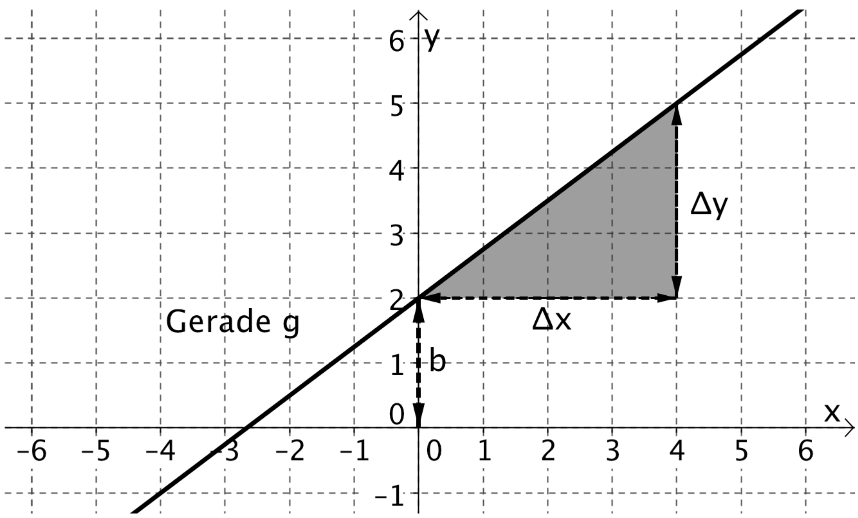
Datum Name

Lineare Funktionen

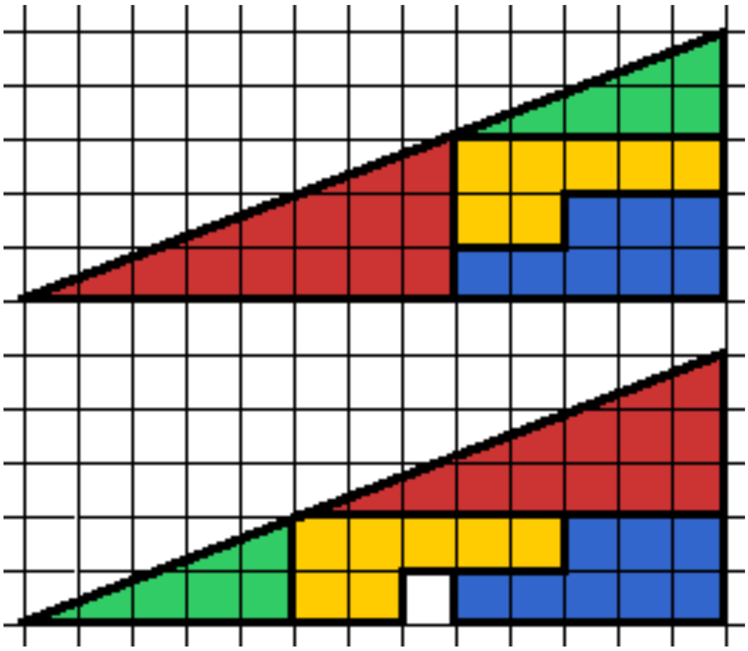


Geraden zeichnen & beschreiben,
y-Achsenanschnitt & Steigung,
Anwendungen

Inhalt

4 gleiche Teile. Sie werden neu angeordnet...

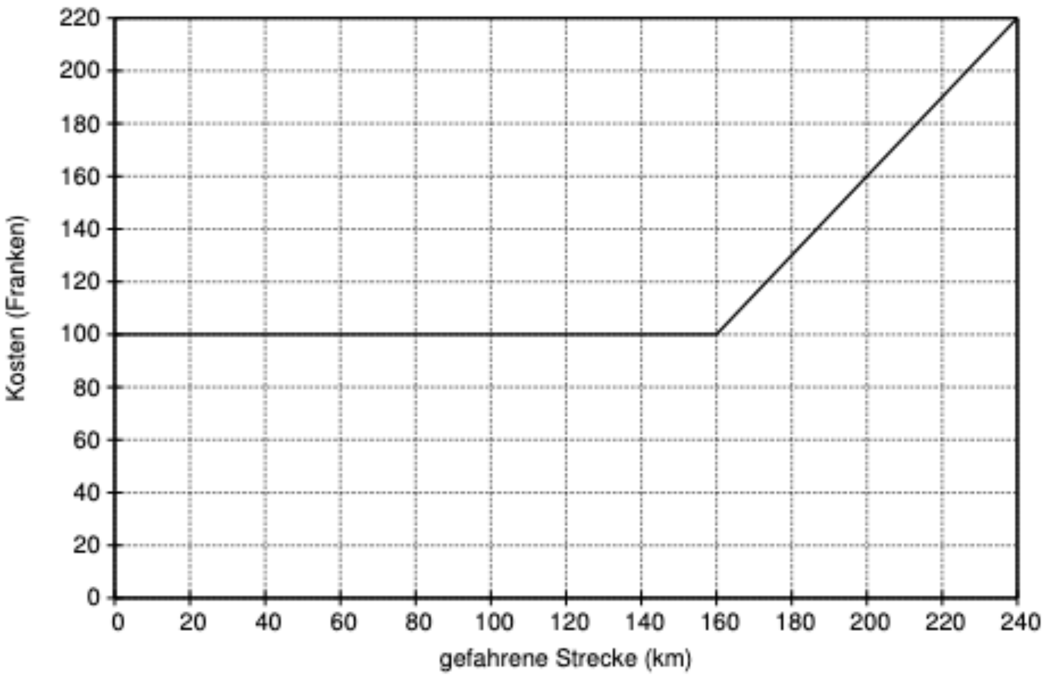
Warum entsteht jetzt plötzlich ein Loch?



1 Einstieg

ZAP 2015 (KG) Mathematik

2 Autovermieter Baas verlangt eine Grundtaxe von *a* Franken. Die ersten *b* gefahrenen Kilometer sind in dieser Taxe inbegriffen. Jeder weitere gefahrene Kilometer kostet *c* Franken. Im unten abgebildeten Diagramm sind die Kosten in Abhängigkeit der gefahrenen Strecke dargestellt.



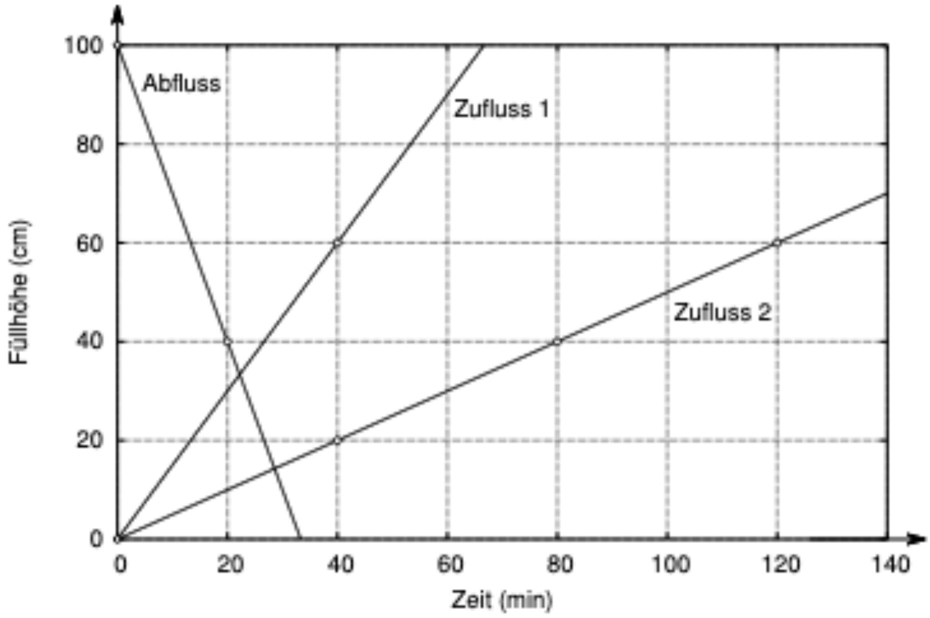
a) Bestimme anhand des Diagramms die Werte für *a*, *b* und *c*.

a = ________, *b* = ________, *c* = ________

b) Autovermieter Idua verlangt eine Grundtaxe von 60 Franken. In dieser Taxe sind keine gefahrenen Kilometer inbegriffen. Jeder gefahrene Kilometer kostet 50 Rappen. Stelle die Kosten in Abhängigkeit der gefahrenen Strecke im oben abgebildeten Diagramm dar.

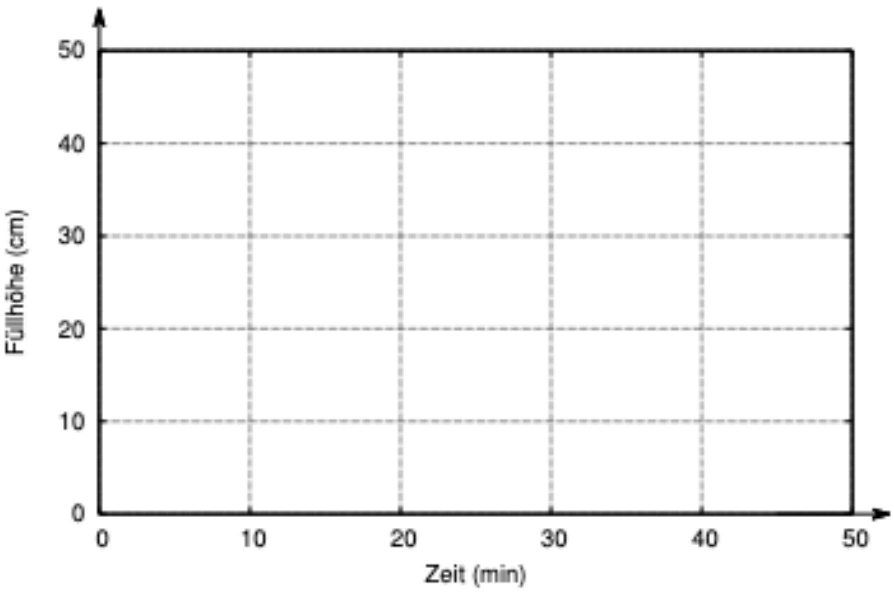
c) Frau Spar möchte möglichst wenig für ihr Mietauto bezahlen. In welchen Fällen sollte sie dann das Auto bei Baas statt Idua mieten?

3. Ein Brunnen hat zwei Zuflüsse und einen Abfluss. Die Abbildung zeigt für jede der drei Leitungen die Füllhöhe des Brunnens in Abhängigkeit der Zeit, wenn die entsprechende Leitung den Brunnen alleine füllt (Zuflüsse) oder leert (Abfluss).

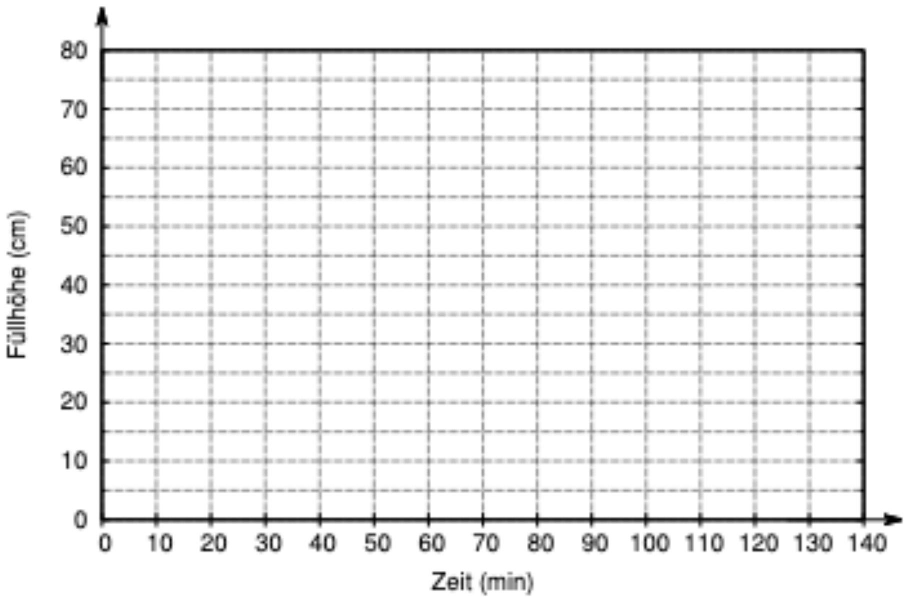


Zeichne für die folgenden Situationen jeweils den entsprechenden Graphen. Beachte dabei die verschiedenen Skalen auf den Achsen. Tipp: Zeichne zuerst mit Bleistift und erst wenn du sicher bist mit Tinte.

a) Der leere Brunnen wird während 20 Minuten mit Zufluss 1 gefüllt. Dann wird dieser geschlossen und sofort der Abfluss geöffnet.



b) Der leere Brunnen wird zuerst während 30 Minuten nur mit Zufluss 2 gefüllt. Anschliessend wird er während weiteren 30 Minuten mit beiden Zuflüssen gleichzeitig gefüllt. Zusätzlich zu den beiden Zuflüssen wird schliesslich noch der Abfluss geöffnet (d. h. alle Leitungen sind jetzt offen), und zwar so lange, bis der Brunnen leer ist.



Funktion

Bei den Aufgaben der ZAP geht es um **zwei** verschiedene **Grössen**.

- Die beiden Grössen hängen voneinander ab. Es besteht also eine **Abhängigkeit zweier Grössen**.
- Der Grösse auf der x-Achse sagen wir **unabhängige Grösse** (oder unabhängige Variable).
- Der Grösse auf der y-Achse sagen wir **abhängige Grösse** (oder abhängige Variable).

Definition

Eine **Funktion** ist eine Zuordnung, die einem x-Wert genau ein y-Wert zuweist.
Mit Funktionen lassen sich Abhängigkeiten von Grössen beschreiben.

„Gehört das x zum y", dann zeichnen wir den Punkt (x/y) in das Koordinatensystem.

Umgekehrt: liegt ein Punkt (x/y) vor, dann „gehört das x zum y".

x

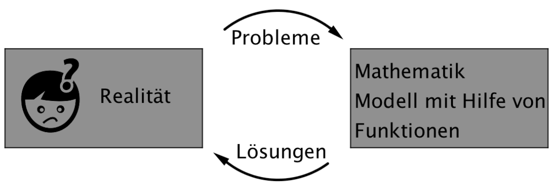
↓ unabhängige Variable

Funktion "Blackbox" — es "passiert" etwas... gibt es eine Formel?

↓ abhängige Variable

y

Mit Hilfe von Funktionen versuchen wir die Realität zu beschreiben. Funktionen sind ein **Modell** der Realität.



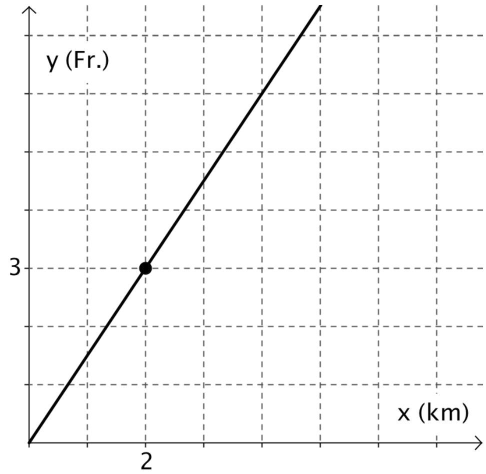
2 Lineare Funktionen

Funktionsgleichung y = ax

Die ZAP hat zwei wichtige Beispiele von Funktionen gezeigt. Wir nennen sie

- **„Taxibeispiel“** (x km werden y Fr. zugwiesen)
- **„Vasenbeispiel“** (x Minuten wird die Füllhöhe y cm zugewiesen)

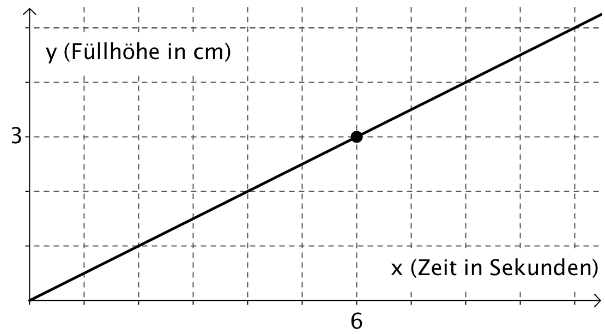
Beispiel 1 Taxi



Taxifahren: jeder Kilometer kostet.
Der Vorgang wird mit einer Funktion beschrieben.
Abgebildet ist die graphische Darstellung einer Funktion,
der sogenannte **Graph**.

- Erstellen Sie eine Tabelle, in der die x-Werte und die ihnen zugewiesenen y-Werte auftreten.
  Diese Tabelle heisst **Wertetabelle**.
- Wie viel kosten 15 km Taxifahrt?
- Wie viel kosten x km Taxifahrt? Geben Sie die „Formel“ an!
  Diese Formel heisst **Funktionsgleichung**.
- Mit der Funktionsgleichung hat man die Funktion *im Griff*.
  Stellen Sie mögliche Fragen zur Taxifahrt und beantworten Sie sie *mit Hilfe der Funktionsgleichung*.
- In der Funktionsgleichung tritt eine Zahl auf. Diese Zahl heisst **Änderungsrate a**.
  Was gibt die Änderungsrate an? Was hat sie für eine „Einheit“? Wo steht sie in der Wertetabelle?

Beispiel 2 Vase



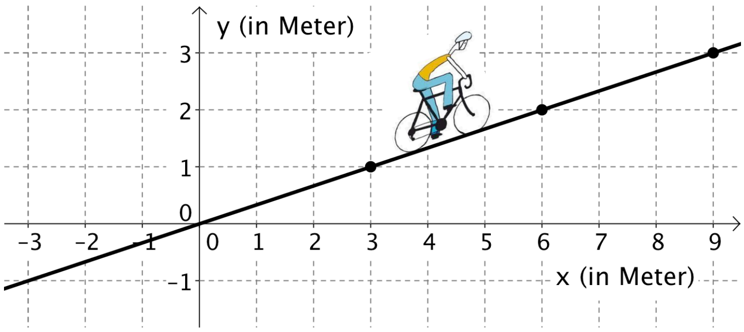
a) Eine Vase wird mit Wasser gefüllt.
Der Vorgang wird mit einer Funktion beschrieben.
Abgebildet ist der zugehörige Funktionsgraph.

- Erstellen Sie eine (sinnvolle) Wertetabelle.
- Geben Sie die Funktionsgleichung an.
- Stellen Sie Fragen im angegebenen Zusammenhang und beantworten Sie sie mit der Funktionsgleichung.
- Was bedeutet hier die Änderungsrate? Welche Einheit hat sie? Wo steht sie in der Wertetabelle?

b) Eine andere Vase wird gefüllt. Die zugehörige Funktionsgleichung lautet: y = 0.75x. Mögliche Fragen?

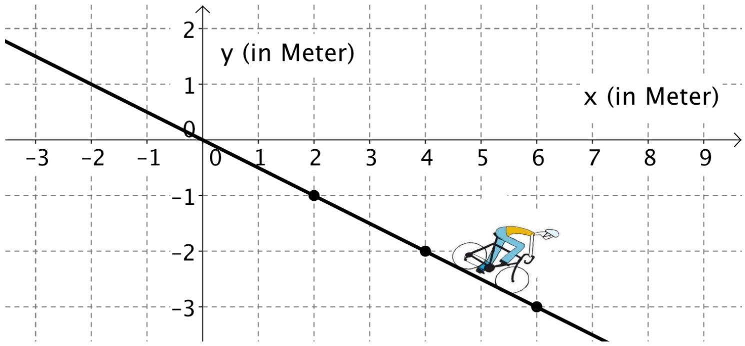
Beispiel 3 **Strasse**

a) Eine Strasse „steigt an“.
Wir können die Strasse als „Funktionsgraph“ interpretieren.



- Erstellen Sie eine Wertetabelle.
- Geben Sie die Funktionsgleichung an.
- Liegt der Punkt P(60/20) auf der Strasse, also auf dem Graphen? Liegt der Punkt Q(–6/–2) auf dem Graphen?
- Bestimmen Sie x und y so, dass die Punkte R(x/21) und S(–8/y) auf dem Graphen liegen.
- Liegt der Punkt T(303/102) *auf, oberhalb oder unterhalb* des Graphen?
- Was bedeutet hier die Änderungsrate? Welche Einheit hat sie? Wo steht sie in der Wertetabelle?
  Anstelle von Änderungsrate spricht man hier eher von „**Steigung**“. Warum?

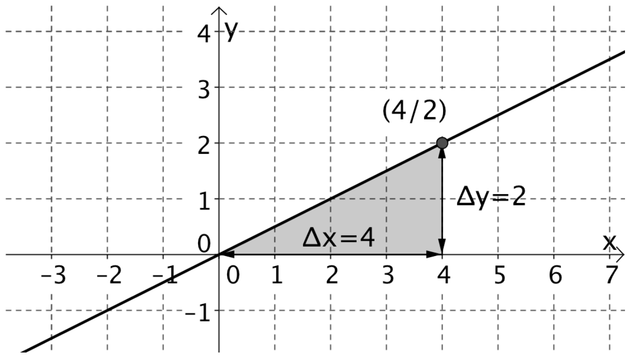
b) Eine Strasse „fällt“.



- Erstellen Sie eine Wertetabelle.
- Geben Sie die Funktionsgleichung an.
- Geben Sie die Steigung an.

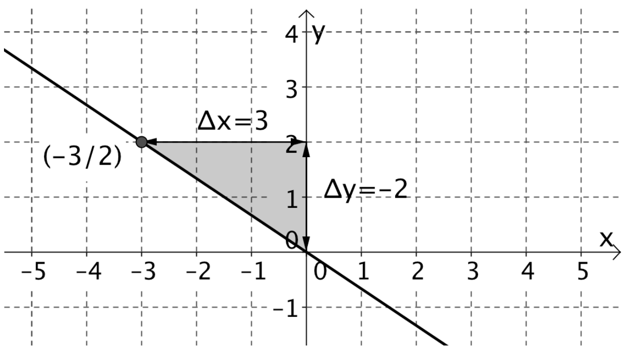
Wichtiger Begriff: Steigung / Steigungsdreieck

Gerade ist steigend



- *Steigung*
  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- *Geradengleichung*
  $y = \frac{1}{2}x$

Gerade ist fallend

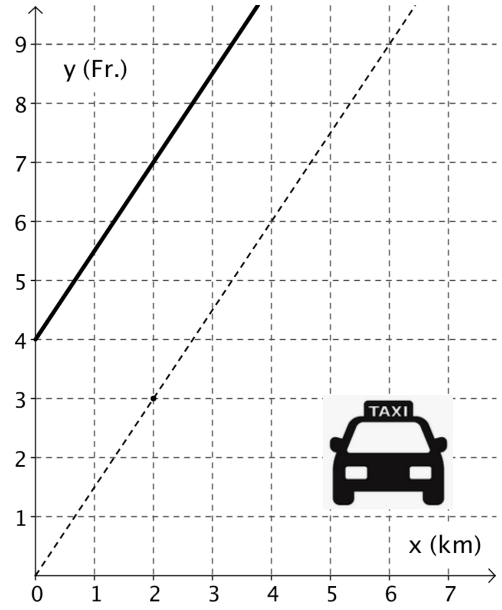


a =

- *Steigung*
  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3}$
- *Geradengleichung*
  $y = -\frac{2}{3}x$

Funktionsgleichung y = ax + b

Beispiel 4 **Taxi mit Taxe**



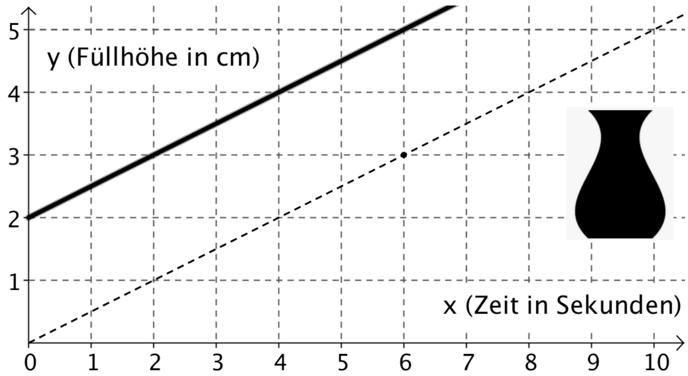
Abgebildet ist der Graph einer Funktion, welche den Preis in Abhängigkeit der zurückgelegten Strecke beschreibt.

a) Vgl. Sie mit Beispiel 1. Was ist anders?

b) Wie lautet die Funktionsgleichung?

c) Stellen Sie Fragen im angegebenen Zusammenhang und beantworten Sie sie mit Hilfe der Funktionsgleichung.

Beispiel 5 **Vase mit ...**



Abgebildet ist der Graph einer Funktion, welche die Füllhöhe in Abhängigkeit der Zeit beschreibt.

a) Vgl. Sie mit Beispiel 2. Was ist anders?

b) Wie lautet die Funktionsgleichung?

c) Stellen Sie Fragen im angegebenen Zusammenhang und beantworten Sie sie mit der Funktionsgleichung.

Definition

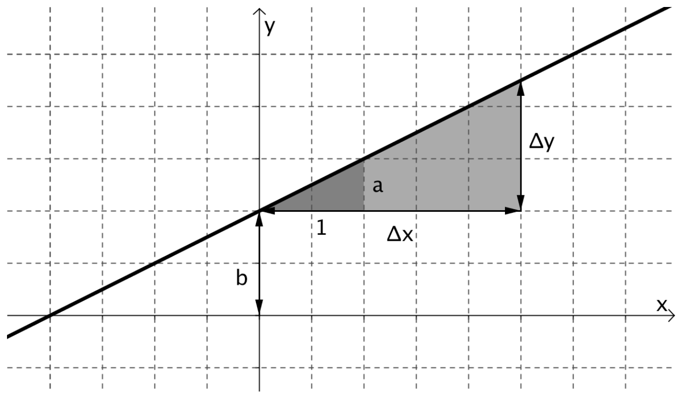
Eine Funktion mit der Gleichung

y = ax + b

heisst **lineare Funktion**.

- **a** heisst **Änderungsrate** bzw. **Steigung**
- **b** heisst **Anfangswert** bzw. **y-Achsenabschnitt**

Der Graph ist eine Gerade.
Die Änderungsrate bzw. die Steigung ist konstant.



Lineare Funktionen (der Graph ist eine „Linie") sind die einfachsten Funktionen. Später werden wir auch kompliziertere Funktionen antreffen.
Aber gerade weil lineare Funktionen so einfach sind, sind sie sehr wertvoll. Wir werden ihnen immer wieder begegnen.

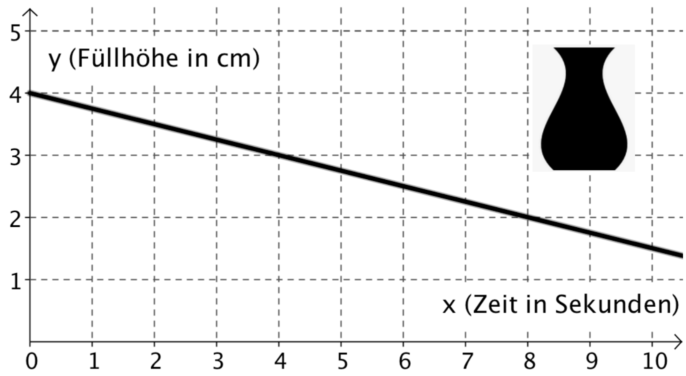
Beispiel 6 **Vase**

Abgebildet ist der Graph einer Funktion, welche die Füllhöhe in Abhängigkeit der Zeit beschreibt.

a) Vgl. Sie mit Beispiel 5. Was ist anders?

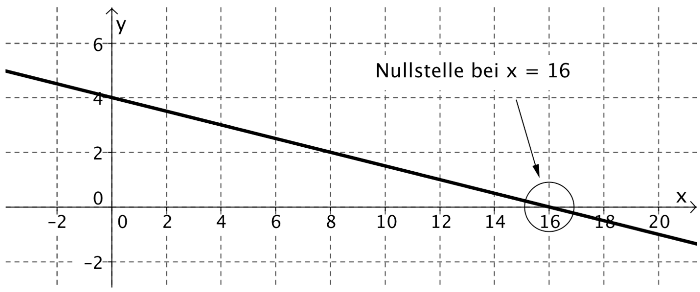
b) Wie lautet die Funktionsgleichung?

c) Stellen Sie Fragen im angegebenen Zusammenhang und beantworten Sie sie mit der Funktionsgleichung.



Merke

Die Stelle, an der der Graph die x-Achse schneidet, heisst **Nullstelle**.
Die Nullstelle ist also immer ein *x-Wert*.
Im Beispiel 6 „liegt“ die Nullstelle bei x = 16 und besitzt eine offensichtliche Interpretation (welche?).



Wie berechnet man die Nullstelle?
Die Nullstelle dort liegt, wo der Graph die x-Achse schneidet... Dort ist aber y = 0!

Um die Nullstelle zu berechnen, müssen wir in der Funktionsgleichung für y einfach „0“ einsetzen.

Beispiel 7 **abstrakt**

a) steigende Gerade

Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = 0.5x + 3$. (Weil der Graph eine Gerade ist sagen wir „*Geradengleichung*“.)

- Zeichnen Sie den Graphen.
- Wo „stehen“ im Graph die beiden Zahlen a = 0.5 und b = 3?
- Berechnen Sie x so, dass der Punkt P(x/44) auf der Geraden liegt.
- Liegt der Punkt P(12/7) auf, oberhalb oder unterhalb der Geraden?
- Berechnen Sie die Nullstelle.

b) fallende Gerade

Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = -2x + 3$. Wo „stehen“ im Graph die beiden Zahlen a = 0.5 und b = 3?

- Zeichnen Sie den Graphen.
- Liegt der Punkt P(–5/13) auf, oberhalb oder unterhalb der Geraden?
- Berechnen Sie die Nullstelle.

Wichtig: Geradengleichung durch zwei Punkte

Eine Gerade ist *eindeutig* festgelegt durch die Angabe von zwei Punkten.
Wenn ich also zwei Punkte kenne, muss es möglich sein, die Gleichung der Geraden zu berechnen!

Beispiel 8 **eine Aufgabe – zwei Vorgehensweisen**

Wie lautet die Funktionsgleichung? Interpretieren Sie die auftretenden Zahlen.

a) Taxi

4 km Fahrt kosten 3 Fr. und 6 km Fahrt kosten 4 Fr.

Beachte: es handelt sich bei dieser Angabe um zwei „*Punkte*“, nämlich um A(4/3) und B(6/4).

b) Vase

Nach 5 Minuten beträgt die Füllhöhe 6 cm, nach 8 Minuten ist das Gefäss leer.

c) Pflanze

Eine Pflanze ist nach 2 Wochen 3 cm gross und nach 5 Wochen 5 cm.

Beispiel

Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g, welche durch die Punkte A(–2/0.5) und B(4/5) verläuft.

Möglichkeit 1

***1** Steigung berechnen*

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-0.5}{4-(-2)} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \; y = \frac{3}{4}x + b$$

***2** Punkt einsetzen*

$$A(-2/0.5):\; 0.5 = \frac{3}{4}\cdot(-2) + b$$

$$\Rightarrow \; b = 2$$

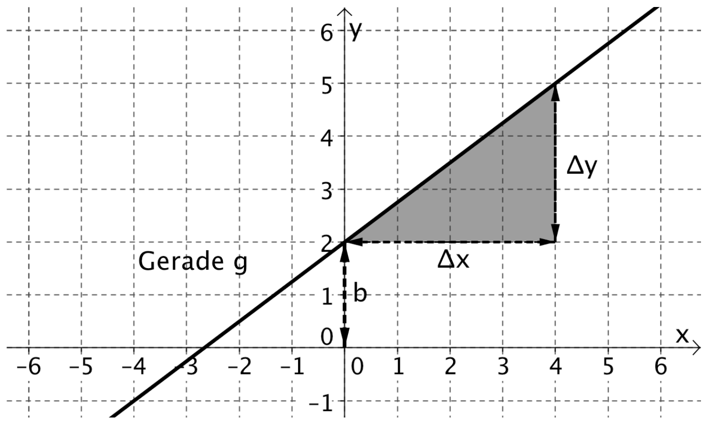
$$\Rightarrow \; \text{Geradengleichung } g\text{: } y = \frac{3}{4}x + 2$$

Möglichkeit 2

Beide Punkte einsetzen, Gleichungssystem lösen

$$\begin{array}{l|l} A(-2/0.5): & 0.5 = -2a + b \\ B(4/5): & 5 = 4a + b \end{array}$$

$$\Rightarrow \; a = \frac{3}{4}\;;\; b = 2$$



Beispiel 9 **üben!**

- Berechnen Sie die Geradengleichung.
- Zeichnen Sie die Gerade.
  Markieren Sie *mit Farbe* den y-Achsenabschnitt und ein Steigungsdreieck.

a) A(–3/–7); B(6/–1)

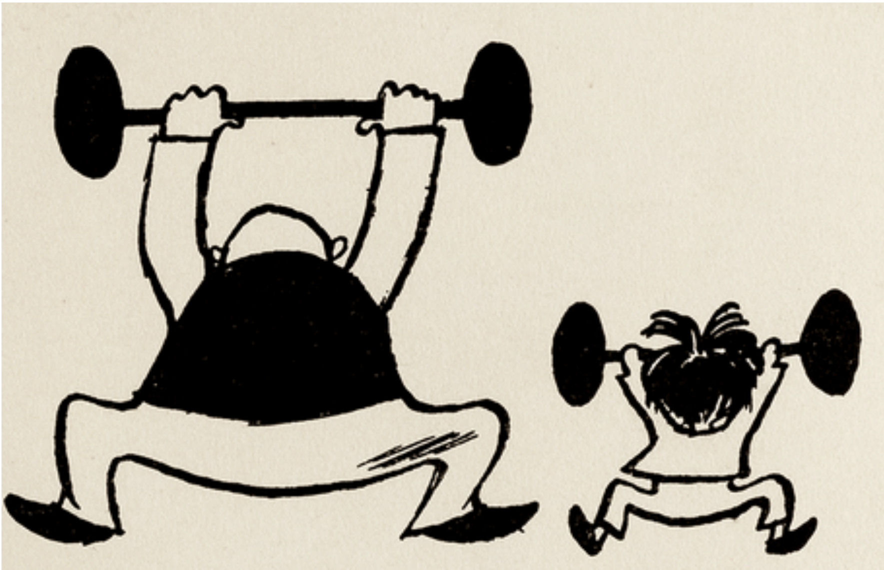
b) A(2/8); B(–1/–4)

c) A(5/0); B(3/0.4)

d) A(1/1); B(2/–6)

e) A(4/–2); B(0/–5)

f) A(10/–4); B(–5/5)



Buchers Notenmasstab

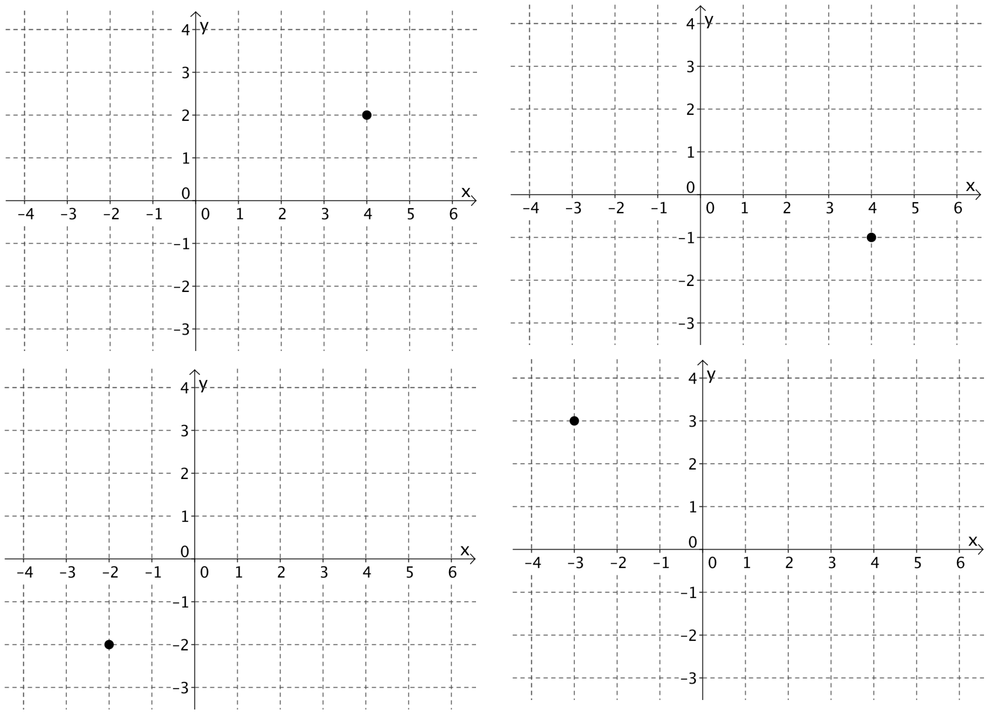
Pro 1 Punkt gibt es eine Viertelnote. Wie lautet die Funktion, welche die Note in Abhängigkeit der Punkte angibt?

Aufgaben 1 – 3 ($y = ax$)

Aufgabe 1 zeichnen

a) Vier Strassen. Sie verlaufen alle durch den Nullpunkt (Ursprung) und den eingezeichneten Punkt.

- Zeichnen Sie die Graphen.
- Bestimmen Sie die Steigungen.
- Bestimmen Sie jeweils x so, dass der Punkt P(x/3) auf dem Graphen liegt.
- Bestimmen Sie jeweils y so, dass der Punkt P(–5/y) auf dem Graphen liegt.

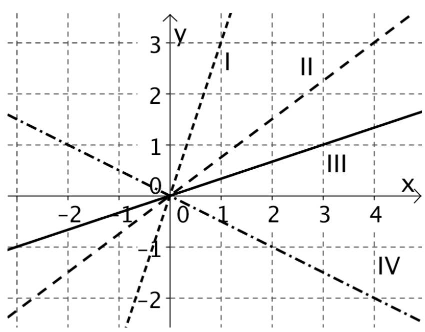


Geraden, die durch den Ursprung (Nullpunkt) verlaufen, heissen auch **Ursprungsgeraden**.

b) Zeichnen Sie folgenden drei Geraden – sauber! – in *ein* Koordinatensystem: $y = 2x$; $y = \frac{1}{2}x$; $y = -2x$

c) Zeichnen Sie folgende drei Geraden – sauber! – in *ein* Koordinatensystem: $y = \frac{2}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x$; $y = \frac{5}{3}x$

Aufgabe 2 Gleichung angeben



a) Geben Sie die Gleichungen der nebenstehenden vier Geraden an.

b) Spiegeln Sie die Gerade mit der Gleichung $y = 2x$ an:

der x-Achse ; der y-Achse ; der Geraden $y = x$; der Geraden $y = -x$

und geben Sie die Gleichung dieser neuen Geraden an.

Aufgabe 3 Pflanze

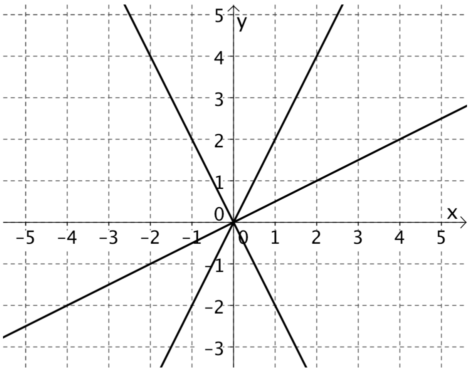
Eine Pflanze wächst alle 3 Wochen um 2 cm.
Geben Sie die Funktionsgleichung an und zeichnen Sie den Graphen. Was bedeutet die „Steigung" a?

Lösungen

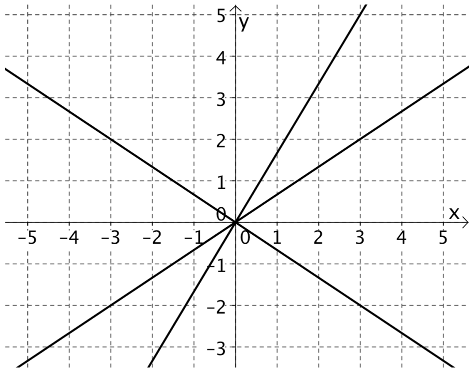
Aufgabe 1

a)
- $y = \frac{1}{2}x$; $x = 6$; $y = -2.5$
- $y = x$; $x = 3$; $y = -5$
- $y = -0.25x$; $x = -12$; $y = 1.25$
- $y = -x$; $x = -3$; $y = 5$

b)

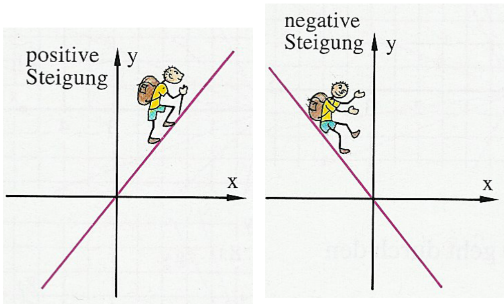


c)



Aufgabe 2

a) I: $y = 3x$; II: $y = \frac{3}{4}x$; III: $y = \frac{1}{3}x$; IV: $y = -0.5x$



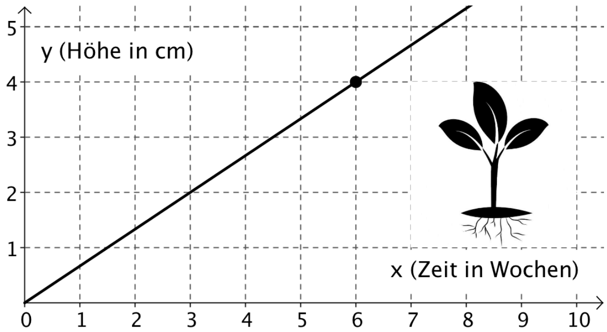
b) gespiegelt an
an der x-Achse: $y = -2x$; an der y-Achse: $y = -2x$
an der Geraden $y = x$: $y = \frac{1}{2}x$; an der Geraden $y = -x$: $y = \frac{1}{2}x$

Aufgabe 3

$y = \frac{2}{3}x$ (y in cm, x in Wochen)

Statt von „Steigung" a sollte man hier besser von „Änderungsrate" sprechen.
Sie bedeutet die **„Wachstums-geschwindigkeit"** in **cm/Woche**.

x	y
0	0
1	2/3
2	4/3
3	2
4	8/3
5	10/3
6	4
…	…

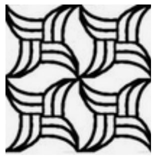


Bedeutet x die Zeit, dann schreiben wir auch „t" anstatt „x". **t steht für „time".**

Die Gleichung lautet dann: $y = \frac{2}{3}t$ (y in cm, t in Wochen) oder $h = \frac{2}{3}x$ (h Höhe in cm, t in Wochen)

Aufgaben 4 – 7 (y = ax + b)

Aufgabe 4 Taxi – Behälter – Pflanze = dasselbe Muster



a) Eine Taxifahrt kostet 3 Fr. Grundgebühr und 20 Rp. pro km.

- Geben Sie die Funktionsgleichung an (x in km, y in Fr.) und zeichnen Sie den Graphen.
- Wie teuer wird eine 11 km lange Taxifahrt? Wie lang war eine 16 Fr. teure Taxifahrt?

b) Eine Flüssigkeit läuft gleichmässig aus. Am Anfang sind 5 Liter im Gefäss, nach drei Minuten sind es noch 4 Liter.

- Geben Sie die Funktionsgleichung an (x in min, y in Liter) und zeichnen Sie den Graphen.
- Wie lang geht es, bis nur noch halb so viel drin ist wie am Anfang?

c) Eine Pflanze wächst alle 5 Wochen 2 cm. Zu Beginn ist sie 1 cm gross.

- Geben Sie die Funktionsgleichung an und zeichnen Sie den Graphen.
- Wie lang geht es, bis sie mit 20 cm ausgewachsen ist?

d) Geben Sie für jedes Beispiel a) bis c) die Änderungsrate a an. Interpretieren Sie sie und geben Sie ihre Einheit an.

Aufgabe 5

Geben Sie die Steigung a und den y-Achsenabschnitt b an. Zeichnen Sie dann *sauber und mit Farbe* die Gerade.

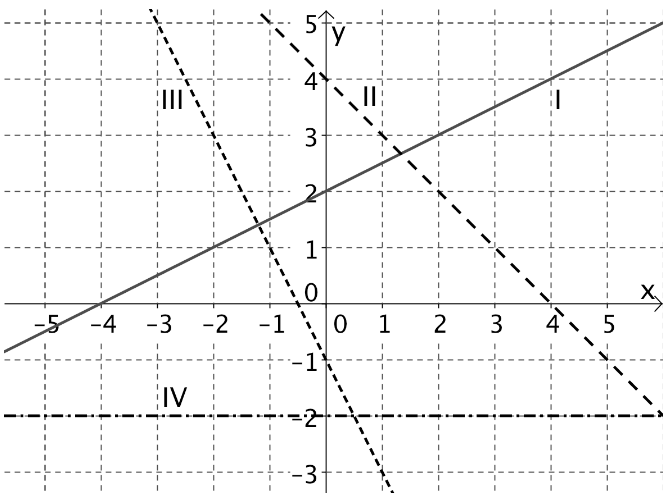
a) $y = 1.5x + 1$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x + 3$ **c)** $y = x - 1$ **d)** $y = 3$

Aufgabe 6

Geben Sie zu jeder der vier eingezeichneten Geraden die zugehörige Geradengleichung an.

Hinweis *Lesen Sie dazu jeweils in der Zeichnung ab:*

- *y-Achsenabschnitt b*
- *Steigung a*



Aufgabe 7

Zeichnen Sie die Gerade *qualitativ*.
Entscheiden Sie dann *rechnerisch*, ob der Punkt *auf, oberhalb* oder *unterhalb* der Geraden liegt.

a) $y = x + 2$ Punkt P(10/13)

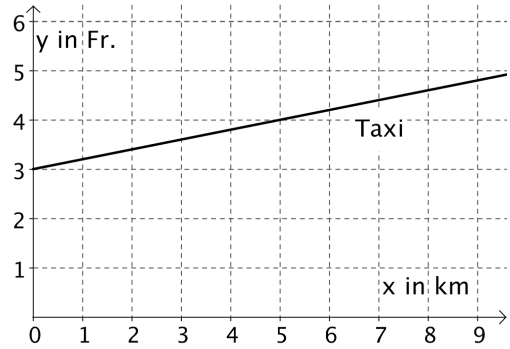
b) $y = 0.25x - 3$ Punkt Q(10/–0.5)

c) $y = -2x + 1$ Punkt S(–1/2)

d) $y = -\frac{2}{3}x + 100$ Punkt T(300/–90)

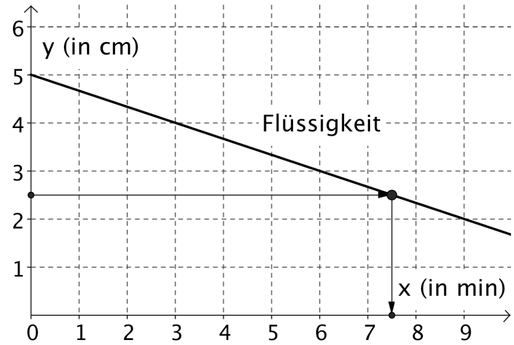
Lösungen

Aufgabe 4



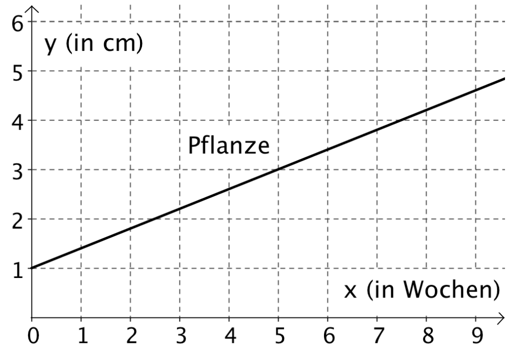
a) Taxi

- y = 0.2x + 3   (y = Preis in Fr., x = gefahrene km)
- 11 km lange Fahrt: y = 5.2 Fr.
  16 Fr. teure Fahrt: x = 65 km



b) Flüssigkeit aus Gefäss

- $y = -\frac{1}{3}x + 5$ (y = Anzahl Liter, x = Zeit in min)
- 2.5 Liter: nach 7½ Minuten

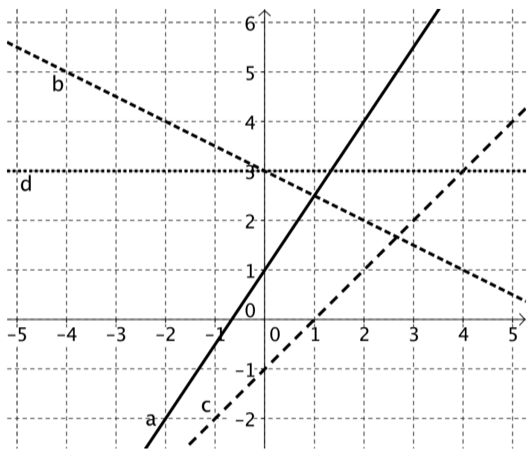


c) Pflanze

- $y = = \frac{2}{5}x + 1$ oder   h = 0.4t + 1
- Höhe 20 cm; x bzw. t = 47.5 Wochen

d) Alle Vorgänge werden durch eine lineare Funktion modelliert.

a) a = Fr./km   ;   b) a = cm/min   ;   c) a = cm/Woche
Die Änderungsraten können wir als „**Geschwindigkeiten**“ interpretieren.



Aufgabe 5

siehe Abbildung

Aufgabe 6

a) $y = \frac{1}{2}x + 2$ **b)** y = –x + 4
c) y = –2x – 1   **d)** y = –2

Aufgabe 7

a) P liegt *oberhalb*   **b)** Q liegt *auf*   **c)** S liegt *unterhalb*   **d)** T liegt *oberhalb*

Aufgaben 8 – 11   (Gerade durch 2 Punkte)

Aufgabe 8

Eine Pflanze ist nach 6 Tagen 5 cm gross und nach 10 Tagen 8 cm.

a) Geben Sie die Funktionsgleichung an, welche die Höhe der Pflanze in Abhängigkeit der Zeit beschreibt.

b) Zeichnen Sie den Graphen.

c) Wie hoch war die Pflanze zu Beginn?

Aufgabe 9

Im Fach Französisch setzt die Lehrerin die Notenskala bei einem Dictée wie folgt fest:

0 Fehler: Note 6   ;   25 Fehler und mehr: Note 1

a) Bestimmen Sie die lineare Funktion, welche der Anzahl Fehler die entsprechende Note zuordnet.

b) Sie machen 10 Fehler. Note? Wie viele Fehler ergeben die Note 5?

c) Erklären Sie – mit Einheiten – die Bedeutung von a (*Änderungsrate*) und b (*Anfangswert*).

Aufgabe 10

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(–9/–1) und B(6/4).

a) Berechnen Sie die Gleichung der Geraden. Zeichnen Sie dann die Gerade.

b) Berechnen Sie
- y so, dass P(12/y) auf der Geraden g liegt.
- x so, dass der Punkt R(x/–5) auf der Geraden g liegt.

c) Liegt der Punkt Q(12/7) auf, unterhalb oder oberhalb der Geraden g?

d) Wo schneidet die Gerade g die x-Achse? (*Nullstelle* der Geraden)

e) Geben Sie die Gleichung der zu g *parallelen* Geraden h an mit dem y-Achsenabschnitt 5.

Aufgabe 11

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(3.5/–4.75) und B(1/1.5).

a) Berechnen Sie die Gleichung der Geraden. Zeichnen Sie dann die Gerade.

b) Liegt der Punkt Q(–10/26) auf, unterhalb oder oberhalb der Geraden g?

c) Wo schneidet die Gerade g die x-Achse? (*Nullstelle* der Geraden)

d) Geben Sie die Gleichung einer zu g parallelen Geraden h an.

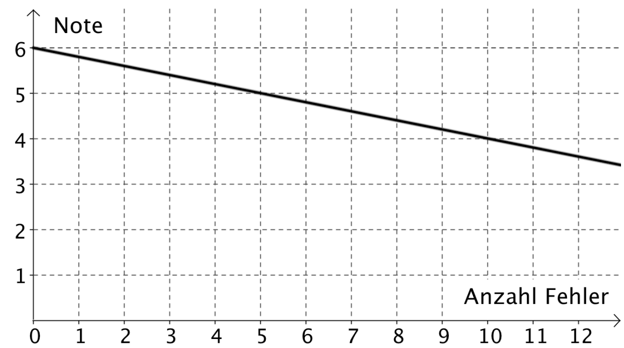
Lösungen

Aufgabe 8

a) $y = \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}$ bzw. $y = 0.75t + 0.5$

c) 0.5 cm = b = y-Achsenabschnitt = Anfangswert

Aufgabe 9

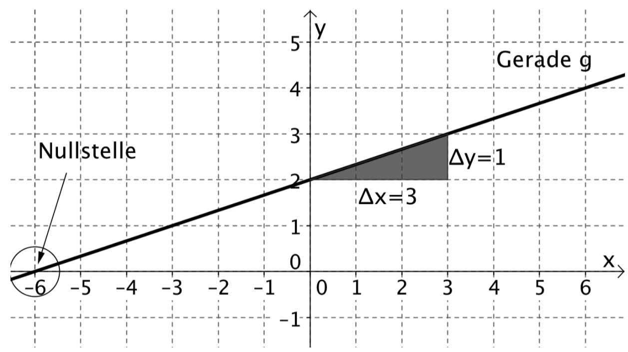


a) $N = -\frac{1}{5}f + 6$ (N = Note, f = Anzahl Fehler)

b) Note 4; 5 Fehler

c) a = Notenabzug pro Fehler; b = Note bei 0 Fehler

Aufgabe 10



a) $y = \frac{1}{3}x + 2$

b) $y = \frac{1}{3} \cdot 12 + 2 = 6 \Rightarrow P(12/6)$

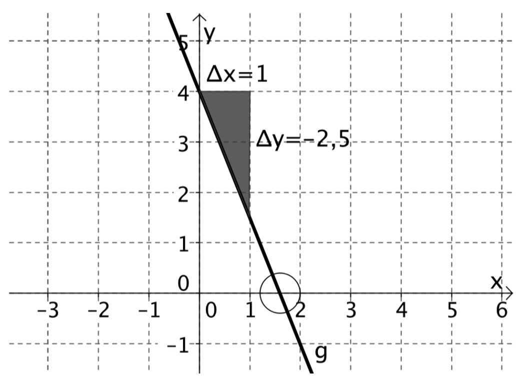
$-5 = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow x = -21 \Rightarrow R(-21/-5)$

c) Q liegt oberhalb, weil 7 > 6 (vgl. b))

d) $0 = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow x = -6$

e) $y = \frac{1}{3}x + 5$

Aufgabe 11



a) $y = -\frac{5}{2}x + 4$

b) Q liegt unter, weil 26 < 29

c) $0 = -\frac{5}{2}x + 4 \Rightarrow x = \frac{8}{5} = 1.6$

d) Geraden der Form: $y = -\frac{5}{2}x + b$

Aufgaben 12 – 14 (Schnittpunkte von Geraden)

Schnittpunkt berechnen = 2×2-Gleichungssystem lösen **bzw.** „Geraden **gleichsetzen**“

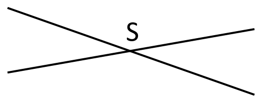
Aufgabe 12 Schnittpunkte berechnen

Zeichnen Sie die Geraden g und h. Berechnen Sie dann den Schnittpunkt der Geraden.

a) g: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ h: $y = -2x + 4$

b) g: $y = -2x + 5$ h: $y = -0.25x - 2$

c) g: $y = 0.5x + 3$ h: $y = \frac{1}{2}x - 1$



Haben zwei Geraden immer einen Schnittpunkt?

Aufgabe 13 Schnittpunkte interpretieren

a) Zwei Taxiunternehmen A und B haben für ihre Fahrgäste folgende Tarife:
A: Grundgebühr Fr. 4 und Fr. 0.25 pro gefahrenen Kilometer.
B: Grundgebühr Fr. 1.50 und Fr. 0.50 pro gefahrenen Kilometer.

- Stellen Sie die Funktionen im *gleichen* Koordinatensystem graphisch dar.
- Welches Unternehmen ist günstiger?

b) Zwei Kerzen werden angezündet.
Kerze 1 ist zu Beginn 10 cm hoch und brennt mit $1 \frac{\text{cm}}{\text{h}}$ hinunter.
Kerze 2 ist zu Beginn 7 cm hoch und nach 5 Stunden noch 6 cm hoch.

- Welche Gleichungen beschreiben das Abbrennen der Kerzen?
- Was bedeutet der Schnittpunkt?

c) Für eine gewöhnliche Glühlampe lassen sich die Kosten K in Abhängigkeit von der jährlichen Einschaltdauer t darstellen durch: $K = 0.018t + 0.30$.
Für eine Energiesparlampe gilt entsprechend: $K = 0.003t + 2.25$ (t in h, K in Fr.).

- Ab welcher Dauer bringt die Energiesparlampe finanzielle Vorteile?
- Interpretieren Sie – mit Einheiten – die „Steigung“ und den „y-Achsenabschnitt“.

Aufgabe 14 abstrakt

Gegeben sind die Gerade g: $y = 2x - 1$ und die Gerade h: $y = -0.5x + 6$.

a) Zeichnen Sie g und h in ein gemeinsames Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt.

c) Welche „spezielle“ Lage haben die beiden Geraden zueinander?

Lösungen

Aufgabe 12

a) S(1.5/1)

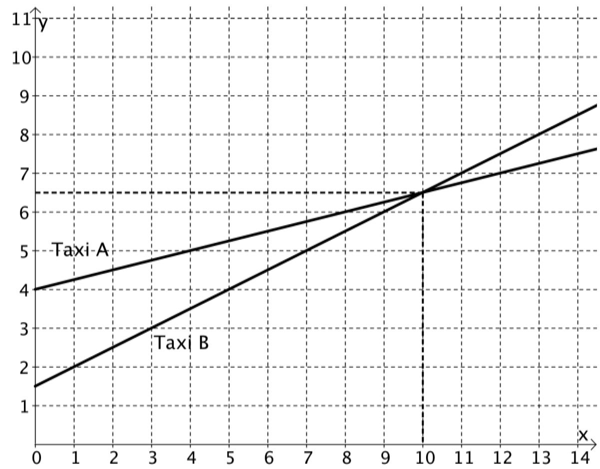
b) S(4/–3)

c) Es gibt keinen Schnittpunkt! Die Geraden sind parallel: sie haben die gleiche Steigung.

Aufgabe 13

a) Schnittpunkt S(10/6.5)

Interpretation:
bei 10 km sind beide Unternehmen gleich teuer.
Bis 10 km ist Taxi B billiger, nachher Taxi A



b) Kerze1: y = –x + 10   (y = Höhe in cm, x = Anzahl h); Kerze2: y = –0.2x + 7

Schnittpunkt S(3.75/6.25); Interpretation: nach 3.75 h sind beide Kerzen gleich hoch, nämlich 6.25 cm

c) ab 130 Stunden Brenndauer

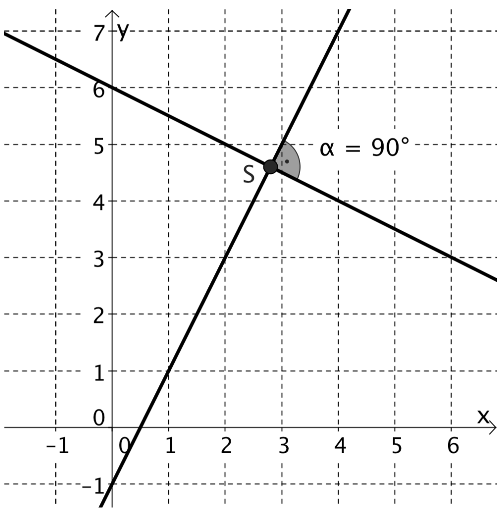
Steigung = Kosten in Fr. pro Stunde Brenndauer; *y-Achsenabschnitt* = Preis der Lampe in Fr.

Aufgabe 14

b) Schnittpunkt S(2.8/4.6)

c) Die Geraden stehen *senkrecht* zueinander.

Wie kann man an den Steigungen der beiden Geraden erkennen, dass sie senkrecht zueinander stehen?



3 Zusammenfassung

Ergänzen Sie den Lückentext!

lineare Funktion ; Steigung ; Gerade ; Änderungsrate ; y-Achsenabschnitt ; Gleichsetzen
Zuordnung ; abhängige ; unabhängigen ; Funktionsgleichung ; Anfangswert ; Realität

Eine Funktion ist eine ________________________________ , welche

einer ________________________________ Variable x die ________________________________ Variable y zuweist.

Funktionen lassen sich auf verschieden Arten darstellen:

mit einer **Wertetabelle**, mit einem **Graphen** oder mit einer ____ .

Mit Hilfe von Funktionen versuchen wir auch, die ________________________________ zu modellieren.

Lautet die Funktionsgleichung

y = ax + b

dann spricht man von einer ____

dabei heisst:

- a _____________________________________ oder ____
- b _____________________________________ oder ____

Der Graph einer linearen Funktion ist eine ________________________________ .

Den **Schnittpunkt** zweier Geraden berechnen wir, indem wir ein 2 × 2 Gleichungssystem lösen.

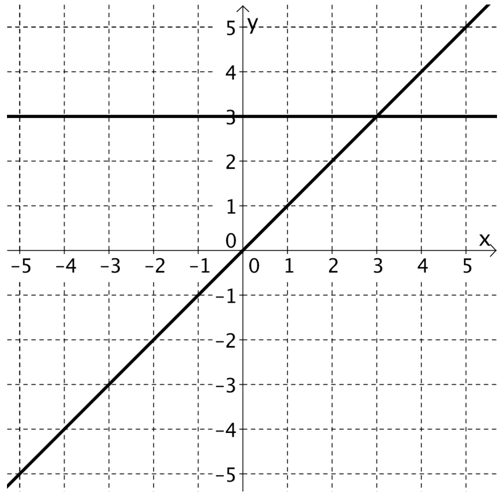
Die Lösung erfolgt am einfachsten durch ______________________________________ der beiden Gleichungen.

Nennen Sie aus Ihrer Sicht **3 Grundaufgaben** im Zusammenhang mit **linearen Funktionen**.

- Erklären Sie, wie Sie diese lösen.
- Diese Aufgaben sollten sie beherrschen, also in vernünftiger Zeit lösen können.

4 Anhang

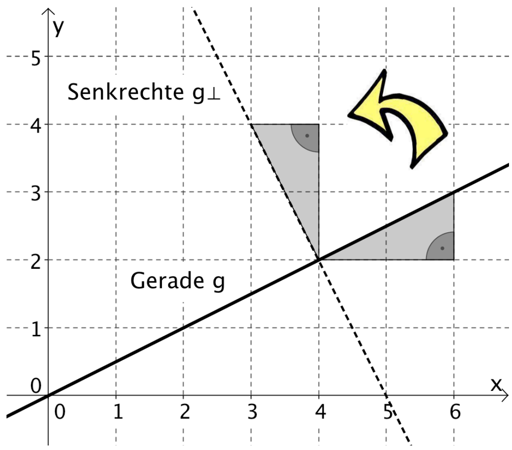
spezielle Lage von Geraden



Nebenan sind zwei Geraden gezeichnet.

- Haben Sie eine „spezielle" Lage? Warum?
- Wie lauten die Gleichungen dieser Geraden?
- Gibt es Ihrer Meinung nach weitere „spezielle" Lagen? Welche?

senkrechte Geraden



Die Gerade g hat offensichtlich die Gleichung y = 0.5x,
also die Steigung a = 0.5.

- Welche Steigung hat eine zu ihr senkrecht verlaufende Gerade?
- Verallgemeinern Sie:
  eine Gerade habe die Steigung a. Welche Steigung hat dann eine zu ihr senkrecht verlaufende Gerade?

Beispiel **senkrechte Geraden**

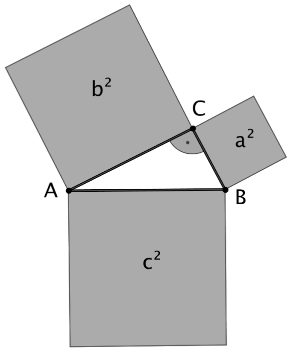
a) Steht die Gerade g: $y = 3x - 1$ senkrecht auf der Geraden h durch die Punkte A(2/1) und B(–4/–1)?

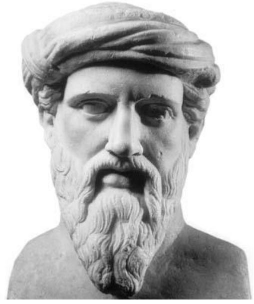
b) Welche Ursprungsgerade h steht senkrecht auf die Gerade g: $y = -\frac{1}{5}x + 3$?

c) Wie lautet die Gleichung der Geraden g, welche die Gerade h: $y = 0.5x$ im Punkt S(2/1) senkrecht schneidet?

Abstand

Beispiel **Abstand Punkt-Punkt**





- Berechnen Sie den Abstand der Punkte A(4/1) und B(1/5).
- Verallgemeinern!
  „Abstandsformel“ für die Punkte A(x_A/y_A) und B(x_B/y_B).

Beispiel **Abstand Punkt-Gerade**

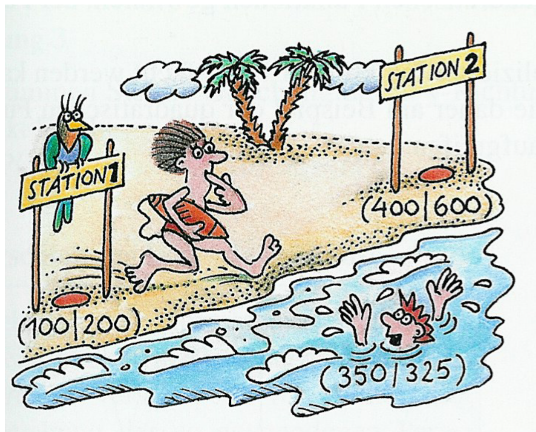
a) Wie weit ist der Punkt P(1/5) von der Gerade g: y = x – 1 entfernt?

Hinweis *Zeichnen Sie die Gerade g und den Punkt P in ein Koordinatensystem. Überlegen Sie, wie man denjenigen Punkt auf der Geraden berechnen kann, der am nächsten bei P liegt. Wie weit ist dieser Punkt von P entfernt?*

Lösung Abstand d = $\sqrt{12.5} \approx 3.54$

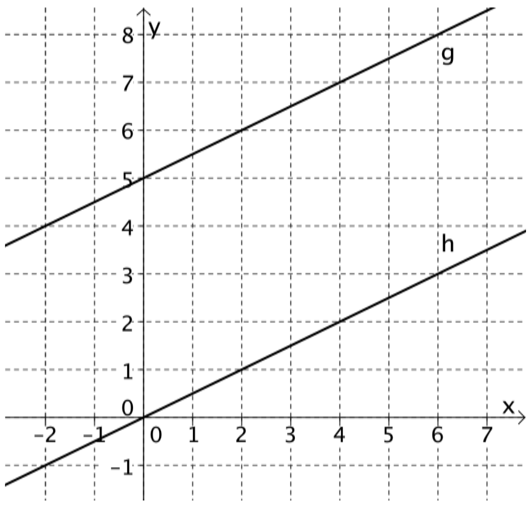
b) Am Strand von „Bucherabuchera“ sieht Rettungsschwimmerin Esmeralda la Santa del mar von der Rettungsstation 1 den David Hasselhoffi hilfeschreiend im Meer taumelnd.
Esmeralda überlegt, wie sie den schönen David am schnellsten retten könnte.
Da sie langsamer schwimmt (2 m/s), als am Strand entlangläuft (4 m/s), entschliesst sie sich möglichst wenig zu schwimmen.

Wo springt sie ins Wasser und wie lange geht es, bis sie bei ihrem David ist? (Angaben in m.)



Lösung Sprung ins Wasser bei S(250/400); benötigte Zeit t = $\frac{250}{4} + \frac{125}{2}$ = 125 Sekunden

Beispiel **Abstand Gerade-Gerade**



Abgebildet sind die beiden Geraden

- g: y = 0.5x + 5 und
- h: y = 0.5x

Die zwei Geraden sind *parallel*, weil sie die *gleiche Steigung* haben.
Berechnen Sie den *Abstand* der beiden Geraden.

Lösung Abstand d = $\sqrt{20} \approx 4.47$

Skalierung anpassen

In der Realität gibt es auch sehr grosse (und sehr kleine) Zahlen.
Die Skalierung (Einteilung) des Koordinatensystems wird dann oft angepasst, um den Überblick zu behalten.

Beachte
sind die Achsen verschieden skaliert (eingeteilt), dann kann man die Änderungsrate bzw. die Steigung nicht mehr schnell „von Auge“ schätzen.

Beispiel **Fallschirm**

Ein Fallschirmspringer öffnet seinen Fallschirm und misst mit Hilfe eines Höhenmessers zu verschiedenen Zeitpunkten nach dem Öffnen des Schirms seine Höhe über dem Erdboden. Nach 10 Sekunden ist er noch 210 m über Boden, nach 25 Sekunden noch 142.5 m.

a) Berechnen Sie die Gleichung der linearen Funktion, die den obigen Zusammenhang beschreibt.

b) Interpretieren Sie – mit Einheiten – die “Steigung” und den “y-Achsenabschnitt”.

c) Machen Sie eine qualitative Skizze des Graphen.

d) Wann trifft er auf die Erde?

Lösung

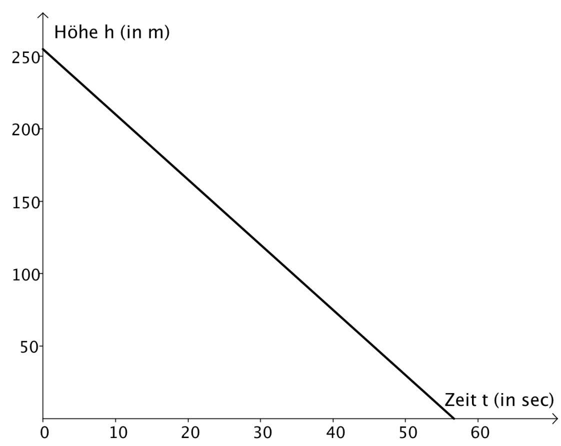
---

a) $H = -4.5t + 255$ (t in Sekunden, h in Meter)

b)
- Steigung = Fallgeschwindigkeit; wie viele Meter er pro Sekunde an Höhe verliert; Einheit: $\frac{m}{sec}$
- y-Achsenabschnitt = Anfangshöhe; aus welcher Höhe der Fallschirm geöffnet wird; Einheit: Meter

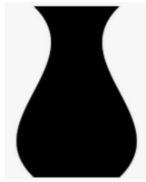
c) vgl. Abbildung

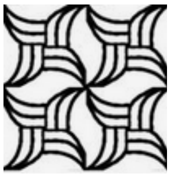
d) „Nullstelle“ berechnen:
$0 = -4.5t + 255 \quad \Rightarrow \quad t = 56.6$; nach ca. 57 Sekunden



Die Achsen sind unterschiedlich skaliert.

Die x-Achse „macht“ 10-er Schritte.
Die y-Achse macht 50-er Schritte

$y = ax + b$

Wie ist es möglich, dass die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?

Albert Einstein