Datum Name

Gleichungen

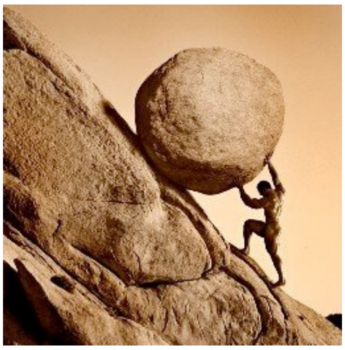
Raten oder Strategie?
Lineare Gleichungssysteme
Quadratische Gleichungen

Die Mutter ist 21 Jahre älter als ihr Kind. In 6 Jahren wird das Kind 5-mal jünger sein als die Mutter.

Frage *Wo ist der Vater?*

Sisyphus muss jeden Tag einen schweren Stein einen Berg nach oben schieben. Am ersten Tag braucht er für den Weg hoch und zum Fuss des Berges zurück insgesamt 7 Stunden. An den folgenden Tagen geht er jeden Tag aufwärts halb so schnell wie am Tag zuvor, läuft abwärts jedoch doppelt so schnell. Angenommen, er braucht am zweiten Tag insgesamt 8 Stunden...

Frage *Wie viele Stunden braucht er dann am dritten Tag?*



Sisyphus ist ein Held der griechischen Mythologie; er gilt als der verschlagenste aller Menschen und trickste auch immer wieder die Götter aus.
Sisyphus' Strafe in der Unterwelt bestand darin, einen Felsblock einen steilen Hang hinaufzurollen.
Kurz bevor er das Ende des Hangs erreichte, entglitt ihm der Stein, und er musste wieder von vorne anfangen…
Heute nennt man deshalb Aufgaben, die trotz grosser Mühen so gut wie nie erledigt sein werden, "Sisyphusarbeit".

Inhalt

Eine ganz berühmte Gleichung. Kennen Sie sie?

0 Raten oder Strategie?

Versuchen Sie die folgenden Probleme zu lösen. Bei einigen hilft geschicktes Raten, bei anderen eine gute Strategie. Vielleicht können Sie eine gar nicht lösen. Aber geben Sie Ihr Bestes!

Problem 1

a) In einer Klasse mit 24 SchülerInnen hat es 4 Frauen mehr als Männer. Wie viele Frauen und wie viele Männer sind es?

b) Die Summe zweier Zahlen beträgt 12 und ihre Differenz 3. Welche sind es?

Problem 2

2 Weggli und 4 Schoggistängeli kosten zusammen 6.40 Fr. 4 Weggli und 2 Schoggistängeli kosten 5.60 Fr. Wie teuer ist ein Weggli und wie teuer ist ein Schoggistängeli?

Problem 3

a) Am Anfang des Schuljahres schütteln sich im Innenhof die Personen vom Hausdienst gegenseitig die Hände. Es wird 15-mal „geschüttelt“. Wie viele Personen hat der Hausdienst?

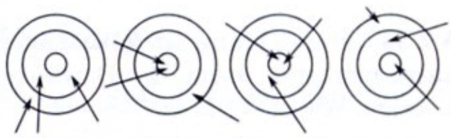
b) Auch im Klassenzimmer wird gegenseitig geschüttelt. Diesmal insgesamt 325-mal...

Problem 4

Gibt es ein Rechteck mit einem Umfang von 20 cm und einer Fläche von 20 cm^2?

Problem 5

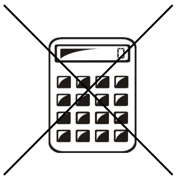
Beim Bogenschiessen erzielten Klaus 29, Kate 43 und Konrad 47 Punkte.
Wie viele erreichte Katrin?



Lösungen

Problem 1 ***a)*** *14 Frauen; 10 Männer* ***b)*** *1. Zahl: 7.5; 2. Zahl: 4.5*
Problem 2 *Weggli: 0.80 Fr; Schoggistängeli: 1.20 Fr*
Problem 3 ***a)*** *6 Personen Hausdienst* ***b)*** *26 SchülerInnen*
Problem 4 *Ja; Länge: (5 + $\sqrt{5}$) cm; Breite: (5 – $\sqrt{5}$) cm*
Problem 5 *Katrin: 36 Punkte*

1 lineare Gleichungssysteme



Einsetzungsverfahren zum Lösen von Gleichungssystemen

2×2 Gleichungssysteme (2 Unbekannte, 2 Gleichungen)

Lösen Sie die Aufgaben in Ihr Heft! *Konzentration* und *saubere* Darstellung!

Aufgabe 1

$$\left|\begin{array}{l} x - 2y = 12 \\ 4x + y = 3 \end{array}\right.$$

Aufgabe 2

$$\left|\begin{array}{r} 4x + y = 1 \\ 6x + 3y = 6 \end{array}\right.$$

Aufgabe 3

$$\left|\begin{array}{l} 3a - 3b = 0 \\ 3a + 3b = 12 \end{array}\right.$$

Aufgabe 4

$$\left|\begin{array}{r} 6s = 4t \\ 2s + 2t = 3 - 4s \end{array}\right.$$

Aufgabe 5

$$\left|\begin{array}{r} 4x - 7y = -3 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Aufgabe 6

$$\left|\begin{array}{l} 6(x - 3) = -2y - 42 \\ 4y - 5x = 10y + 7 \end{array}\right.$$

Aufgabe 7

$$\left|\begin{array}{r} 5x + 2y - 9 = 14y - 4x + 6 \\ (x + 4)(y + 1) = (x + 8)(y - 7) \end{array}\right.$$

Aufgabe 8

$$\left|\begin{array}{l} \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}x = \frac{20}{3} \\ -y = \frac{-68}{5} - \frac{8x}{5} \end{array}\right.$$

Aufgabe 9

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = -2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Aufgabe 10

$$\left|\begin{array}{l} 0.2x_1 + 0.6x_2 = 2 \\ 0.3x_1 + 0.8x_2 = 1 \end{array}\right.$$

Aufgabe 11

$$\left|\begin{array}{l} 4x + y = 2a \\ 10x + 5y = 0 \end{array}\right.$$

Aufgabe 12

$$\left|\begin{array}{l} \frac{5x}{a} + 4y = a \\ 2x + 2ay = 0 \end{array}\right.$$

Anzahl Richtige
____ / 12

Lösungen

Aufgabe 1
$x = 2$; $y = -5$

Aufgabe 2
$x = -0.5$; $y = 3$

Aufgabe 3
$a = 2$; $b = 2$

Aufgabe 4
$s = 1/3$; $t = ½$

Aufgabe 5
$x = -2$; $y = -5/7$

Aufgabe 6
$x_1 = -50$; $x_2 = 20$

Aufgabe 7
$x = -5$; $y = 3$

Aufgabe 8
$x = -13$; $y = -11$

Aufgabe 9
$x = -3$; $y = 5$

Aufgabe 10
$x = -1$; $y = 12$

Aufgabe 11
$x = a$; $y = -2a$

Aufgabe 12
$x = a^2$; $y = -a$

3×3 Gleichungssysteme (3 Unbekannte, 3 Gleichungen)

Lösen Sie die Aufgaben in Ihr Heft! *Konzentration* und *saubere* Darstellung!

Aufgabe 1

$$\left|\begin{array}{l} 3x - y + 5z = 23 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ 5x + y + 2z = 14 \end{array}\right.$$

Aufgabe 2

$$\left|\begin{array}{l} x \quad - \quad z = -8 \\ 2x \quad - \quad z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{array}\right.$$

Aufgabe 3

$$\left|\begin{array}{l} 2x \quad + \quad z = 3 \\ x - 6y - 2z = 14 \\ 5x + 4y + 3z = 5 \end{array}\right.$$

Aufgabe 4

$$\left|\begin{array}{l} x = y + \frac{z}{3} \\ y = z + \frac{x}{3} \\ z = 10 + \frac{y}{3} \end{array}\right.$$

Aufgabe 5

$$\left|\begin{array}{l} 3r - 2s + 5t = 23 \\ 4r + 8s - 2t = -6 \\ 5r + 2s = 14 - 2t \end{array}\right.$$

Aufgabe 6

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{array}\right.$$

Es ist nun klar, wie ein lineares Gleichungssystem mit 10 Gleichungen (!) und 10 Unbekannten zu lösen ist:
Man löst eine Gleichung nach einer Unbekannten auf und setzt das Ergebnis in den anderen 9 Gleichungen ein.
Dadurch entsteht ein lineares System mit 9 Gleichungen und 9 Unbekannten.
Dieses führt man auf ein System mit 8 Gleichungen und 8 Unbekannten zurück und so fort, bis nur noch eine einzige Gleichung mit einer einzigen Unbekannten übrig bleibt.
Diese Gleichung wird gelöst, und eine Unbekannte bestimmt.
Nun berechnet man rückwärts eine Unbekannte um die andere... (Dominoeffekt!).

Aufgabe 7

Bestimmen Sie a und b so, dass das System die Lösung $x = 4$ und $y = -4$ besitzt.

$$\left|\begin{array}{l} x + ay = 1 \\ bx + 2y = 4 \end{array}\right.$$

Anzahl Richtige
____ / 7

Lösungen

Aufgabe 1

$x = 2$; $y = -2$; $z = 3$

Aufgabe 2

$x = 8$; $y = -21$; $z = 16$

Aufgabe 3

$x = 4$; $y = 0$; $z = -5$

Aufgabe 4

$x = 45$; $y = 37.5$; $z = 22.5$

Aufgabe 5

$r = 2$; $s = -1$; $t = 3$

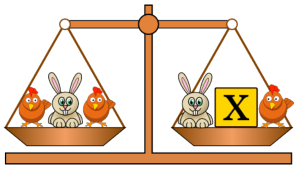
Aufgabe 6

$x_1 = 2$; $x_2 = 0,5$; $x_3 = 2$; $x_4 = -0.5$

Aufgabe 7

$a = 0.75$; $b = 3$

Textaufgaben



Zahlenrätsel

Aufgabe 1

Wie heissen die zwei Zahlen, welche die die folgenden Eigenschaften haben?

- Das Vierfache der Grösseren ist um 45 grösser als das Dreifache der Kleineren
- Die Summe der beiden Zahlen ist gleich dem Doppelten ihrer Differenz

Aufgabe 2

Gesucht sind drei Zahlen, sodass sich die Summen 10 bzw. 11 bzw. 12 ergeben, wenn man je zwei von ihnen zusammenzählt.

Geometrie

Aufgabe 3

Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 35 cm. Die Basis ist um 5.5 cm kürzer als jeder Schenkel. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

Aufgabe 4

Die eine Seite eines Rechtecks ist doppelt so lang wie die andere. Verlängert man die kürzere Seite um 2 cm und verkürzt die längere um 3 cm, so entsteht ein Rechteck, das denselben Flächeninhalt hat wie das ursprüngliche. Wie lang waren die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?

Alter / Familie

Aufgabe 5

a) Ein Vater ist 28 Jahre älter als sein Sohn. In 9 Jahren wird der Vater dreimal so alt sein wie sein Sohn. Wie alt sind sie jetzt?

b) Vor 5 Jahren war die Mutter fünfmal so alt wie die Tochter. In drei Jahren wird sie dreimal so alt sein wie die Tochter. Wie alt sind die beiden in 10 Jahren?

Aufgabe 6

a) Die Grossmutter, der Fernseher, der Papagei und die Raviolibüchse bringen es zusammen auf stolze 101 Jahre. Die Grossmutter steuert dazu 60 Jahre mehr bei als Fernseher und Papagei zusammen, und ist schon viermal so alt wie die beiden. Zu sagen ist noch: der Fernseher ist schon zehnmal so alt wie die Raviolibüchse. Eine Raviolibüchse ist sicher 3 Jahre haltbar.
Soll die Grossmutter, hungrig vom fern sehen, die Raviolibüchse essen oder doch besser den Papagei?

b) Der Familienbetrieb *„Bergbahnen Müller&Töchter“* verlangt für *Berg- und Talfahrt* zusammen 30 Fr., für die *Bergfahrt* allein 22.50 Fr. und für die *Talfahrt* allein 15 Fr.
An einem heiligen Sonntag fuhren im ganzen 680 Personen hinauf und 520 hinab.
Die Tageseinnahmen betrugen insgesamt 19’650 Fr. Wie viele Billette jeder Art wurden gelöst?

Lösungen

Aufgabe 1

Grössere Zahl: 15; Kleinere Zahl: 5

Aufgabe 2

Zahlen: 4.5; 5.5; 6.5

Aufgabe 3

Schenkel: 13.5 cm; Basis: 8.0 cm

Aufgabe 4

Seiten: 12 cm; 6 cm

Aufgabe 5

***a)** Vater: 33 Jahre; Sohn: 5 Jahre;*
***b)** Mutter: 55 Jahre; Tochter: 23 Jahre*

Aufgabe 6

***a)** Ravioli (1 Jahr alt)*
***b)** B&T fahrt: 460; B: 220; T: 60*

2 Quadratische Gleichungen

Lernaufgabe, Lösungsformel für quadratische Gleichungen entdecken

Im Folgenden sind 18 quadratische Gleichungen aufgeführt. Lösen Sie alle diese Gleichungen der Reihe nach, eine nach der anderen.
Bleiben Sie bei einer Gleichung stecken, so schauen Sie sich noch einmal die *vorangehende (!)* Gleichung an und überlegen Sie sich, was jetzt *anders* ist.

„In der Lösung eines jeden Problems steckt etwas von einer Entdeckung. Wenn eine Aufgabe dein Interesse weckt, wenn deine Erfindungsgabe angeregt wird und du die Aufgabe aus dir heraus löst, so wirst du die Spannung und den Triumph eines Entdeckers erfahren.“ (G.Polya 1887-1985)

Lösen Sie die Aufgabe sauber in Ihr Heft!!

a) $x^2 = 4$

b) $x^2 = \frac{4}{9}$

c) $x^2 = 5$

d) $(x-1)^2 = 4$

e) $(x+1)^2 = 5$

f) $x^2 + 2x + 1 = 6$

g) $x^2 + 2x = 5$

h) $x^2 + 6x = 27$

i) $x^2 - 6x = 27$

j) $x^2 - 3x = \frac{27}{4}$

k) $x^2 - 3x - \frac{27}{4} = 0$

l) $x^2 + 6x - 5 = 0$

m) $2x^2 + 12x - 10 = 0$

n) $2x^2 + 4x - 16 = 0$

o) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6} = 0$

p) $x^2 + 2px + q = 0$

q) $2x^2 + bx + c = 0$

r) $ax^2 + bx + c = 0$

Die Lösungen der Aufgabe **r)** sind die Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung! Sie haben also die „**Lösungsformel**“ (Mitternachtsformel), gefunden! Gratulation!

Lösungen

a) $x = \pm 2$

b) $x = \pm \frac{2}{3}$

c) $x = \pm \sqrt{5}$

d) $x = 1 \pm 2$, also $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$

e) $x_1 = -1 + \sqrt{5}$; $x_2 = -1 - \sqrt{5}$

f) $x_1 = -1 + \sqrt{6}$; $x_2 = -1 - \sqrt{6}$

g) $x_1 = -1 + \sqrt{6}$; $x_2 = -1 - \sqrt{6}$

h) $x_1 = 3$; $x_2 = -9$

i) $x_1 = 9$; $x_2 = -3$

j) $x_1 = 4.5$; $x_2 = -1.5$

k) $x_1 = 4{,}5$; $x_2 = -1{,}5$

l) $x_1 = -3 + \sqrt{14}$; $x_2 = -3 - \sqrt{14}$

m) $x_1 = -3 + \sqrt{14}$; $x_2 = -3 - \sqrt{14}$

n) $x_1 = 2$; $x_2 = -4$

o) $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

p) $x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q}$; $x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}$

q) $x_1 = -\frac{b}{4} + \sqrt{\frac{b^2}{16} - \frac{c}{2}}$; $x_2 = -\frac{b}{4} - \sqrt{\frac{b^2}{16} - \frac{c}{2}}$

r) $x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$; $x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$

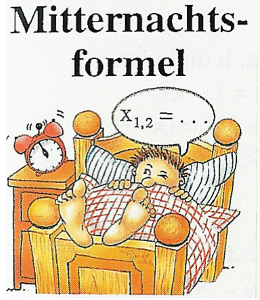
Die Lösung zu r) lässt sich noch einfacher darstellen:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

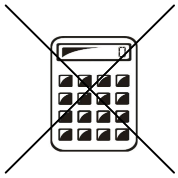
Für x_2 ergibt sich analog: $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

JEDERZEIT AUSWENDIG!!!

Zusammengefasst: $\mathbf{x_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$



Formel zum Lösen von quadratischen Gleichungen



Lösen Sie die Aufgaben in Ihr Heft! *Konzentration* und *saubere* Darstellung!

Aufgabe 1
$4x^2 - 3x - 1 = 0$

Aufgabe 2
$3x^2 + 13x + 4 = 0$

Aufgabe 3
$x^2 - 8x = 9$

Aufgabe 4
$5x + 2 = 3x^2$

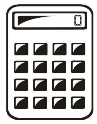
Aufgabe 5
$4y^2 - y - 20 = 3y^2$

Aufgabe 6
$x(3x - 2) = 8$

Aufgabe 7
$\frac{3}{13} z^2 + z + \frac{4}{13} = 0$

Aufgabe 8
$x^2 + 1.5t \cdot x - t^2 = 0$

Die folgenden Gleichungen gehen nicht immer „schön“ auf. Geben Sie die Lösung mit Wurzeln an und vereinfachen Sie soweit wie möglich!
Geben Sie dann mit Hilfe des TR eine Näherung an auf zwei Nachkommastellen.



Aufgabe 9
$4x^2 - 8x - 1 = 0$

Aufgabe 10
$2x^2 - 6x = -2$

Aufgabe 11
$x + 2x^2 = \frac{47}{8}$

Aufgabe 12
$5x^2 = 2x^2 + 12x + 21$

Aufgabe 13
$x^2 + 6x + a = 0$

Aufgabe 14
$x^2 + x + 1 = 0$

Anzahl Richtige
____ / 14

Lösungen

Aufgabe 1
$x_1 = 1;\ x_2 = -1/4$

Aufgabe 2
$x_1 = -1/3;\ x_2 = -4$

Aufgabe 3
$x_1 = 9;\ x_2 = -1$

Aufgabe 4
$x_1 = -1/3;\ x_2 = 2$

Aufgabe 5
$y_1 = 5;\ y_2 = -4$

Aufgabe 6
$x_1 = -4/3;\ x_2 = 2$

Aufgabe 7
$z_1 = -1/3;\ z_2 = -4$

Aufgabe 8
$x_1 = 0.5t;\ x_2 = -2t$

Aufgabe 9
$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$
$x_1 = 2.12;\ x_2 = -0.12$

Aufgabe 10
$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
$x_1 = 2.61;\ x_2 = 0.38$

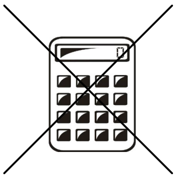
Aufgabe 11
$x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{3}$
$x_1 = 1.48;\ x_2 = -1.98$

Aufgabe 12
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{11}$
$x_1 = 5.32;\ x_2 = -1.32$

Aufgabe 13
$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - a}$

Aufgabe 14
keine Lösung

Quadratische Gleichungen – ohne / mit Lösungsformel



Es gibt quadratischen Gleichungen, die eine sehr einfache Struktur haben und sich deshalb auch „einfach" lösen lassen, das heisst: wir brauchen nicht immer die „komplizierte Lösungsformel".

ohne Formel

Aufgabe 1

a) $x^2 + 4x = 0$ **b)** $x^2 - x = 0$ **c)** $3x^2 + 9x = 0$

d) $-7x^2 = 28x$ **e)** $2x^2 + bx = 0$

Speziell ist: Strategie:

---

ohne Formel

Aufgabe 2

a) $x^2 = 16$ **b)** $x^2 - 144 = 0$ **c)** $x^2 + 9 = 0$

d) $49x^2 - 4900 = 0$ **e)** $x^2 = \frac{64}{121}$

Speziell ist: Strategie:

---

ohne Formel

Aufgabe 3

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$ **b)** $x^2 + 8x + 15 = 0$ **c)** $x^2 - 10x + 24 = 0$

d) $x^2 + 2x = -1$ **e)** $2x^2 + 2 = 4x$

Speziell ist: Strategie:

---

mit Formel

Aufgabe 4

a) $4x^2 + 5x - 6 = 0$ **b)** $2y^2 - y = 6$

Speziell ist: ***nichts*** Strategie: ***Formel***

Anzahl Richtige
____ / 17

Lösungen

Aufgabe 1 ohne Formel

a) *$x_1 = 0$; $x_2 = -4$* ***b)*** *$x_1 = 0$; $x_2 = 1$* ***c)*** *$x_1 = 0$; $x_2 = -3$*

d) *$x_1 = 0$; $x_2 = -4$* ***e)*** *$x_1 = 0$; $x_2 = -b/2$* *speziell: c = 0; Strategie: ausklammern*

Aufgabe 2 ohne Formel

a) *$x_1 = 4$; $x_2 = -4$* ***b)*** *$x_1 = 12$; $x_2 = -12$* ***c)*** *keine Lösung*

d) *$x_{1,2} = \pm 10$* ***e)*** *$x_{1,2} = \pm 8/11$*

speziell: b = 0; Strategie: direkt Wurzel ziehen; sog. ***reinquadratische Gleichungen***

Aufgabe 3 ohne Formel

a) *$x_1 = 2$* ***b)*** *$x_1 = -5$; $x_2 = -3$* ***c)*** *$x_1 = 4$; $x_2 = 6$*

d) *$x_1 = -1$* ***e)*** *$x_1 = 1$* *speziell: Klammeransatz möglich*

Aufgabe 4 mit Formel

a) *$x_1 = 3/4$; $x_2 = -2$* ***b)*** *$y_1 = 2$; $y_2 = -3/2$*

Textaufgaben

Zahlenrätsel

Aufgabe 1

Das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist um 100 größer als die kleinere Zahl.
Wie lauten die Zahlen?

Aufgabe 2

Das Produkt der beiden kleinsten Zahlen von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist dreimal so gross wie die Summe der vier übrigen Zahlen. Wie lautet die kleinste Zahl?

Geometrie

Aufgabe 3

Die Höhe eines Dreiecks, dessen Flächeninhalt 180 cm^2 beträgt, ist um 9 cm kürzer als die zugehörige Grundseite. Wie lang sind die Grundseite und die Höhe des Dreiecks?

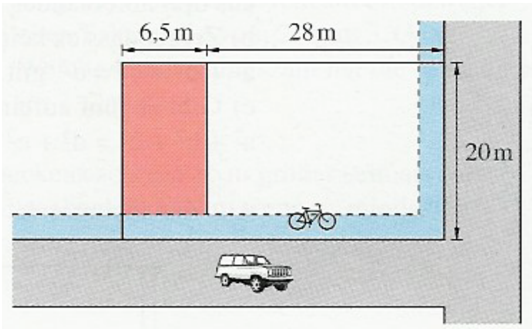
Aufgabe 4

Welches Vieleck hat 35 Diagonalen?
Hinweis *„Handschlagaufgabe".*

andere

Aufgabe 5

Entlang einer Strasse soll ein Veloweg angelegt werden. Dazu müsste die Besitzerin des Eckgrundstücks der Strasse entlang einen Streifen abgeben.
Als Ausgleich ist eine Verlängerung des Grundstückes um bis zu 6.5 m möglich. Wie breit kann der Veloweg höchstens werden?



Aufgabe 6

Eine Klasse fährt ins Lager. Die Fahrkosten von 300 Fr. werden gleichmässig unter den Teilnehmenden aufgeteilt. Da ein Schüler krankheitshalber nicht mitfahren kann, wird es für alle anderen 50 Rp. teurer. Wie viele sind mitgefahren?

Lösungen

Aufgabe 1

10 und 11 oder –10 und –9

Aufgabe 2

14

Aufgabe 3

Grundseite 24 cm, Höhe 15 cm

Aufgabe 4

10-eck (siehe auch nächste Seite!)

Aufgabe 5

höchstens 2.5 m breit

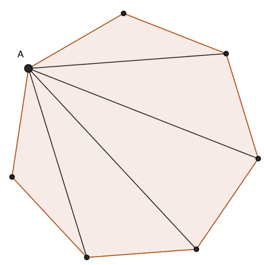
Aufgabe 6

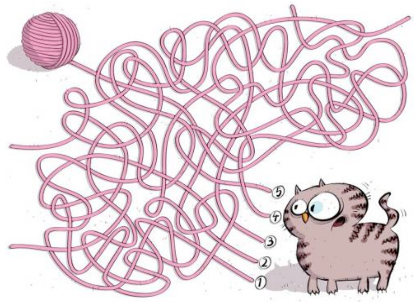
24

Zu Aufgabe 4

Von jeder Ecke eines n-Ecks lassen sich n – 3 Diagonalen ziehen:
nämlich zu jeder anderen Ecke, ausser zur Eckse selbst und nicht zu den beiden Nachbarnecken.
(Im Bild: von der Ecke A aus lassen sich im 7-Ecke genau (7 – 3) = 4 Diagonalen ziehen.)
Insgesamt gibt es bei einem n-Eck also: n·(n – 3) Diagonalen.
Da man so jede Diagonale doppelt zählt, müssen wir noch durch 2 dividieren und erhalten damit die Formel:

Anzahl Diagonalen im n-Eck = $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.





Nicht immer hat alles eine Lösung.

Quadratische Gleichungen – Lösbarkeit – Diskriminante

Aufgabe 1 Anzahl Lösungen

a) Lösen Sie nacheinander die drei folgenden Gleichungen:

$x^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 = 0$ $\qquad$ $x^2 = -1$

b) Lösen Sie nacheinander die drei folgenden Gleichungen:

$x^2 + 2x = 0$ $\qquad$ $x^2 + 2x + 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 2x + 2 = 0$

c) Ein Rechteck besitzt den Umfang 20 cm. Wie gross sind seine Seiten, wenn die Fläche

24 cm^2 $\qquad$ 25 cm^2 $\qquad$ 26 cm^2 $\qquad$ beträgt?

Aufgabe 2 Diskriminante

a) Berechnen Sie die Diskriminante und entscheide, wie viele Lösungen die Gleichung besitzt.

- $2x^2 - 5x + 4 = 0$
- $8 + 4x = -0{,}5x^2$
- $2x^2 = 1000x - 10$
- $x^2 - \pi x + 3 = 0$

b) Herr Bucher behauptet:

„Wenn in der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Zahlenwerte für a und c verschiedene Vorzeichen haben, dann hat die Gleichung immer zwei Lösungen!"

Hat er Recht? Begründen Sie oder zeigen Sie mit einem Beispiel, dass es falsch ist!

c) Für welche Werte von

- c hat die Gleichung $x^2 + x + c = 0$ eine, zwei bzw. keine Lösung?
- b hat die Gleichung $\frac{1}{2}x^2 + bx = -5$ keine Lösung?

Lösungen

Aufgabe 1

a)

- $x^2 = 1$ — *hat zwei Lösungen: $x_{1,2} = \pm 1$*
- $x^2 = 0$ — *hat eine Lösung: $x_1 = 0$*
- $x^2 = -1$ — *hat keine Lösung (man kann aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen!)*

b)

- $x^2 + 2x = 0$ — *hat zwei Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = -2$*
- $x^2 + 2x + 1 = 0$ — *hat eine Lösung: $x_1 = 1$*
- $x^2 + 2x + 2 = 0$ — *hat keine Lösung (man kann aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen!)*

c)

- *4 cm und 6 cm (Rechteck)*
- *beide 5 cm (Quadrat)*
- *keine Lösung; es gibt kein solches Rechteck! Der Flächeninhalt ist zu „gross" für den vorgegebenen Umfang.*

Aufgabe 2

a)
- *Diskriminante $D = b^2 - 4ac = -7$, also keine Lösung*
- *Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 0$, also eine Lösung*
- *$D = \ldots > 0$, zwei Lösungen*
- *$D = \ldots < 0$, keine Lösung*

b) *Die Aussage stimmt.*
Haben a und c verschiedene Vorzeichen, dann ist $b^2 - 4ac > 0$. Weil: b^2 ist sicher positiv (oder allenfalls 0) und $-4ac$ wird sicher positiv, da a oder c ein negatives Vorzeichen haben.

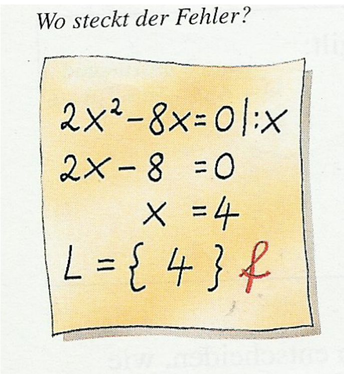
c)
- *$c = \frac{1}{4}$: eine Lösung; $c < \frac{1}{4}$: zwei Lösungen; $c > \frac{1}{4}$: keine Lösung*
- *keine Lösung für $-\sqrt{10} < b < \sqrt{10}$*

Anhang 1a Quadratische Gleichungen – ohne / mit Lösungsformel

- *Lösen Sie die folgenden Gleichungen möglichst elegant!*
- *Überlegen Sie dazu, ob sich die Gleichung eventuell einfacher ohne Lösungsformel lösen lässt.*

Aufgabe 1 **mit oder eleganter ohne... ?**

a) $x^2 - 3x = 0$	**b)** $x^2 + 1.5x = 0$	**c)** $x^2 = 169$
d) $0.5x^2 + 5.5x = 0$	**e)** $0 = 0.2x^2 + x$	**f)** $x^2 = 0$
g) $x^2 = 4x - 4$	**h)** $ax^2 + bx = 0$	**i)** $(x - \pi)(x + 2.3) = 0$
j) $3y - 3.5 = -0.5y^2$	**k)** $z^2 - \frac{4}{9} = 0$	**l)** $5x^2 = -5$
m) $-5x^2 + \frac{1}{80} = 0$	**n)** $x^2 + 6x - 27 = 0$	**o)** $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0$



Anzahl Richtige

____ / 15

Lösungen

a) *$x_1 = 0$; $x_2 = 3$*	***b)*** *$x_1 = 0$; $x_2 = -1.5$*	***c)*** *$x_1 = 13$; $x_2 = -13$*
d) *$x_1 = 0$; $x_2 = -11$*	***e)*** *$x_1 = 0$; $x_2 = -5$*	***f)*** *$x_1 = 0$*
g) *$x_1 = 2$*	***h)*** *$x_1 = 0$; $x_2 = -b/a$*	***i)*** *$x_1 = \pi$; $x_2 = -2.3$*
j) *$y_1 = 1$; $y_2 = -7$*	***k)*** *$z_1 = 2/3$; $z_2 = -2/3$*	***l)*** *keine Lösung*
m) *$x_{1,2} = \pm 1/20$*	***n)*** *$x_1 = -9$; $x_2 = 3$*	***o)*** *$x_1 = 6$; $x_2 = 3/2$*

Anhang 1b Gleichungstypen, die auf quadratischen Gleichungen führen

Aufgabe 1 biquadratische Gleichungen

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 = 5x^2 - 4$

c) $2y^4 + 10y^2 + 12 = 0$

d) $2 = x^4 - x^2$

Aufgabe 2 Bruchgleichungen

Multipliziere zuerst mit dem Hauptnenner. Es entsteht dann eine quadratische Gleichung, die du wie gewohnt auflösen kannst.

a) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} = 3$

b) $x + \frac{3}{2} - \frac{1}{x} = 0$

c) $\frac{9}{x-8} = x$

d) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{9}{5} = \frac{x-2}{x+2}$

Aufgabe 3 zum Überlegen...

a) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, welche die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$ besitzt.
Tipp *Welche Lösungen hat die Gleichung $x(x-3) = 0$?*

b) Geben Sie eine biquadratische Gleichung an, welche die Lösungen $x_{1,2} = \pm 2$ und $x_{3,4} = \pm 5$ besitzt.

c) Wie viele Lösungen kann eine biquadratische Gleichung haben?

Lösungen

Aufgabe 1

a) *$x = \pm 2$, $x = \pm 3$*

b) *$x = \pm 1$, $x = \pm 2$*

c) *keine Lösung*

d) *$x = \pm\sqrt{2}$*

Aufgabe 2

a) *$x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{2}{3}$*

b) *$x_1 = -2$; $x_2 = \frac{1}{2}$*

c) *$x_1 = -1$; $x_2 = 9$*

d) *$x_1 = -\frac{2}{3}$; $x_2 = 3$*

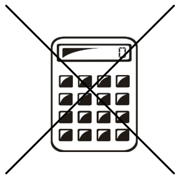
Aufgabe 3

a) *zB $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10 = 0$*

b) *zB $(x^2-4)(x^2-25) = x^4 + 29x^2 + 100 = 0$*

c) *...*

Anhang 2 Weitere Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen



Aufgabe 1 Additionsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} x + y = 13 \\ x - y = -2 \end{array}\right.$$

Aufgabe 2 Additionsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} x + 2y = 17 \\ 3x + 2y = 19 \end{array}\right.$$

Aufgabe 3 Additionsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} 5a + 2b = 12 \\ 25a - 4b = -10 \end{array}\right.$$

Aufgabe 4 Additionsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} 3s + 5t = 21 \\ 4s + 4t = 20 \end{array}\right.$$

Aufgabe 5 Substitutionsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5 \\ \frac{1}{x} - \frac{6}{y} = 1 \end{array}\right.$$

Aufgabe 6 Substitutionsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x_1} + \frac{10}{x_2} = 9 \\ \frac{2}{5x_1} - 7 = \frac{30}{x_2} \end{array}\right.$$

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit einem geeigneten Verfahren.

Aufgabe 7

$$\left|\begin{array}{l} \frac{3}{4x} = 1 - \frac{3}{2y} \\ \frac{5}{2y} - \frac{3}{x} = 4.5 \end{array}\right.$$

Aufgabe 8

$$\left|\begin{array}{l} 14 - 3y - 2x = -2(2x + y) \\ 12 - 3y + 15x = 11x + 3(8 - 2y) \end{array}\right.$$

Aufgabe 9

$$\left|\begin{array}{l} \frac{3}{2x+y} + \frac{3}{y+1} = 2 \\ \frac{1}{2x+y} + \frac{2}{y+1} = 1 \end{array}\right.$$

Aufgabe 10

$$\left|\begin{array}{l} \frac{2x}{a} + \frac{4ay}{3} = -\frac{2}{3} \\ -5x - 2a^2y = 3a \end{array}\right.$$

Lösungen

Aufgabe 1

$x = 5.5$; $y = 7.5$

Aufgabe 2

$x = 1$; $y = 8$

Aufgabe 3

$a = 0.4$; $b = 5$

Aufgabe 4

$s = 2$; $t = 3$

Aufgabe 5

$x = 1/4$; $y = 2$

Aufgabe 6

$x_1 = 1/10$; $x_2 = -10$

Aufgabe 7

$x = -1.5$; $y = 1$

Aufgabe 8

$x = -3$; $y = 8$

Aufgabe 9

$x = 0.5$; $y = 2$

Aufgabe 10

$x = -a$; $y = 1/a$

Anhang 3 Weitere Textaufgaben

Aufgabe 1 Zahlen

a) Die Summe zweier natürlichen Zahlen beträgt 138. Teilt man die grössere durch die kleinere, erhält man 4 mit Rest 3. Wie lauten die Zahlen?

b) Die Differenz zweier natürlichen Zahlen beträgt 24. Ihre Summe ist 10-mal so gross wie der Quotient der grösseren durch die kleinere Zahl. Wie lauten die Zahlen?

c) Eine Zahl ist $\frac{5}{6}$ kleiner als sein Kehrwert. Wie lautet der Quotient?

Aufgabe 2 Alter / Familie

a) Vor 7 Jahren war der Ludwig 6-mal so alt wie sein Stoffhase, in 9 Jahren wird er nur noch doppelt so alt sein. Wie alt ist der Hase, und warum wachsen Hasen so schnell?

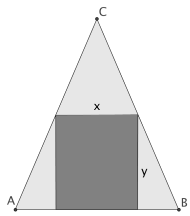
b) Beim Turnier eines Tennisclubs sollte jeder gegen jeden einmal spielen.
Da aber 15 Clubmitglieder lieber der Direktübertragung der Einschulung von Federers Zwillingen zuschauen, gibt es insgesamt 780 Partien weniger.
Wie viele Mitglieder hat der Tennisclub und wie viele Kinder hat Federer?

Aufgabe 3 Geometrie

a) Ein Rechteck ist 3-mal so lang wie breit. Verkürzt man die Länge um 20 cm und vergrössert die Breite um 20 cm, so wird die Fläche um 800 cm^2 grösser. Wie gross sind die ursprünglichen Seitenlängen?

b) Die Körperdiagonale eines Quaders mit quadratischer Grundfläche ist d = 9 cm lang, die Oberfläche O = 144 cm^2. Wie lang sind die Seiten des Quaders?

c) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit den Schenkeln a = b = 82 und der Basis c = 36.
Dem Dreieck wird ein Rechteck mit Umfang 138 einbeschrieben. Berechnen Sie dessen Seiten.



Aufgabe 4 ... und kein Ende

a) In einer Schachtel sind 60 Spielsteine, einige sind rot, andere blau, wieder andere grün.
Würde man alle roten durch blaue Steine ersetzen, hätte man doppelt so viele blaue wie grüne Steine. Ersetzte man dagegen sämtliche grünen durch blaue Spielsteine, wären dreimal so viele blaue wie rote Steine vorhanden. Wie viele blaue Steine hat es in der Schachtel?

b) Adam hat doppelt so viele Brüder wie Schwestern. Seine Schwester Eva hingegen hat dreimal so viele Brüder wie Schwestern. Wie viele Personen sitzen am Familientisch?

c) Eine Leiter wird an eine Wand gestellt. Schiebt man ihren Fuss auf dem Boden um 1 m gegen die Wand, so rutscht das andere Ende der Leiter um 4 dm nach oben. Zieht man stattdessen den Fuss um 1 m von der Wand weg, so rutscht das andere Ende um 6 dm nach unten. Wie lang ist die Leiter?

Lösungen

Aufgabe 1 ***a)*** *111 und 27* ***b)*** *8 und 32* ***c)*** $\frac{2}{3}$ *oder* $-\frac{3}{2}$

Aufgabe 2 ***a)*** *der Hase ist 11 Jahre alt* ***b)*** *der Tennisclub hat 60 Mitglieder*

Aufgabe 3 ***a)*** *30 cm und 90 cm* ***b)*** *Grundseite = 6 cm; Höhe = 3 cm oder Grundseite = 4 cm, Höhe = 7 cm*
c) *9 cm und 60 cm*

Aufgabe 4
a) *es hat 25 blaue Steine* ***b)*** *es sitzen 13 Kinder + evt. 2 Erwachsene = 15 Personen am Familientisch*
c) *Leiterlänge ≈ 7 m (Leiterfuss 31 dm von der Wand, Leiterende 63 dm hoch)*

Anhang 4 Computertomographie und Gleichungssysteme

Die Technik der Computer-Tomographie, abgekürzt CT entstand1973. Das Wort ist aus dem Griechischen abgeleitet: "tomé" = Schnitt, "grapheïn" = einritzen, zeichnen. Mit der Computer-Tomographie können Querschnitte durch einen Körper bildlich dargestellt werden.

Die folgenden CT-Bilder zeigen einen Querschnitt bei zwei Menschen.

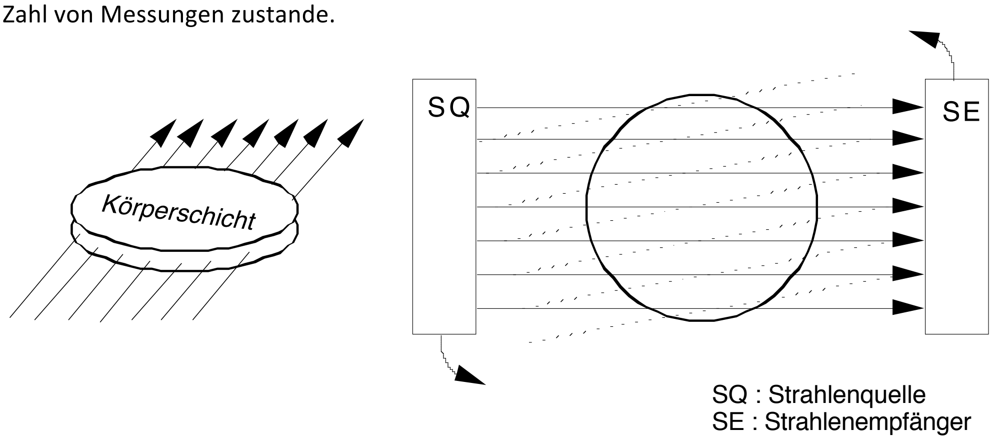
ant

Der Schädelknochen zeigt sich als breites weisses Oval. Er umschliesst das Hirn, dessen Gewebe-struktur deutlich hervortritt. Im Innern erkennen Sie dunkle Flecken. Zwei davon haben die Form eines Bumerangs. Das sind Hohlräume, die mit Flüssigkeit gefüllt sind.

Im rechten Bild fällt Ihnen sicher der grosse, eiförmige hellgraue Fleck auf, der im oberen Bild nicht zu finden ist. Dieser Mensch hat eine Hirnblutung erlitten. Im Bereich dieses Fleckes befindet sich geronnenes Blut, das aus den Adern ausgetreten ist. Es erscheint heller, weil es etwas undurchlässiger für Röntgenstrahlen ist als das Hirngewebe.

Wie geht die Herstellung eines CT-Bildes vor sich? Zuerst muss der liegende Patient in die Maschine geschoben werden, die die Messungen durchführt. Es wird nun eine ganze Reihe von parallelen Strahlen ausgesendet und dabei gemessen, wie stark sich diese abschwächen.

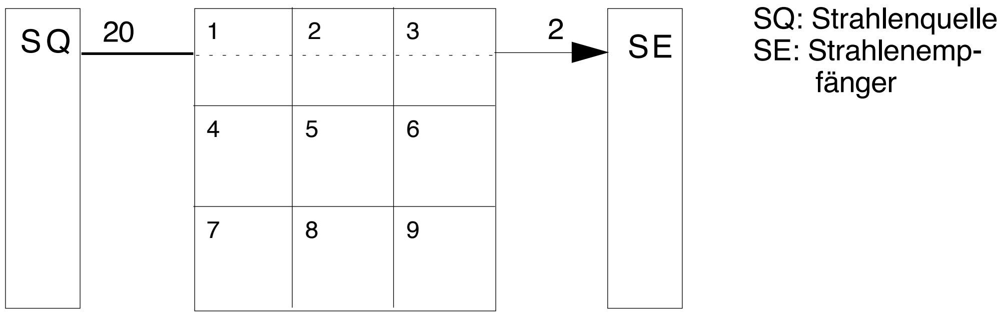
Der Apparat wird dann in kleinen Schritten gedreht und jedesmal wird der Vorgang wiederholt: Viele parallele Strahlen werden durch die Schicht gesendet und gemessen. So kommt schliesslich eine sehr grosse Zahl von Messungen zustande.



Schema der Messapparatur von vorne und von oben

Die Berechnung des Bildes aus den Messungen

Wir möchten Ihnen das Prinzip an einem einfachen Modell erläutern. Wir unterteilen die betrachtete Schicht zwischen Strahlenquelle und -empfänger in 9 Quadrate und zeichnen einen Röntgenstrahl ein.



Nehmen wir an, dass der Strahl beim Verlassen der Quelle eine Stärke von 20 Einheiten hat. Er durchquert die Quadrate 1, 2 und 3. Beim Durchgang durch das erste Quadrat wird er um einen gewissen Betrag abgeschwächt, sagen wir um x_1 Einheiten. Im zweiten Quadrat wird er weiter um x_2 Einheiten abgeschwächt und im dritten nochmals um x_3 Einheiten. Nun tritt er aus der Schicht heraus. Die Stärke, die der Strahl jetzt noch hat, wird vom Strahlenempfänger gemessen. Sie betrage noch 2 Einheiten. Wir können diese sukzessive Abschwächung von 20 auf 2 Einheiten mit einer Gleichung beschreiben:

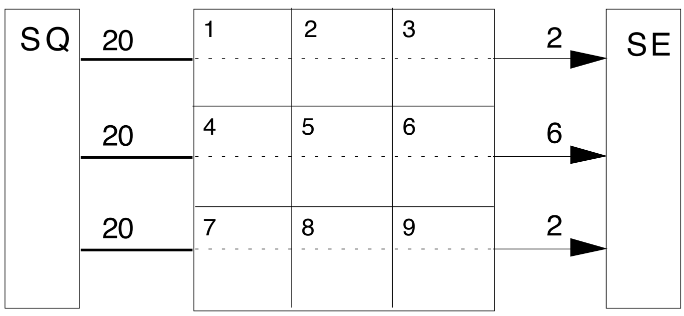
$$20 - x_1 - x_2 - x_3 = 2$$

oder umgeformt

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

Der Wert der rechten Seite ist durch Messung bestimmt worden. Die Grössen x_1, x_2, x_3 sind unbekannt. Wir haben eine lineare Gleichung mit drei Unbekannten vor uns!

Nun wird ja nicht nur eine Messung durchgeführt. Zuerst einmal werden weitere, parallele Strahlen durch die Schicht geschickt und gemessen:



Der zweite Strahl durchquert die Quadrate 4, 5 und 6 und wird von 20 auf 6 Einheiten abgeschwächt. Der dritte Strahl geht durch die Quadrate 7, 8 und 9. Er wird von 20 auf 2 Einheiten abgeschwächt. Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen:

für den 2. Strahl: $\quad x_4 + x_5 + x_6 = 14$

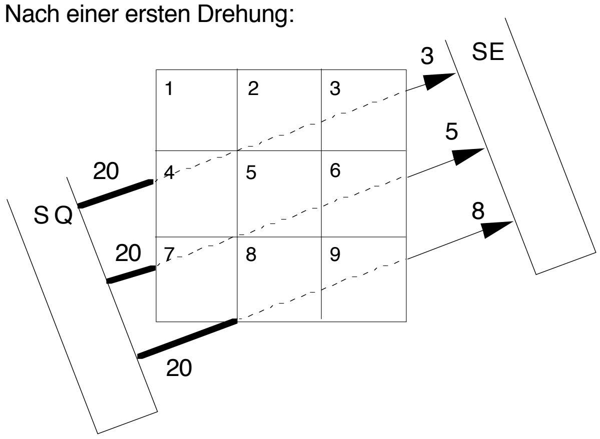
für den 3. Strahl: $\quad x_7 + x_8 + x_9 = 18$

Aus den drei Messungen erhalten wir also drei lineare Gleichungen mit allerdings 9 Unbekannten. Wir können diese Gleichungen zu einem System zusammenstellen:

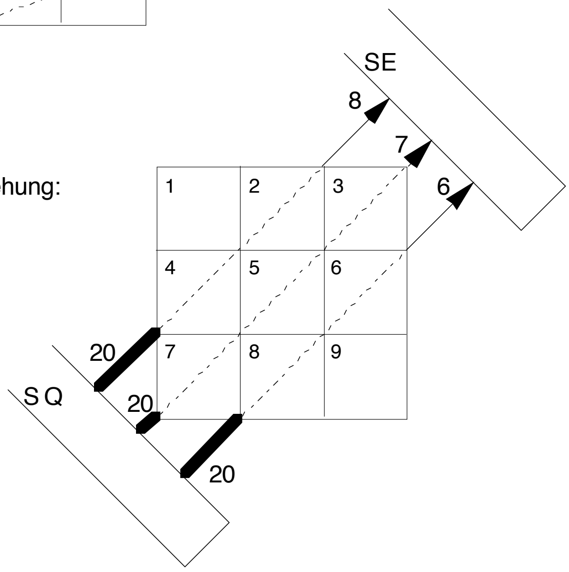
$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 14 \\ x_7 + x_8 + x_9 = 18 \end{array}\right.$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die neun Unbekannten nicht eindeutig bestimmen. Wir brauchen weitere Gleichungen. Zur Bestimmung von 9 Unbekannten braucht es normalerweise 9 Gleichungen. Deshalb wird die Messapparatur in zwei Schritten leicht gedreht. Damit können 6 weitere Messungen durchgeführt werden:

Nach einer ersten Drehung:



Nach einer weiteren Drehung:



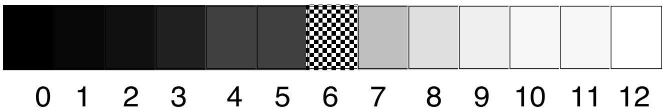
Indem wir für jede zusätzliche Messung die entsprechende Gleichung aufstellen, erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{lr} x_1 + x_2 + x_3 & = 18 \\ x_4 + x_5 + x_6 & = 14 \\ x_7 + x_8 + x_9 & = 18 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = 17 \\ x_5 + x_6 + x_7 & = 15 \\ x_8 + x_9 & = 12 \\ x_2 + x_4 & = 12 \\ x_3 + x_5 + x_7 & = 13 \\ x_6 + x_8 & = 14 \end{array}\right.$$

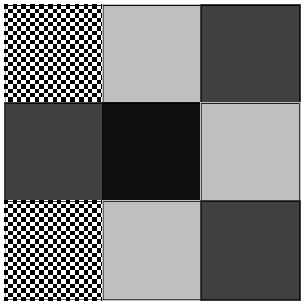
Dieses System hat nun genau eine Lösung. Sie lautet:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = (6, 7, 5, 5, 2, 7, 6, 7, 5)$$

Was bedeutet diese Lösung? Das erste Quadrat schwächt den Strahl um 6 Einheiten ab, das zweite um 7, das dritte um 5 Einheiten und so weiter. Diese Zahlen werden jetzt mit Hilfe einer Grautonskala umgesetzt:



Das erste Quadrat wird also mit dem Grauton Nummer 6 eingefärbt, das zweite mit dem Ton Nummer 7 etc. Jedes Bildquadrat wird mit dem entsprechenden Grauton eingefärbt. So entsteht das "CT-Bild" dieser Schicht:



Jedes CT-Bild besteht es aus Tausenden von Quadrätchen, die in unterschiedlichen Grautönen gefärbt sind.
Um ein solches Bild zu bekommen müssen entsprechend Gleichungssysteme mit Tausenden (!) von Gleichungen und Unbekannten gelöst werden.

Es hat viel Arbeit erfordert, bis diese Technik in Gebrauch genommen werden konnte.
Aber dann entwickelte sie sich zum Segen für Patientinnen und Patienten. Die Erfinder Hounsfield und Cormack erhielten dafür 1979 den Nobelpreis für Medizin.

Computertomograph am Universitätsspital Zürich

"Just a darn minute — yesterday
you said that X equals **two**!"