z? Wie gross ist der Faktor k?
- Die Strecke AB misst 18 cm. Wie lang ist die Strecke A'B'?
- Die Fläche des Dreiecks ABC sei $x \text{ cm}^2$ gross. Wie gross ist dann die Fläche des Dreiecks A'B'C'?

4 Ähnlichkeit

Wir kennen bereits eine Methode, wie man eine Figur vergrößert: die zentrische Streckung.

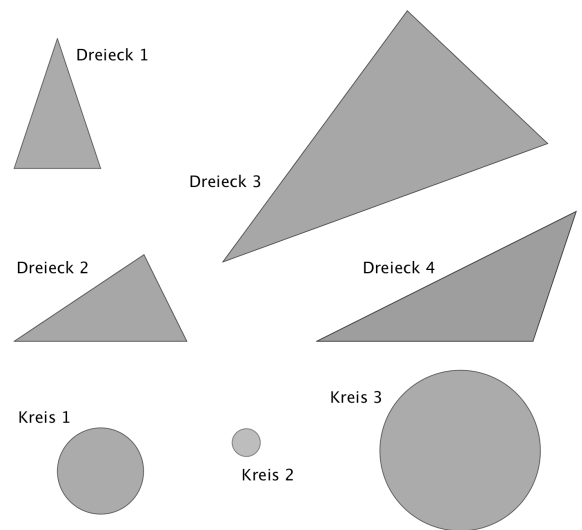
Man nennt zwei geometrische Figuren **ähnlich**, wenn die eine Figur eine Vergrößerung der anderen ist (aber die *gleiche Form* hat). Sind zwei Figuren A und B ähnlich zueinander, schreiben wir: $A \sim B$.



Bemerkung

Die **Ähnlichkeit** ist eine **Verallgemeinerung der Kongruenz**. (Der Streckfaktor bei der Kongruenz ist einfach $k = 1$.)

Wir haben bereits gesehen, dass Dreiecke und Kreise die beiden grundlegenden Formen der Geometrie sind. Dies führt zur Frage, unter welchen Voraussetzungen zwei Figuren, in unserem Fall also Dreiecke oder Kreise *ähnlich* sind, ohne jedes Mal eine Vergrößerung mit einer zentrischen Streckung durchführen zu müssen.

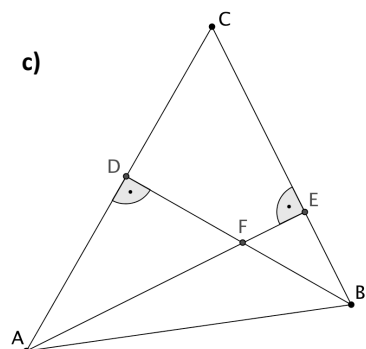
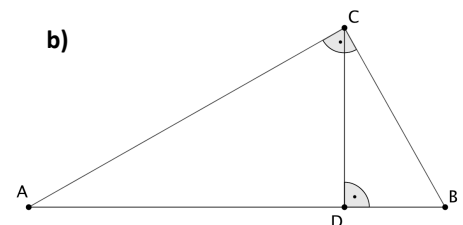
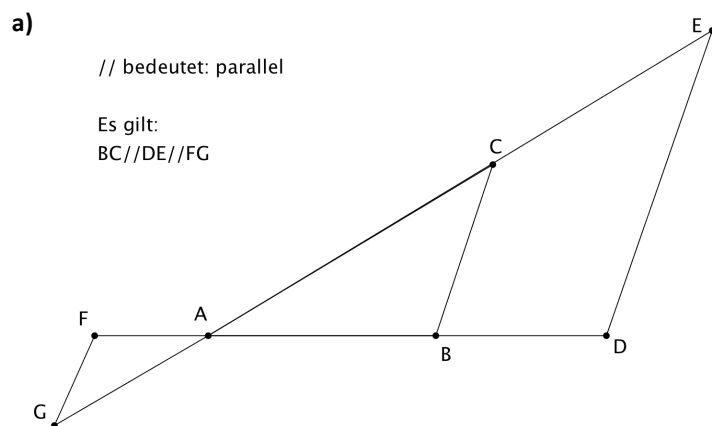


Beispiel 18 ähnlich? Bedingung für...

- a) Welche der abgebildeten „Figuren“ sind ähnlich zueinander? Warum?
- b) Wie lässt sich einfach entscheiden, ob zwei Dreiecke zueinander ähnlich sind?
M.a.W.:
Formulieren Sie ein Kriterium für die Ähnlichkeit von Dreiecken!

Beispiel 19

Abgebildet sehen Sie verschiedene „Figuren“. Finden Sie ähnliche Dreiecke und begründen Sie deren Ähnlichkeit!





Merke:

In *ähnlichen* Dreiecken sind die *Verhältnisse* entsprechender Seite gleich gross.

Mit Hilfe der Ähnlichkeit lassen sich viele Berechnungen durchführen.

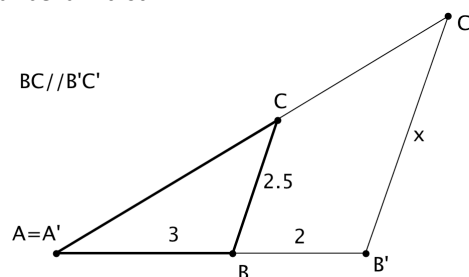
Diese Berechnungen folgen immer demselben Muster:

- Gleichung aufstellen: dabei sind 4 Strecken involviert, wobei eine unbekannt ist
- Gleichung lösen

Beispiel 20 Berechnung mit Ähnlichkeit

a) obere Figur

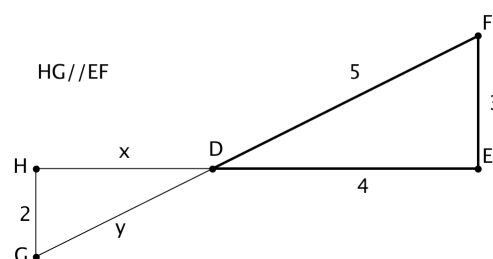
- Begründen Sie, warum gilt: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
- Berechnen Sie x.



b) untere Figur

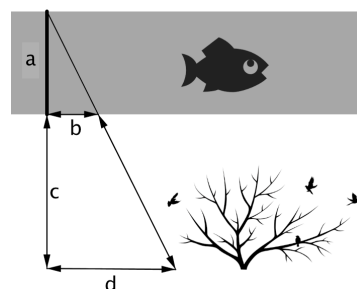
- Begründen Sie, warum gilt: $\triangle DEF \sim \triangle DHG$.
- Berechnen Sie x und y.

Achtung! Strecken nicht „vertauschen“.



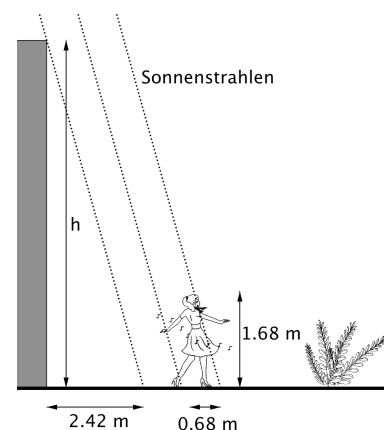
c) Unzugängliche Strecke

Bestimmen Sie die Breite a eines Kanals, wenn folgende Strecken gemessen werden: $b = 12$ m, $c = 30$ m und $d = 22$ m.



d) Esmeralda

Esmeralda Santa Cruz dell'Ombra steht eines sonnigen Tages vor ihrem Schulhaus. Wie hoch ist es?



Beispiel 21 Gleichungen üben!

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. Kein Zögern ☺!

a) $\frac{3}{2} = \frac{x}{10}$

b) $\frac{3}{2} = \frac{27}{x}$

c) $\frac{15}{6} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{30}{x} = \frac{5}{7}$

e) $\frac{x}{8} = \frac{25/2}{x}$

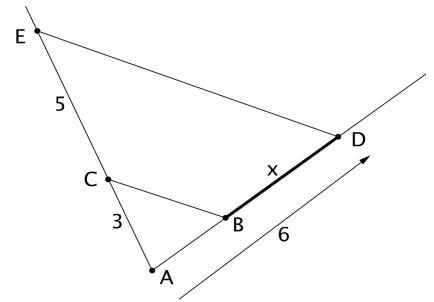
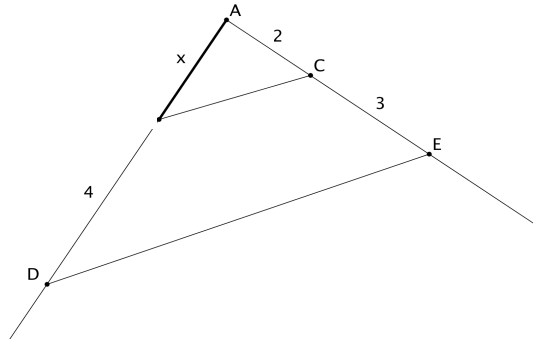
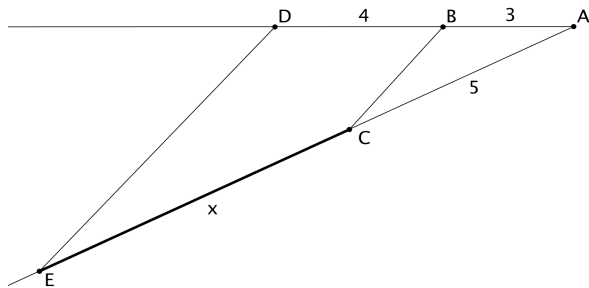
f) $\frac{3}{2} = \frac{x+1}{10}$

g) $\frac{2}{x+3} = \frac{16}{5}$

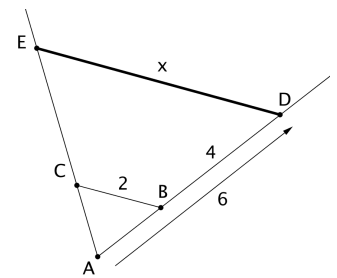
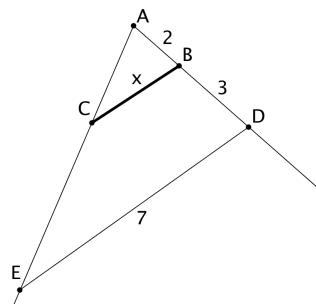
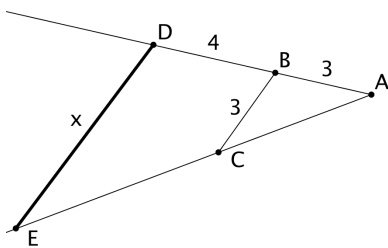
h) $\frac{a}{5} = \frac{b-x}{20}$

Beispiel 22 unbekannte Streckenstücke

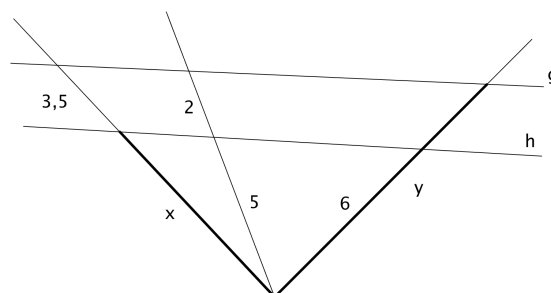
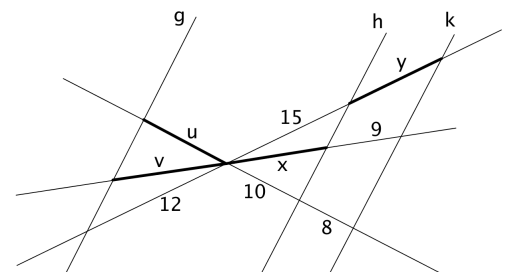
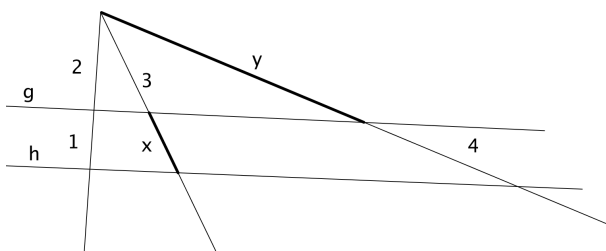
a) Es ist: $BC \parallel DE$. Berechnen Sie die Länge x .



b) Es ist: $BC \parallel DE$. Berechnen Sie die Länge x .



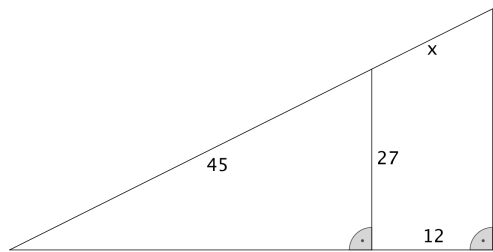
c) Es ist $g \parallel h \parallel k$. Berechnen Sie die unbekanntenen Streckenstücke.



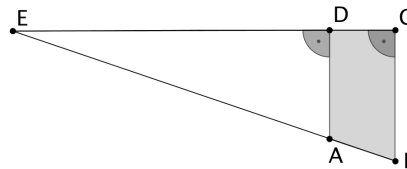
Im folgenden Beispiel muss zusätzlich der **Satz von Pythagoras** angewendet werden.

Beispiel 23 Ähnlichkeit & Pythagoras

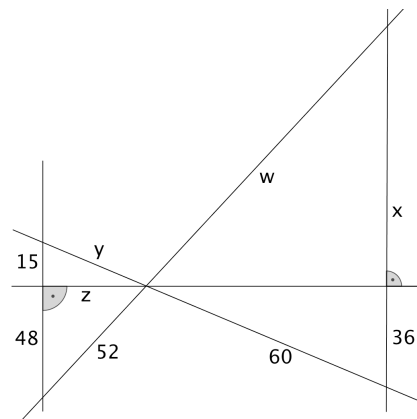
a) Berechnen Sie die Länge der Strecke x.



b) Es gilt: $EC = 48$; $DC = 12$; $AD = 15$.
Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des schraffierten Trapezes ABCD.



c) Berechnen Sie die unbekanntnen Streckenlängen.

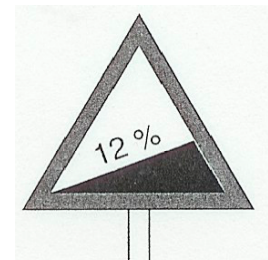


Beispiel 24 Steigung

Was bedeutet dieses Strassenschild?

Welchen Höhenunterschied h überwindet eine Strasse mit dieser Steigung auf 2.3 km Horizontaldistanz?

Hinweis Skizze!

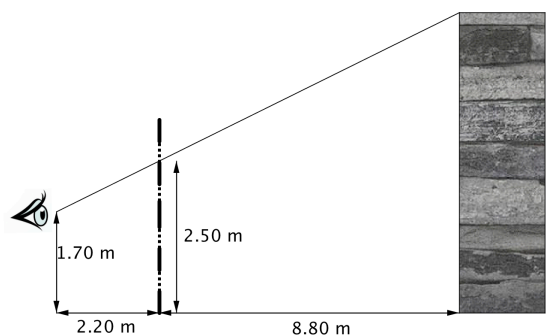


Beispiel 25 Mauer

Wie hoch ist die Mauer?

Hinweis Hilfslinie einzeichnen.

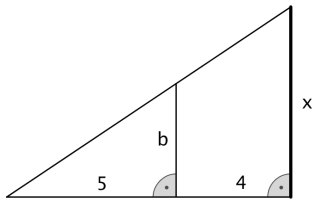
Das Einzeichnen einer Hilfslinie ist eine wichtige Strategie!



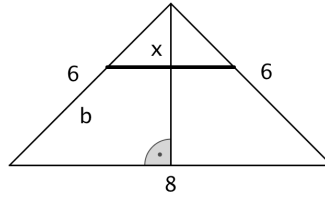
Beispiel 26

Drücken Sie die gesuchte Grösse x in Abhängigkeit von b aus.

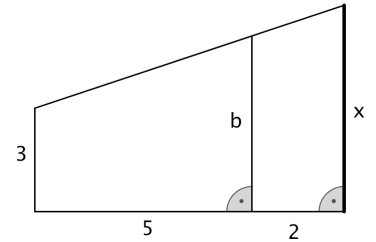
a) Stäbe...



b) Dach...



c) Trapez...



Beispiel 27 „Zeige!“

Hinweis bei „Zeige“-Aufgaben:

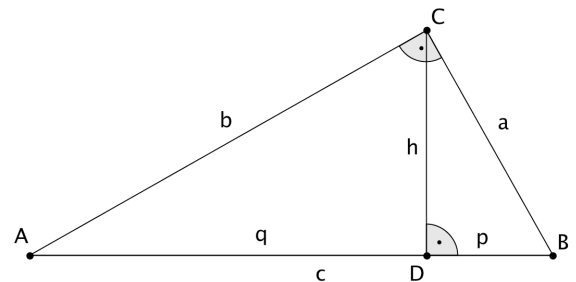
Suchen Sie ähnliche (Teil-)Dreiecke, welche die in der Behauptung vorkommenden Grössen als Seiten enthalten.

a) Höhensatz

Der sogenannte “Höhensatz” für ein rechtwinkliges Dreieck ABC lautet:

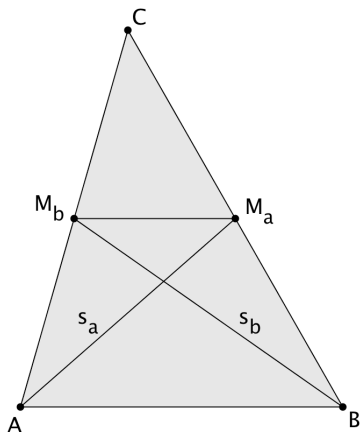
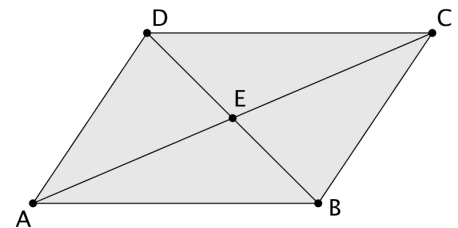
$$h^2 = p \cdot q$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung richtig ist!



b) Zeigen Sie: in einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.

Hinweis Zeigen Sie, dass gilt: $AE = EC$.



c) Seitenhalbierende (Schwerpunkt)

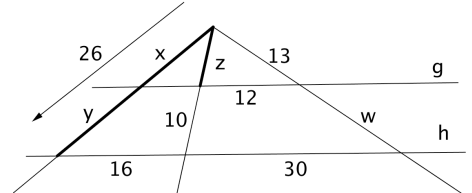
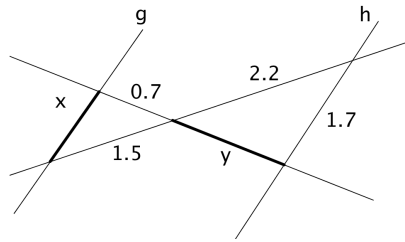
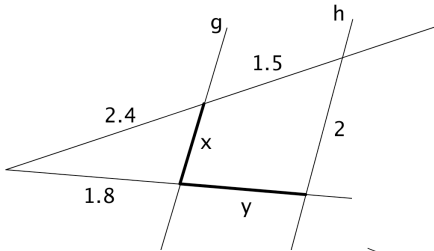
Zeigen Sie mit Hilfe der Ähnlichkeit, dass sich in einem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilen.

Hinweis Zeigen Sie zuerst, dass gilt: $\frac{M_b M_a}{AB} = \frac{1}{2}$.

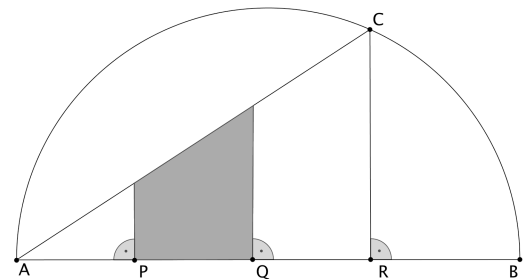
Die folgenden Aufgaben sind anspruchsvoll. Versuchen Sie es trotzdem. Sie sind ja auch anspruchsvoll.

Beispiel 28 unbekannte Größen

a) Es ist jeweils $g \parallel h$. Berechnen Sie die Längen x und y bzw. x, y, w und z .

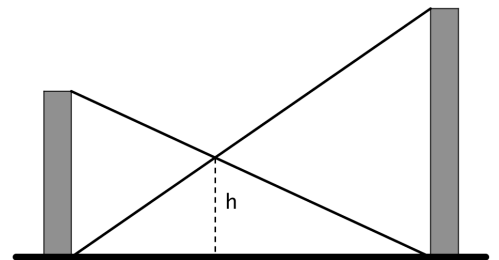


b) Wie gross ist der Flächeninhalt des schraffierten Trapezes, wenn der Kreisradius 45 cm misst und zudem $AC = 72$ und $AP = PQ = QR$ ist?



Beispiel 29 Herausforderung (evergreen)

a) Zwei Pfähle mit den Höhen 2m und 3 m ... hmmm?
Jede Pfahlspitze ist mit dem Fuss des anderen Pfahles durch ein gespanntes Seil verbunden.
Auf welcher Höhe h treffen sich die Seile?



b) Bei der Berechnung in a) wurde der tatsächliche Abstand der beiden Stäbe nicht benötigt. Was bedeutet dies?

Beispiel 30 Höhensatz

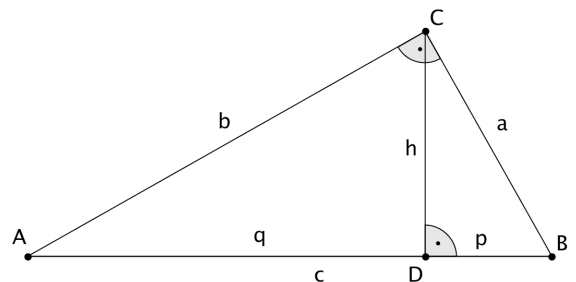
Der sogenannte "Höhensatz" für ein rechtwinkliges Dreieck ABC lautet:

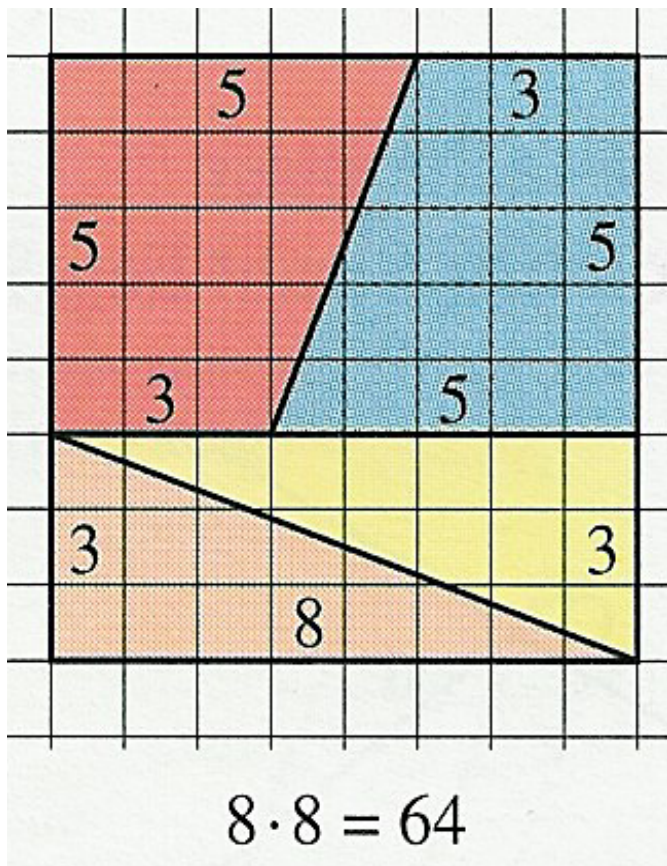
$$h^2 = p \cdot q$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung richtig ist **mit Hilfe**

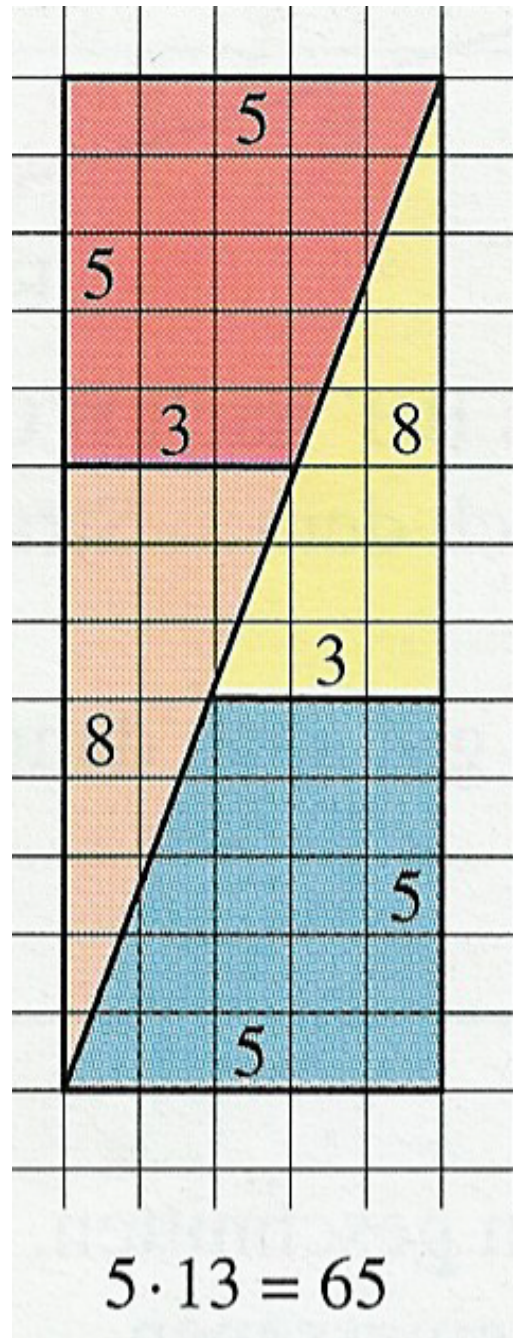
- **der Ähnlichkeit.**
- **des Pythagoras.**

... und ein **Rätsel** zum Schluss...





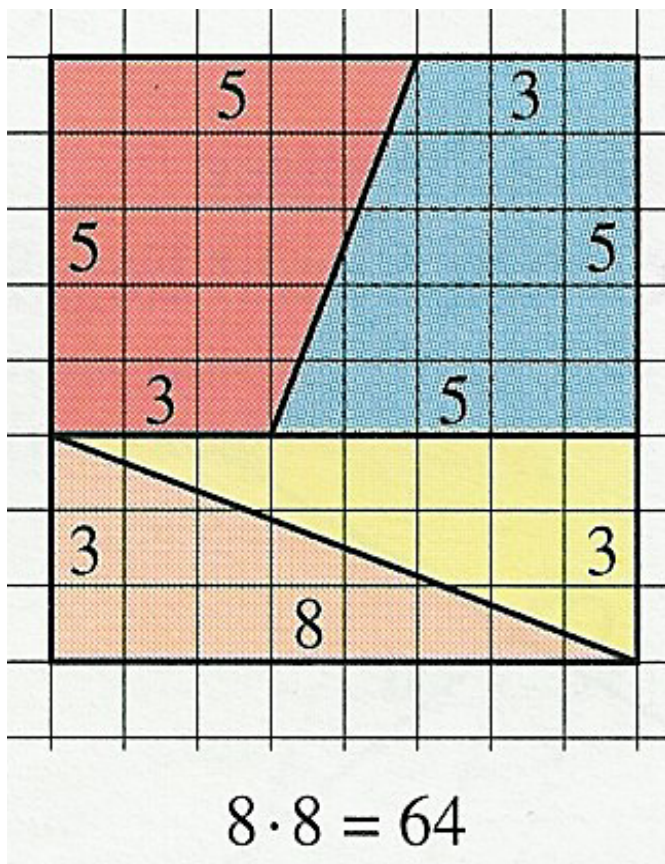
... ist $64 = 65$?



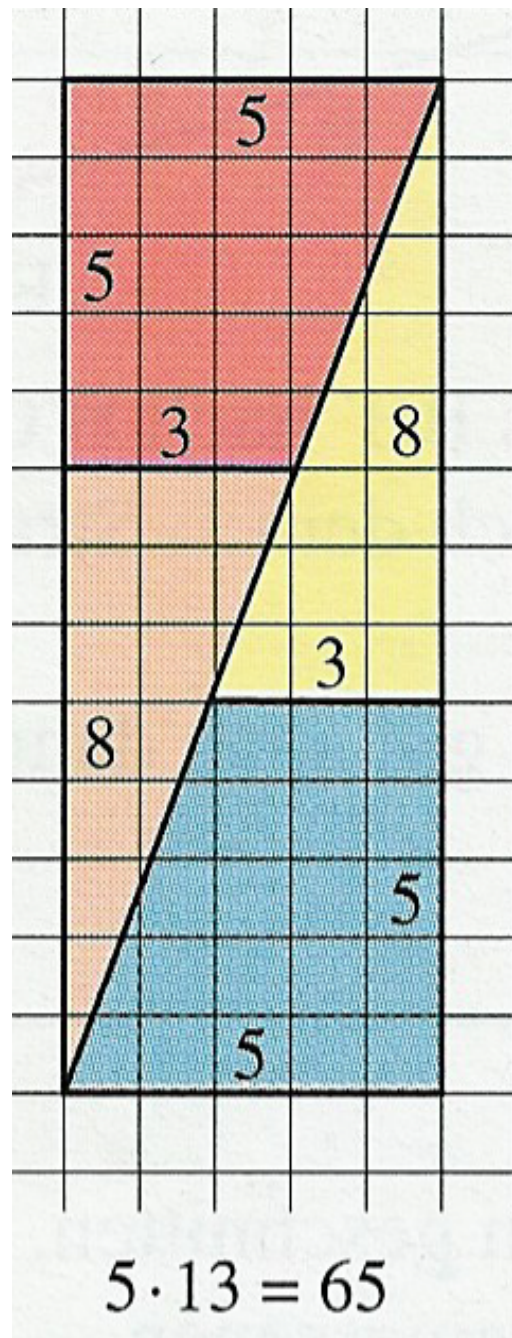
... und wenn Sie es nicht glauben:

- Figuren auf ein Papier zeichnen!
- Ausschneiden!
- Legen!

... und ein **Rätsel** zum Schluss...



... ist $64 = 65$?

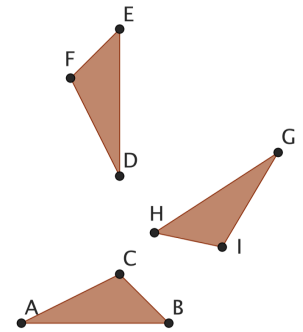


... und wenn Sie es nicht glauben:

- Figuren auf ein Papier zeichnen!
- Ausschneiden!
- Legen!

Anhang 1 Kongruenzsätze

Dreiecke mit gleicher Form und gleicher Grösse sind „deckungsgleich“ d.h.: wir könnten sie übereinander legen. „Deckungsgleiche“ Dreiecke nennen wir *kongruent*.



kongruente Dreiecke

Die Frage ist: Wann sind zwei Dreiecke kongruent?

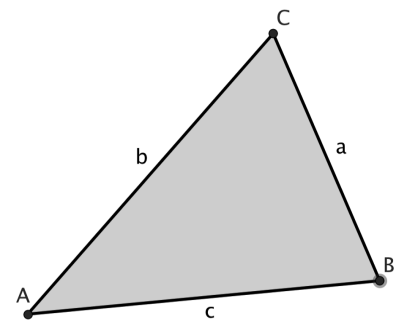
Darüber geben die sogenannten *Kongruenzsätze* Auskunft!



Ziel Sie finden selber möglichst viele Kongruenzsätze und können diese begründen!

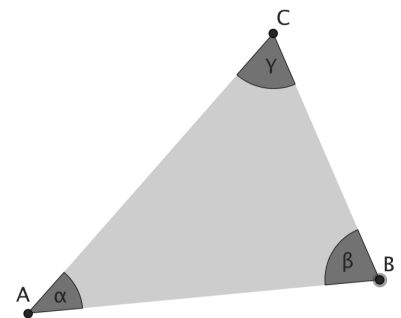
Aufgabe 1 Kongruenzsatz sss

- Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit den Seiten $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$.
- Konstruieren Sie neben dem Dreieck ABC noch ein Dreieck DEF mit den Seiten $d = 6 \text{ cm}$, $e = 4 \text{ cm}$, $f = 5 \text{ cm}$.
- Sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ kongruent? Warum? Wie heisst der zugehörige Kongruenzsatz?



Aufgabe 2 Kongruenzsatz www?

- Konstruieren Sie ein $\triangle ABC$ mit den Winkeln: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = \dots^\circ$.
- Konstruieren Sie neben dem $\triangle ABC$ noch ein $\triangle DEF$ mit den Winkeln: $\delta = 40^\circ$, $\varepsilon = 60^\circ$, $\varphi = \dots^\circ$.
- Sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ kongruent? Warum?



Aus Aufgabe 1 und 2 ergibt sich

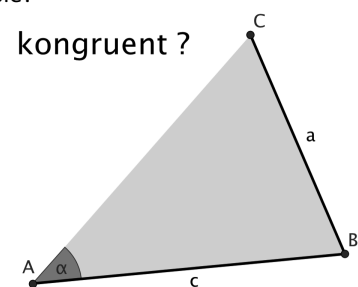
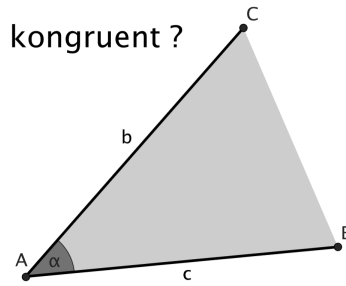
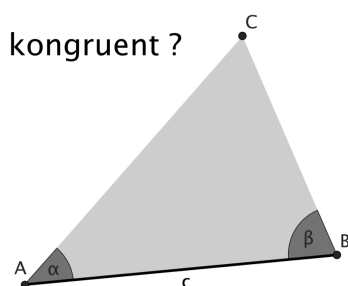
Dreiecke sind kongruent genau dann, wenn wir nur EINE Möglichkeit haben, sie zu konstruieren!

Aufgabe 3 weitere Kongruenzsätze

In Aufgabe 1 haben wir einen Kongruenzsatz „entdeckt“, nämlich:
Zwei Dreiecke sind kongruent genau dann, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.
 In Kurzform lautet er: **Seite-Seite-Seite** oder **sss**.

In Aufgabe 2 haben wir gesehen. Es gibt *keinen* Kongruenzsatz **www**.

Aber es gibt noch weitere Kongruenzsätze! Suchen Sie sie, begründen Sie sie!



Anhang 2 Pythagoras und die irrationalen Zahlen

PYTHAGORAS gründete um 530 v. Chr. in Kroton (griechische Kolonie, heutiges Süditalien) einen **Geheimbund**. Mit seinen Pythagoreern pflegte er einen Kult, der Zahlen als das wahre Wesen der Dinge sah; sie waren Ausdruck kosmischer Mystik und der Schlüssel, um zu den letzten Wahrheiten zu gelangen. Die Pythagoreer glaubten, alle Zahlen seien entweder ganz oder Brüche, die man durch Division der ganzen Zahlen gewinnt (zB. $1/2$, $17/180$). Die meisten kennen Pythagoras wegen seines berühmten Satzes:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Und es kam der Tag, an dem die Pythagoreer die Rechnung mit einem Dreieck machten, dessen beide Katheten gleich lang waren, also die Seiten eines Quadrates mit der Diagonalen als Hypotenuse.

So sehr sich der Klub bemühte, zu solchen ganzzahligen Katheten liess sich für die Hypotenuse weder eine ganze Zahl noch ein Bruch finden. Das Elend fing bereits bei 1 an: 1 im Quadrat plus 1 im Quadrat ist gleich 2 - und keine Chance, einen Bruch zu finden, dessen Quadrat 2 war...

Heute wissen wir, dass die Zahlenwelt der Pythagoreer nur die **rationalen** Zahlen umfasste.

Aber zwischen zwei noch so nahe beieinanderliegenden Brüchen liegen unendlich viele „**irrationale**“ Zahlen, wie jene vertrackte Quadratwurzel 2, welche die Diagonale des Quadrates mit Seitenlänge 1 ist.

Die grässliche Entdeckung erschütterte die Pythagoreer; ihr Glaube an die Allmacht der Zahlen war in Frage gestellt. Wenn sie schon etwas so Simples wie die Diagonale eines Quadrates rechnerisch nicht in den Griff bekamen, verlor die ganze Zahlenreligion ihren Glanz.

Ein tiefer Riss entstand auch zwischen Geometrie und Arithmetik, weil plötzlich ein trivialer geometrischer Sachverhalt rechnerisch nicht mehr fassbar schien.

Die Überlieferung will wissen, dass die Pythagoreer die Entdeckung der irrationalen Zahlen geheim hielten, um die Richtigkeit ihrer Lehre dem Schein nach zu wahren. Als einer aus der Bruderschaft den Frevel begangen habe, die Wahrheit doch zu verbreiten, sei er ertränkt worden...



Was ist eine irrationale Zahl?

Aufgabe 1

a) Rechnen Sie um in einen Dezimalbruch: $\frac{1}{8}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{29}{22}$; $\frac{1}{6}$, ...

b) Rechnen Sie um in einen gewöhnlichen Bruch: $0.7\overline{6}$; $1.34\overline{}$; $0.69\overline{}$; $1.127\overline{}$; $0.2369\overline{}$

c) Ist $0.\overline{9} = 1$?

Aufgabe 2

a) Lässt sich $\sqrt{2}$ tatsächlich *nicht* als Quotient $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$) schreiben? Kann man das „beweisen“?

b) Neben „nicht-aufgehenden“ Wurzeln ist Ihnen eine weitere irrationale Zahl begegnet. Welche?

c) Was ist der Unterschied zwischen den irrationalen Zahlen und den reellen Zahlen?

d) Immer weiter:

- Gibt es mehr natürliche Zahlen als rationale Zahlen? Und was ist mit den irrationalen Zahlen?
- Und: gibt es eigentlich noch weitere Zahlen?

Anhang 3 Quadratwurzeln – Definition



Definition

Die Quadratwurzel \sqrt{a} einer positiven Zahl a ist **diejenige positive Zahl, deren Quadrat a ist**.

Zusatz: Die Wurzel aus 0 ist gleich 0: $\sqrt{0} = 0$.

Aufgabe 1 Berechne im Kopf

a) $\sqrt{36} =$

b) $\sqrt{40\,000} =$

c) $\sqrt{0.01} =$

d) $\sqrt{10^6} =$

e) $\sqrt{\frac{81}{4}} =$

f) $\sqrt{\frac{1}{10^8}} =$

g) $\sqrt{1.21} =$

h) $\sqrt{x^4} =$

Aufgabe 2 Richtig oder falsch?

a) $\sqrt{25} = -5$ richtig/falsch

b) $\sqrt{25} = 5$ richtig/falsch

c) $-\sqrt{25} = -5$ richtig/falsch

d) $\sqrt{-25} = -5$ richtig/falsch

e) $(-\sqrt{7})^2 = -7$ richtig/falsch

f) $(-\sqrt{7})^2 = 7$ richtig/falsch

Aufgabe 3 Bringe auf die einfachste Form

a) $\sqrt{1.5^2} =$

b) $\sqrt{\frac{2^4}{7}} =$

c) $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) =$

d) $(4 + 3\sqrt{7})^2 =$

e) $(\sqrt{67} - 8)(\sqrt{67} + 8) =$

f) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) =$

Aufgabe 4 Erweitere so, dass der Nenner wurzelfrei ist.

a) $\frac{9}{\sqrt{6}} =$

b) $\frac{10}{2\sqrt{3}} =$

c) $\frac{\sqrt{2+3}}{4\sqrt{2}} =$

d) $\frac{3}{7\sqrt{x}} =$



Wurzelgesetze $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Formuliere in Worten und begründe!

Aufgabe 5 Vereinfache

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$

b) $\sqrt{400} =$

c) $\sqrt{25 \cdot 10^4} =$

d) $\sqrt{\frac{7}{8}} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}} =$

e) $\sqrt{8.1 \cdot 10^9} =$

f) $\sqrt{49 \cdot 8^2} =$

g) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} =$

h) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{8}} =$

Aufgabe 6 **Forme so um, dass nur noch Wurzeln aus ganzen Zahlen vorkommen und der Nenner wurzelfrei wird.**

a) $\sqrt{\frac{3}{5}} =$

b) $\sqrt{\frac{2}{11}} =$

c) $\sqrt{4 + \frac{4}{9}} =$

d) $\sqrt{1 - \frac{3}{5}} =$

Aufgabe 7 Radiziere (= ziehe die Wurzel) teilweise

a) $\sqrt{32} =$

b) $-\sqrt{45} =$

c) $2\sqrt{75} =$

d) $-\sqrt{2000} =$

e) $\sqrt{2.5 \cdot 10^6} =$

f) $\sqrt{3x^2} =$

g) $\sqrt{a^3} =$

h) $\sqrt{12y^2} =$

i) $\sqrt{x^2y + x^2z} =$

j) $\sqrt{3a^2 + 6ab + 3b^2} =$

k) $\sqrt{\frac{3x^2}{4}} =$

l) $\sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} =$

Aufgabe 8 Vereinfache, falls möglich

a) $\sqrt{8} + \sqrt{12x^2} + \sqrt{18} + \sqrt{48} \cdot x - \sqrt{72} - \sqrt{108x^2} =$

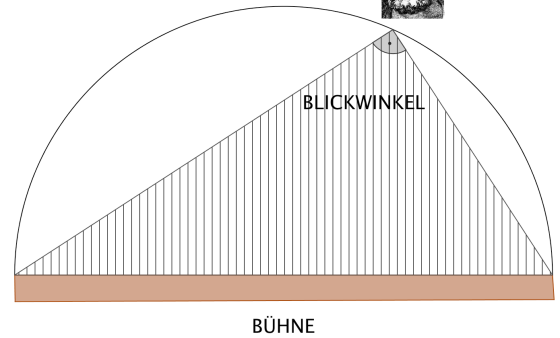
b) $\sqrt{a^2 + 9b^2} =$

c) $\sqrt{x^2 + 9y^2 + 6xy} =$

Anhang 4 Verallgemeinerung von Thales (Peripheriewinkelsatz)



Thales sitzt auf der Theatertribüne. Sein Blick-Winkel auf die Bühne beträgt 90° , denn er sitzt auf dem Thaleskreis. Wo müsste er sitzen, damit sein Blickwinkel z.B. 60° betragen würde?
(Die Ansicht ist stets von oben.)



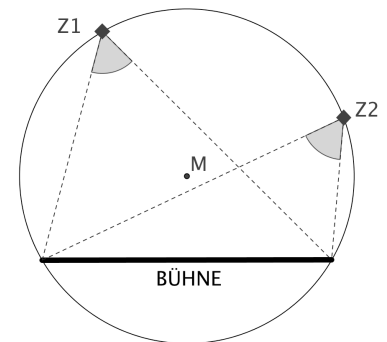
Aufgabe 1 Blickwinkel

Zeichnen Sie einen Kreis, nicht zu klein. „Verschieben“ Sie die Bühne nach „unten“.

Unter welchem Winkel sehen Ihre Zuschauer Z1 und Z2 die Bühne?

- Sind die Winkel in Z1 und Z2 gleich gross?
- Was passiert mit den Winkeln, wenn man die Bühne verschiebt?

Messen Sie! Experimentieren Sie!



Aufgabe 2* Verallgemeinerung des Thales (Peripheriewinkelsatz)

Es gilt der folgende Satz:

Alle zu einer Kreissehne gehörenden Peripheriewinkel γ auf derselben Seite der Sehne sind gleich gross.

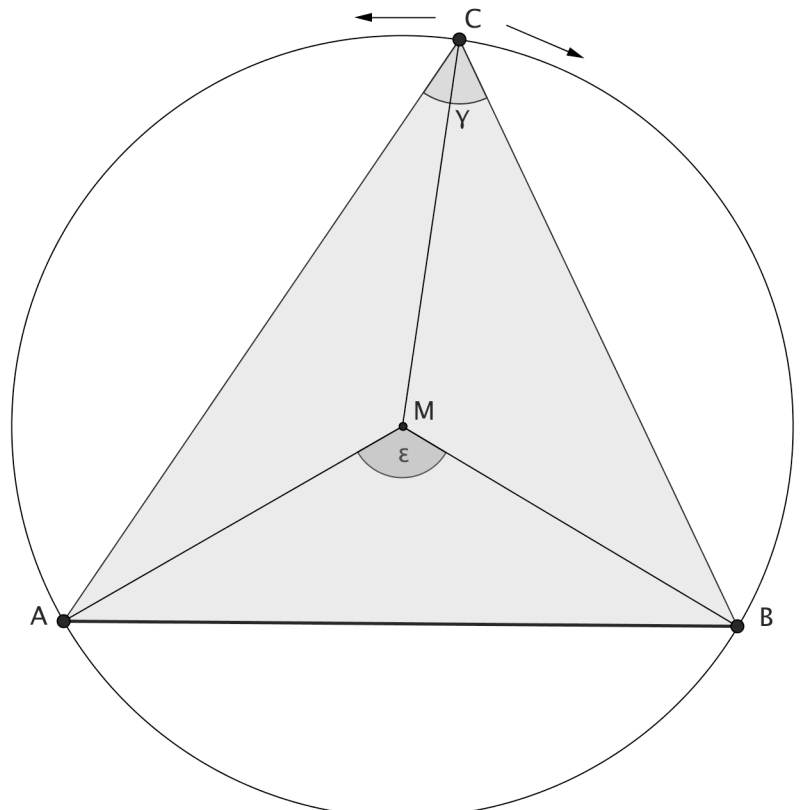
(„Bühnenversion“: Die Zuschauer Z1 und Z2 sehen die Bühne unter demselben Winkel.)

Begründen Sie den Satz.

Hinweis

- Vorgehen wie bei Thales (siehe Abbildung)
- Wo liegen gleichschenklige Dreiecke?
- Versuchen Sie zu zeigen:

$$\gamma = \frac{1}{2} \varepsilon$$



Der Beweis sagt uns also sogar noch mehr:

Der Peripheriewinkel γ ist gerade halb so gross wie der Mittelpunktswinkel ε .

Aufgabe 3 Grundkonstruktion

Zeichnen Sie eine Strecke (10 cm). Wo liegen alle Punkte, von der aus die Strecke unter einem Winkel von 70° gesehen wird?

Hinweis Berechnen Sie zuerst, wie gross der Mittelpunktswinkel ε ist. Wo liegt jetzt M?

Aufgabe 4 Zuschauerränge

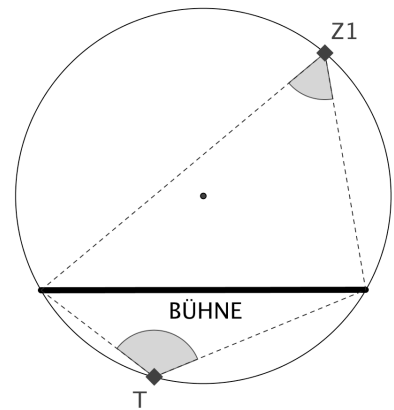
Zeichnen Sie eine Bühne, nicht zu klein, und alle Zuschauerränge, von denen man die Bühne unter einem Blickwinkel von

- a) genau 60° sieht
- b) mindestens 60° sieht
- c) eigenes Beispiel!

Aufgabe 5 hinter der Bühne

a) Ein Techniker T steht hinter der Bühne. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den eingezeichneten Winkeln? Zeichnen Sie und messen Sie!

b) Begründen Sie diesen Zusammenhang aus a).



Aufgabe 6 OpenAir

Zeichnen Sie – im Massstab 1:100 – eine Bühne (10 m).

Zeichnen Sie den Zuschauerbereich an, der folgende Eigenschaften haben soll:

- Blickwinkel mindestens 60° und höchstens 110°
- kein Zuschauer ist, aus Sicherheitsgründen, näher als 2 m an der Bühne
- 2.5 m von der Bühne entfernt steht in der Mitte das Mischpult. Auch zum Mischpult beträgt der Sicherheitsabstand 2m

