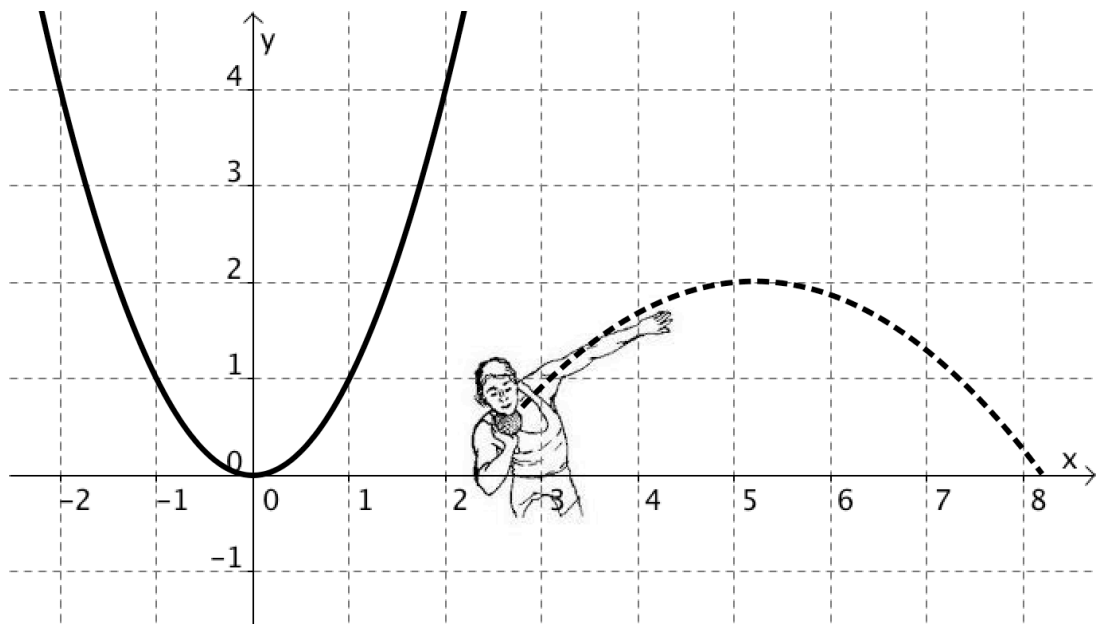


Quadratische Funktionen

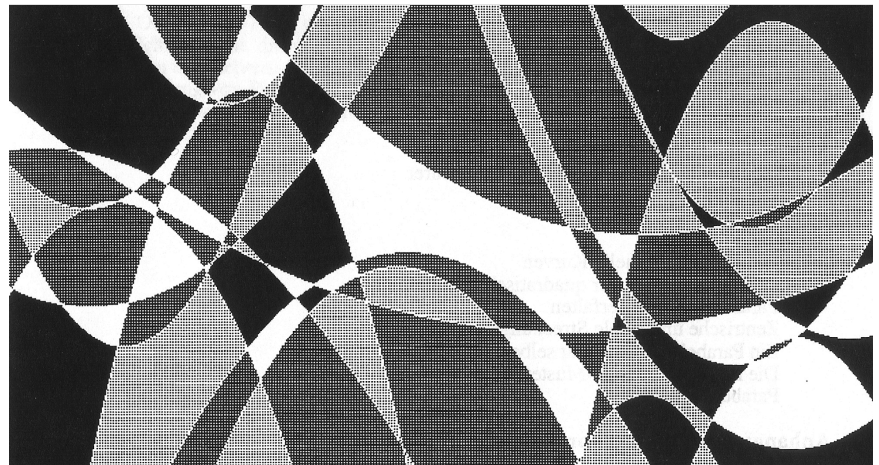


Parabeln zeichnen & beschreiben,
Einfluss der Parameter,
Anwendungen

Parabeln im Sport –



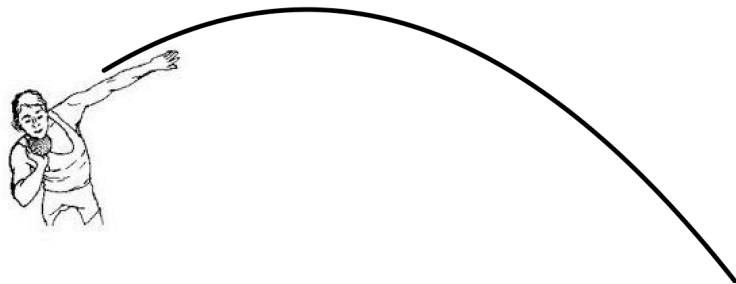
Parabeln in der Kunst –



... und anderswo.



1 Einstieg	3
• Normalparabel	
2 Quadratische Funktionen	5
• Funktionsgleichung $y = ax^2$	
• Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$	
• Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$	
3 Zusammenfassung	15
4 Anhang	16
• Weitere Anwendungen	
• Produktansatz	
• Parabel – geometrische Definition – Herleitung der Gleichung	
• Brennpunkteigenschaft	



1 Einstieg

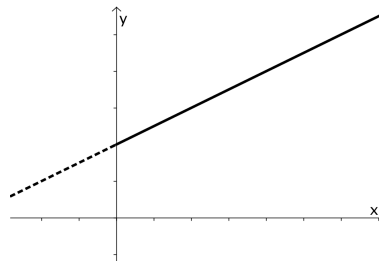


Normalparabel

Bisher kennen Sie lineare Funktionen. Sie haben die Form

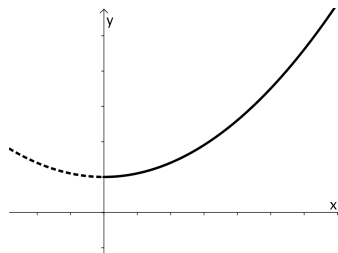
$$y = ax + b$$

Ihr Graph ist eine Gerade:



Im Leben ist aber nicht alles gerade. Manchmal sind die Sachen krumm.

Ein Graph könnte auch so aussehen:



- Interpretieren Sie: was würde ein „krummer“ Graph bedeuten bei: Pflanze, Taxi, Vase ?
- Wo kommen sonst noch „krumme“ Kurven vor?

Offenbar genügt die lineare Funktion hier nicht. Wir brauchen eine neue „Art“ von Funktionsgleichungen.

Beispiel 1 Normalparabel

Zeichnen Sie Ihre erste krumme Kurve. Zeichnen Sie die Normalparabel! Ihre Gleichung lautet:

$$p: y = x^2$$



- Wo liegen alle Punkte, die von zwei (vorgegebenen) Punkten denselben Abstand haben?
- Wo liegen alle Punkte, die von zwei Geraden denselben Abstand haben?
- Wo liegen alle Punkte, die von einem Punkt und einer Geraden denselben Abstand haben?

2 Quadratische Funktionen



Funktionsgleichung $y = ax^2$

Beispiel 2 Einfluss des Parameters a

a) Zeichnen Sie die Normalparabel. Also den Graphen mit der Funktionsgleichung $p: y = x^2$.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $y = -x^2$. **Hinweis** *Sorgfalt mit dem Vorzeichen!*

c) Zeichnen Sie weiter folgende Parabeln:

- $y = 0.5x^2$
- $y = -0.25x^2$
- $y = 2x^2$
- $y = -3x^2$

d) In c) haben Sie verschiedene Parabeln mit der Gleichung der Form $y = ax^2$ gezeichnet. Welchen Einfluss auf das Aussehen der Parabel besitzt der Parameter a? Entwickeln Sie eine „Theorie“!



Merke

- Der Graph mit der Funktionsgleichung $y = ax^2$ ist eine **Parabel**. Sie ist **symmetrisch zur y-Achse**.
- Die **Öffnung** wird durch den Parameter a bestimmt.
- Der Punkt $S(0/0)$ heisst **Scheitelpunkt** der Parabel („Umkehrpunkt“).

Im Folgenden werden wir sehen, dass sich viele Vorgehensweisen, die wir von linearen Funktionen her kennen, auch auf quadratische Funktionen übertragen lassen.



Beispiel 3 Parabel & Punkt

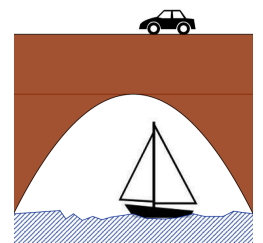
a) Gegeben ist die Parabel $p: y = 0.5x^2$.

- Bestimmen Sie x bzw. y so, dass die Punkte $P(x/8)$ und $Q(-3/y)$ auf p liegen.
- Liegt der Punkt $R(10/51)$ auf, ober- oder unterhalb von p?

b) Die Parabel $y = ax^2$ verläuft durch den Punkt $P(4/4)$. Berechnen Sie den Parameter a.

Beispiel 4 Anwendung: Brücke

Der Brückenbogen ist parabelförmig. Wie nah darf das Schiff unter der Brücke vorbeifahren? Machen Sie sinnvolle Annahmen und dann: Rechnen Sie!

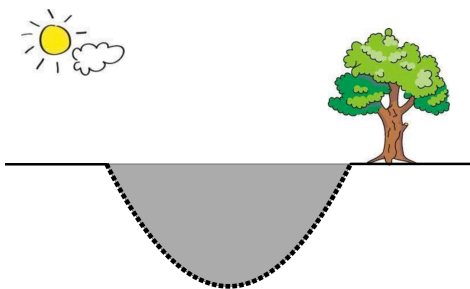


Aufgabe 1 Graph (Parabel) skizzieren, Punktttest

- a) Skizzieren Sie – sauber und mit Farbe – die Parabel $y = -0.25x^2$.
- b) Für welches x liegt der Punkt $P(x/-10)$ auf der Parabel?
- c) Liegt der Punkt $Q(11/-30)$ auf, unterhalb oder oberhalb der Parabel?
- d) Wie unterscheidet sich die Parabel $y^* = \frac{x^2}{4}$ von der in a) gezeichneten Parabel?

Aufgabe 2 Gleichung bestimmen

- a) Der Punkt $P(3/4.5)$ liegt auf der Parabel $y = ax^2$. Bestimmen Sie a .
- b) Der Punkt $Q(-1/-4)$ liegt auf der Parabel $y = ax^2$. Bestimmen Sie a .
- c) Eigenes Beispiel machen!



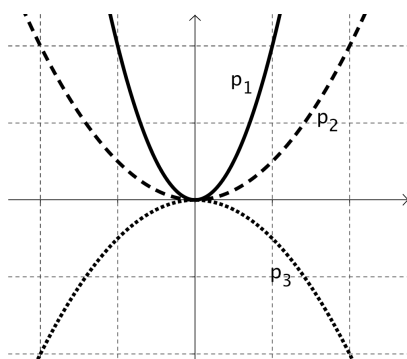
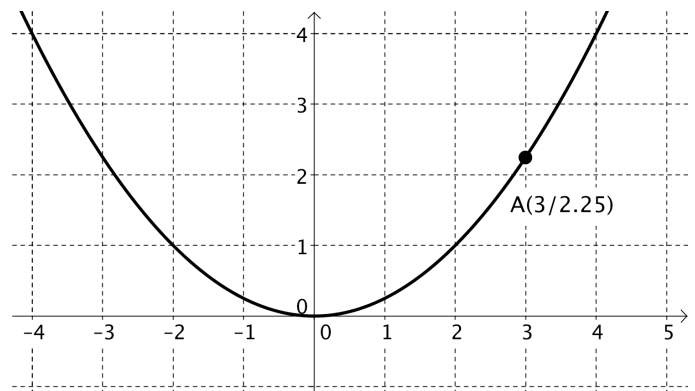
Aufgabe 3 Anwendung (Koordinatensystem einführen!)

Der Boden eines Kanals hat eine parabelförmige Gestalt. Der Kanal ist 4 Meter breit und 2 Meter tief.

- a) Beschreiben Sie den Boden mit Hilfe einer Gleichung.
Hinweis Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein.
- b) Wie tief ist der Kanal 0.5 m vom Ufer entfernt?

Aufgabe 4 Schnittpunkte

- a) Wie lautet die Gleichung der Parabel?
- b) Zeichnen Sie in die Skizze die Gerade $y = 3$ ein. Berechnen Sie die Schnittpunkte.
- c) Zeichnen Sie die Gerade $y = 0.25x + 3$ ein. Berechnen Sie die Schnittpunkte.



Aufgabe 5 überlegen...

Abgebildet sind drei Parabeln: $p_1: y = a_1x^2$, $p_2: y = a_2x^2$, $p_3: y = a_3x^2$. Was lässt sich über die Faktoren a_1 , a_2 und a_3 aussagen?

Lösungen

Aufgabe 1

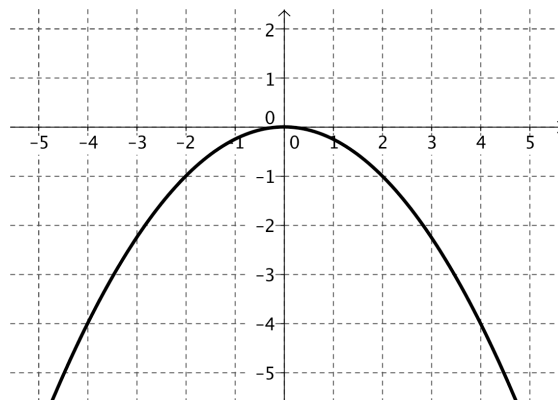
a) vgl. Abbildung

b) $x = \pm \sqrt{40}$

c) Es ist: $y(11) = -30.25 < -30$, d.h. $Q(11/-30)$ liegt *oberhalb*.

d) Gleiche Form, Öffnung aber nach *oben*.

Beachte $\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot x^2 = 0.25 \cdot x^2$



Aufgabe 2

a) $a = 0.5$

b) $a = -4$

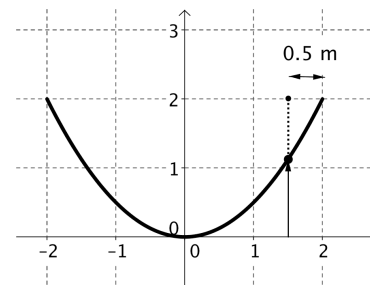
c) Machen!

Aufgabe 3

a) $y = \frac{1}{2} x^2$

b) $y(1.5) = 1.125$

Also ist der Kanal an dieser Stelle $2 - 1.125 = 0.875$ m tief.



Aufgabe 4

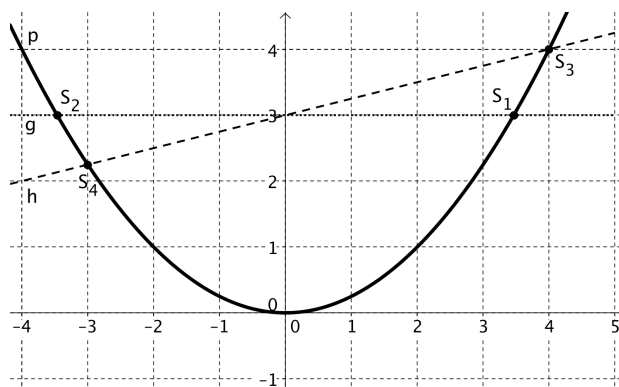
a) $y = 0.25x^2$

b) $S_1(2\sqrt{3}/3); S_1(-2\sqrt{3}/3)$

c) $S_3(-3/2.25); S_4(4/4)$

Beachte

um Schnittpunkte zu berechnen, muss man quadratische Gleichungen lösen!



Aufgabe 5

$a_1 > a_2 > 0; a_3 < 0$ (weil p_2 und p_3 symmetrisch zur x-Achse sind, gilt sogar noch: $a_2 = -a_3$)

(In der Abbildung ist: $a_1 = 1; a_2 = 0.25; a_3 = -0.25$.)



Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$

Wir kennen bereits die Funktionen $y = ax^2$ und deren Graphen, die Parabeln.
Wir wissen weiter, dass

- **a** die **Öffnung** der Parabel (nach oben, nach unten, eng bzw. breit) angibt.
- die Parabel **symmetrisch zur y-Achse** ist.
- der **Scheitelpunkt S** die Koordinaten **S(0/0)** besitzt.

Wir „erweitern“ jetzt die Parabelgleichung um „+c“.

Beispiel 5 Einfluss des Parameters c

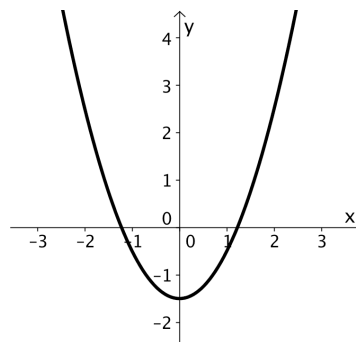
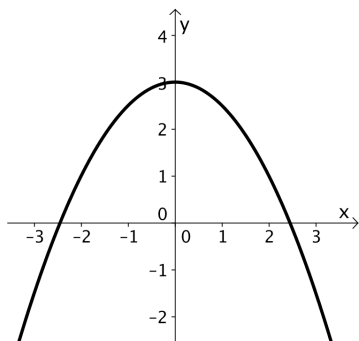
a) Was vermuten Sie: wie sehen wohl die Parabeln aus, welche die Gleichung $y = ax^2 + c$ besitzen?

Hinweis wie unterscheiden sich die Graphen der linearen Funktionen $y = a \cdot x$ und $y = a \cdot x + b$ voneinander?

b) Zeichnen Sie – sauber! – in das gleiche Koordinatensystem die Graphen von

- $y = 0.5x^2$
- $y = 0.5x^2 + 2$ Und: stimmt Ihre Vermutung von a)?

c) Unten sehen Sie zwei Parabeln der Form $y = ax^2 + c$. Was lässt sich über a und c aussagen?



d) Wie lautet der Scheitelpunkt der Parabel p: $y = ax^2 + c$?

*Vielleicht fragen Sie sich: warum schreiben wir nicht: $y = ax^2 + b$?
Das ist eine gute Frage.
Das werden Sie später erfahren. Es spielt aber eigentlich gar keine Rolle,
ob da b oder c steht...*



e) Zeichnen Sie – sauber! – den Graphen der quadratischen Funktion $y = -0.25x^2 + 4$.

Hinweis Sie sollten bereits wissen, wie die Parabel „qualitativ“ aussieht.

f) Geben Sie sich selber einen Wert für a und für c vor. Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen qualitativ.

Im Folgenden lösen wir zwei wichtige Beispiele.



Beispiel 6 Parabel durch zwei Punkte

Die Parabel $p: y = ax^2 + c$ verläuft durch die Punkte $P(2/3)$ und $Q(-1/3.75)$

- a) Bestimmen Sie die Parabelgleichung p.
- b) Berechnen Sie die Nullstellen (Schnitt mit x-Achse) der Parabel.



Merke

- In der Gleichung $y = ax^2 + c$ haben wir die zwei Unbekannten a und c. Wir brauchen also *zwei* Punkte um diese Unbekannten zu bestimmen. Die Vorgehensweise sollte Ihnen nun klar sein: Wir „setzen“ die Punkte in die Gleichung ein und lösen das zugehörige **Gleichungssystem**.
- Die **Nullstellen** einer Funktion sind wichtige Orientierungshilfen für den Verlauf des Graphen. Bei Anwendungen haben Sie oft eine konkrete Interpretation.
- Es sind Vorgehensweisen, die immer und immer wieder auftreten im Zusammenhang mit Funktionen. Es ist unbedingt notwendig, dass Sie sie **verinnerlichen**.



Beispiel 7 Anwendung: Brücke

Der Brückenbogen ist parabelförmig und ist 20 Meter breit und 15 Meter hoch.

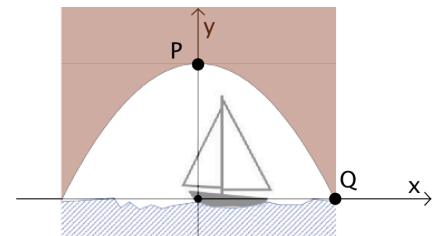
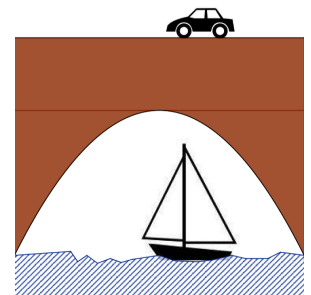
- a) Beschreiben Sie zuerst den Brückenbogen mit Hilfe einer Gleichung.

Hinweis

Dieses Beispiel kommt Ihnen bekannt vor! Wir wählen nun – und das ist neu! – das Koordinatensystem wie abgebildet:

Wie lauten die Koordinaten der Punkte P und Q? Damit lässt sich aber die Parabelgleichung angeben und alle Berechnungen durchführen...

- b) Ein Schiff fährt unter einer Brücke hindurch. Der Mast ist 4 Meter hoch. Wie nah am Ufer darf es vorbeifahren?



- Im Beispiel mit dem Schiff und der Brücke haben wir das Koordinatensystem im Beispiel 4 und im Beispiel 7 unterschiedlich gewählt. Welche Vor- und Nachteile sehen sie bei der jeweiligen Wahl?
- Welches ist *Ihre* bevorzugte Wahl?

Aufgabe 6 Graph (Parabel) skizzieren, Punktttest

- a) Skizzieren Sie die Parabel $y = 0.5x^2 - 3$.
- b) Liegt der Punkt $Q(11/57)$ auf, unterhalb oder oberhalb der Parabel?
- c) Bestimmen Sie die Nullstellen (= Schnittstellen mit der x-Achse) der Parabel.
- d) Skizzieren Sie *qualitativ* folgende Parabeln, indem Sie sich *Scheitelpunkt* und die *Öffnung* der Parabel (*oben/unten* bzw. *eng/weit* im Vergleich mit Normalparabel) überlegen.
- $p_1: y = 3x^2$
 - $p_2: y = -1.5x^2 + 3$
 - $p_3: y = 0.3x^2 - 0.3$

Aufgabe 7 Gleichung bestimmen

- a) Die Punkte $P(1/3)$ und $Q(2/-3)$ liegen auf der Parabel $y = ax^2 + c$.
- Tragen Sie die Punkte P und Q in einem Koordinatensystem ein.
 - Lässt sich bereits – ohne Rechnung – etwas über a und c aussagen?
 - Überprüfen Sie Ihre Überlegungen in b), indem Sie die Parabelgleichung *berechnen*.

Gehen Sie vor wie in Aufgabe a). Eine *qualitative* Darstellung der Punkte genügt!.

- b) $P(3/3); Q(0/7)$ c) $P(-2/0); Q(4/6)$ d) $P(2/8); Q(-2/8)$

Aufgabe 8 Anwendung

- a) Eine Durchfahrt unter einer Brücke hat Parabelform; sie ist 4 m hoch und 6 m breit. Beschreiben Sie den Bogen mit Hilfe einer Gleichung.
Tip Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein.

- b) Wie breit darf die Ladung Strohballen höchstens sein, wenn der Wagen 3.0 m hoch beladen wird?



Aufgabe 9 Schnittpunkte

- a) Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P(-3/1.5)$ und $Q(4/5)$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von g mit der Normalparabel.
- b*) Die Normalparabel soll so verschoben werden, dass sie mit g nur noch einen Schnittpunkt hat. Wie lautet die Gleichung der verschobenen Parabel?
Tip Verschiebung c so bestimmen, dass die entsprechende Gleichung nur eine Lösung hat.

Aufgabe 10 überlegen...

- a) Für welche c besitzt die Parabel
- $y = 0.5x^2 + c$ zwei (eine, keine) Nullstellen?
 - $y = ax^2 + c$, $a < 0$, zwei (eine, keine) Nullstellen?
- b) Wie lautet die Gleichung der gespiegelten Parabel, wenn $y = 0.2x^2 + 2$ gespiegelt wird
- an der x-Achse?
 - an der Geraden $y = 4$?
 - am Punkt $P(0/-1)$?

Lösungen

Aufgabe 6

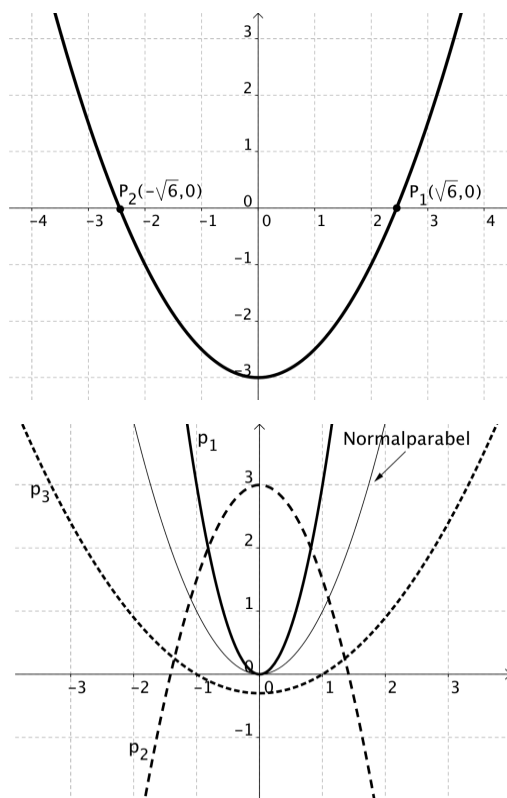
a) vgl. Abbildung

b) Q liegt unterhalb, weil $57 < 57.5$

c) $x_{1,2} = \pm \sqrt{6}$

d) vgl. Abbildung

- p_1 : Scheitel $S(0/0)$, Öffnung: oben, enger
- p_2 : Scheitel $S(0/3)$, Öffnung: unten, enger
- p_3 : Scheitel $S(0/-0.3)$, Öffnung: oben, weiter



Aufgabe 7

a) $a < 0, c > 3; y = -2x^2 + 5$ (Koordinaten von P und Q einsetzen, 2 Gleichungen, 2 Unbekannte)

b) $a < 0, c = 7, y = -\frac{4}{9}x^2 + 7$

c) $a > 0, c < 0, y = 0.5x^2 - 2$

d) Es lässt sich nichts eindeutig aussagen.

Ist $a < 0$, dann ist sicher $c > 0$; ist $a > 0$, dann ist $c > 0$ oder $c < 0$ möglich.

Eine mögliche Gleichung ist: $y = 2x^2$ (also $a = 2$ und $c = 0$)

Aufgabe 8

a) $y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$

b) Gesucht ist x , wenn $y = 3$. Es ist: $x = \pm 1.5$, d.h. höchstens 3 m breit.

Aufgabe 9

a) Geradengleichung: $y = \frac{1}{2}x + 3$. Zwei Schnittpunkte: $S_1(-1.5/2.25); S_2(2/4)$

b) $c = 3.0625$; **Idee** Parabel $y = x^2 + c$ mit der Geraden $y = \frac{1}{2}x + 3$ schneiden.

Dabei c so bestimmen, dass die (quadratische) Gleichung nur *eine* Lösung hat. Dazu muss man die Diskriminante (= Wert unter der Wurzel in der Mitternachtsformel) gleich 0 setzen.

Aufgabe 10

a) Anzahl Nullstellen

- $c < 0$: zwei; $c = 0$: eine; $c > 0$ keine
- $c > 0$: zwei; $c = 0$: eine; $c < 0$ keine

b) gespiegelte Parabel

- $y^* = -0.2x^2 - 2$
- $y^* = -0.2x^2 + 6$
- $y^* = -0.2x^2 - 4$



Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$

Wir kennen bereits die Funktionen $y = ax^2 + c$ und deren Graphen, die Parabeln.
Wir wissen weiter, dass

- **a** die „**Öffnung**“ der Parabel (nach oben, nach unten, eng bzw. breit) angibt und
- **c** die Verschiebung in y-Richtung angibt.
- die Parabel **symmetrisch zur y-Achse** ist.
- der **Scheitelpunkt S** die Koordinaten **S(0/c)** besitzt.

Wir „erweitern“ jetzt die Parabelgleichung um „+bx“.

Wie sehen wohl die Parabeln aus, welche die Gleichung
 $y = ax^2 + bx + c$
besitzen?

Die Antwort ist nicht mehr so einfach... Wir zeichnen deshalb zuerst einige solcher Parabeln!

Beispiel 8 Einfluss des Parameters **b** ...

a) Zeichnen Sie die Parabel mit der Gleichung
 $y = x^2 - 4x + 3$
in ein Koordinatensystem. Sorgfalt!

b) Wo schneidet die Parabel die y-Achse?

c) Wo schneidet die Parabel die x-Achse? *Berechnen Sie die Nullstellen der Parabel!*

d) Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes?

e) Wie könnte man den **Scheitelpunkt berechnen**?

Hinweis Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Nullstellen und dem Scheitelpunkt?



Beispiel 9 Parabel zeichnen & Eigenschaften berechnen

a) Gegeben: $y = -0.5x^2 + 3x - 2.5$.

- Zeichnen Sie die Parabel mit der Gleichung in ein Koordinatensystem. Sorgfalt!
- Wo schneidet die Parabel die y-Achse?
- Wo schneidet die Parabel die x-Achse? Berechnen Sie die Nullstellen der Parabel!
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes!

b) Gegeben: $y = 0.25x^2 + 0.5x - 2$.

Zeichnen Sie die Parabel. Gehen Sie gleich vor wie in a).

Frage

Wir berechnen den Scheitelpunkt also mit Hilfe der Nullstellen!
Was machen wir aber, wenn die Parabel gar keine Nullstellen besitzt?



Beispiel 10 Formel für die Berechnung des Scheitelpunktes

a) Zeichnen Sie die Parabel mit der Gleichung $y = 0.25x^2 - x + 3$.

b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt! (nicht ablesen!!!)

c*) Wie kann man allgemein den Scheitelpunkt einer Parabel $p: y = ax^2 + bx + c$ berechnen?
Geben Sie ein Vorgehen an! Können Sie sogar eine Formel für die x-Koordinate des Scheitelpunktes angeben?

Beispiel 11 Parabel durch drei Punkte

Die Parabel $p: y = ax^2 + bx + c$ verläuft durch die Punkte $P(1/4)$, $Q(3/-1)$ und $R(7/1)$.

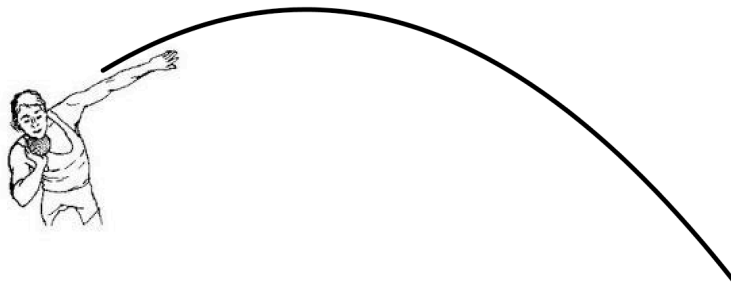
- Tragen Sie die Punkte P, Q und R in einem Koordinatensystem ein.
- Lässt sich bereits – ohne Rechnung – etwas über die Koeffizienten a, b und c aussagen?
- Überprüfen Sie Ihre Überlegungen, indem Sie die Gleichung berechnen.



Merke

- In der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ haben wir die drei Unbekannten a, b und c.
Wir brauchen also drei Punkte um diese Unbekannten zu bestimmen
Die Vorgehensweise ist dann klar: einsetzen, Gleichungssystem lösen.
Wir „setzen“ die Punkte in die Gleichung ein und lösen das zugehörige Gleichungssystem.
- Die Nullstellen und der Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion sind wichtige Orientierungshilfen für den Verlauf des Graphen. Bei Anwendungen haben Sie oft eine konkrete Interpretation.

Beispiel 12 Anwendung: Wurfparabel



Legen sie ein Koordinatensystem. Treffen Sie geeignete Annahmen. Was lässt sich berechnen? Wie?

Aufgabe 11 Graph skizzieren, Punktttest

- a) Skizzieren Sie die Parabel $p: y = -0.5x^2 + 6x - 7$. *qualitativ* (Scheitel bestimmen, „Öffnung“ a berücksichtigen).
- b) Warum muss die Parabel Nullstellen haben? Begründen Sie. Berechnen Sie sie anschliessend.
- c) Berechnen Sie y so, dass $P(15/y)$ auf p liegt.
- d) Berechnen Sie x so, dass $Q(x/15)$ auf p liegt.

Aufgabe 12 Gleichung bestimmen

- a) Die Parabel $p: y = ax^2 + bx + c$ verläuft durch die Punkte $P(1/-1)$, $Q(2/4)$ und $R(4/8)$.
- Tragen Sie die Punkte P, Q und R in einem Koordinatensystem ein.
 - Lässt sich bereits – *ohne* Rechnung – etwas über die Koeffizienten a , b und c aussagen?
 - Überprüfen Sie Ihre Überlegungen, indem Sie die Gleichung *berechnen*.

Gehen Sie vor wie in a). Es genügt eine *qualitative* Darstellung der Punkte.

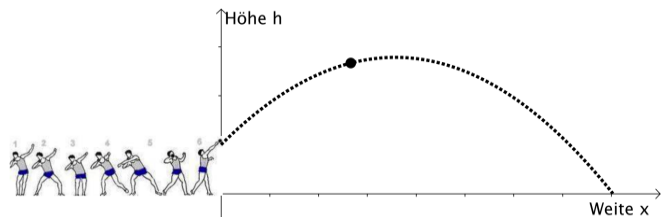
- b) $P(-2/3)$; $Q(2/3)$; $R(4/6)$ c) $P(1/4)$; $Q(4/7)$; $R(7/1)$ d) eigenes Beispiel

Aufgabe 13 Anwendung

Bei den olympischen Spielen 1972 wurden Kugelstösse erstmals mit Hilfe von Kameras analysiert.

Ziel solcher Analysen ist es, die Wurftechnik zu verbessern. Der Amerikaner Woods gewann die Goldmedaille. Seine Kugel flog auf der Kurve

$h = -0.0433x^2 + 0.839x + 2.15$ (alle Angaben in Meter).



- a) Auf welcher Höhe hat er die Kugel abgestossen? Und: welche (grösste) Höhe hat die Kugel erreicht?
- b) Wie gross war die Siegesweite?

Aufgabe 14 Schnittpunkte

Berechnen Sie die Schnittpunkte. Machen Sie zuerst eine qualitative Skizze.

- a) $y = x + 2$; $y = x^2 - 4x - 4$ b) $y = -x^2 - 4x$; $y = 0.25x^2 - 4$ c) $y = 0.25x^2$; $y = x + b$ für $b = 3; -1; -3$

Aufgabe 15 überlegen...

- a) Von der Parabel $y = ax^2 + bx + c$ kennt man die Öffnung $a = 2$ und den Scheitel $S(2/-4)$. Skizzieren Sie die Parabel qualitativ. Bestimmen Sie anschliessend Sie b und c .
- b) Die Parabel $y = -0.25x^2 + 5$ wird um 4 Einheiten nach rechts verschoben. Wie lautet die Gleichung der verschobenen Parabel? **Hinweis** *qualitative Skizze anfertigen!*
- c) Die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitelpunkt $S(1/4)$ und geht durch den Punkt $P(3/0)$. Bestimmen Sie a , b und c .
- d) Wie lautet die Gleichung der gespiegelten Parabel, wenn $y = x^2 + 4x$ gespiegelt wird an
- der x -Achse?
 - der y -Achse?
 - am Punkt $P(1/1)$?

3 Zusammenfassung

Ergänzen Sie den Lückentext!

Verschiebung ; Parabel ; Brückenbögen ; Scheitelpunkt ; Öffnung
 $y = ax^2 + bx + c$; quadratischen Funktion ; Wurfparabeln ; $-\frac{b}{2a}$

Lautet die Funktionsgleichung

$$y = ax^2 + c$$

dann ist der Graph dieser _____ eine
_____, welche symmetrisch zur y-Achse ist.

Die Parameter a und c bestimmen das Aussehen, wobei

- a die _____ der Parabel, und
- c die _____ in y-Richtung angibt.

Der „Umkehrpunkt“ S(0/c) heisst _____

Nullstellen und **Schnittpunkte** berechnen wir wie bei den linearen Funktionen.

Die allgemeine quadratische Funktion besitzt die Gleichung

Der Parameter b bewirkt, dass der Scheitelpunkt nicht mehr auf der y-Achse liegt.

Für die x-Koordinate des Scheitelpunktes haben wir eine Formel hergeleitet. Sie lautet: $x_s =$ _____

Als typische Anwendungen von quadratischen Funktionen haben wir kennengelernt:

_____ und _____.

3

Nennen Sie aus Ihrer Sicht **3 Grundaufgaben** im Zusammenhang mit **quadratischen Funktionen**.

- Erklären Sie, wie Sie diese lösen.
- Diese Aufgaben sollten sie beherrschen, also in vernünftiger Zeit lösen können.

4 Anhang



Weitere Anwendungen

Aufgabe Lernen Sie bald Autofahren?

Je schneller man fährt, umso länger ist der Bremsweg. Macht Sinn! Nur: wie lautet der genaue Zusammenhang?

Es gibt eine Faustregel:

$$b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

dabei bedeutet:

- b = Bremsweg in m
- v = Geschwindigkeit in km/h

a) Zeichnen Sie einen sinnvollen Graphen. Wählen Sie allenfalls auf der „x-Achse“ eine andere *Skalierung*.

b) Stellen Sie sich selber einige Fragen in diesem Zusammenhang und beantworten Sie sie.

c) Welche Gegebenheiten wirken sich – neben der Geschwindigkeit – wohl auch auf die Länge des Bremsweges aus? Wie müsste man dann die obige Gleichung „anpassen“?

Aufgabe Action!

Wird aus einem Flugzeug in der Höhe n (in m) mit der Geschwindigkeit v (in m/s) ein Gegenstand abgeworfen, so bewegt er sich (näherungsweise) auf einer Parabel mit der Gleichung:

$$y = -\frac{5}{v^2} x^2 + h.$$



a) Ein Flugzeug fliegt mit 6 m/s und wirft in der Höhe von 400 m ein Versorgungspaket ab. In welcher Entfernung von der Abwurfstelle landet das Paket?

b) Lösen Sie a) für eine

- doppelt so grosse Geschwindigkeit
- eine doppelt so grosse Höhe.

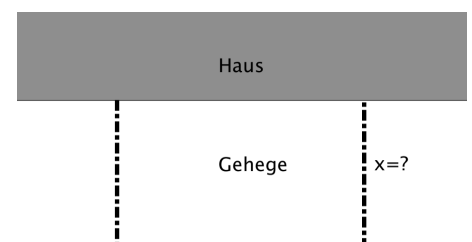
Was stellen Sie fest?

Aufgabe Haben Sie Meerschweinchen?

a) Sie möchten ein Gehege bauen so, dass seine Meerschweinchen möglichst viel Auslauf haben. Der Zaun, den Sie dafür zur Verfügung haben, ist 20 m lang. Wie sollen Sie das Gehege bauen?

b) Welches Rechteck mit Umfang 20 cm hat den grössten Flächeninhalt?

c) Lösen Sie b) allgemein für den Umfang U .





Produktansatz (Nullstellenansatz) für die Parabelgleichung

Bisher

Gegeben: Parabelgleichung, **gesucht:** Nullstellen

Jetzt (umgekehrte Fragestellung)

Gegeben: Nullstellen, **gesucht:** Parabelgleichung

Schritt 1

Zeichnen Sie eine Parabel, welche die beiden Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$ besitzt.

- Wie viele solcher Parabeln gibt es?
- Wie würden Sie die Gleichung einer solchen Parabel angeben?

Schritt 2

a) Gegeben ist die Gleichung $y = (x + 2) \cdot (x - 4)$.

Multiplizieren Sie aus und schreiben Sie die Gleichung in der Form $y = ax^2 + bx + c$.

b) Wie lauten die Nullstellen der Parabel aus a) ?

c) Wie lauten die Nullstellen der Parabel $y = (x - 3)(x + 7)$?

d) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, welche

- die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$ besitzt.
- die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$ besitzt.
- die Nullstellen x_1 und x_2 besitzt (allgemein!)

e) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, welche nur eine *einzig*e Nullstelle besitzt bei $x_1 = 2$.

Schritt 3

a) Gegeben ist die Parabelgleichung $y = 0.5 \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$.

- Wie lauten die Nullstellen?
- Wie gross ist die Öffnung a?

b) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, welche die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$ und die Öffnung $a = 2$ besitzt.

c) Der **Produktansatz** (Nullstellenansatz) einer quadratischen Funktion lautet allgemein:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Erklären Sie!



Schritt 4

a) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, welche die einzige Nullstelle $x_1 = 2$ und die Öffnung $a = 0.5$ besitzt.

b) Skizzieren Sie *qualitativ* den Graphen von

- $y = (x - 3)^2$. Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes?
- $y = 0.5(x - 3)^2$. Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes?
- $y = 0.5(x - 3)^2 + 7$. Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes?

c) Wie lautet der Scheitelpunkt der Funktion

$$y = a(x - d)^2 + e?$$

Diese Form heisst auch **Scheitelpunktsform** der quadratischen Funktion. Warum wohl?

d) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, welche die Öffnung $a = 0.5$ und den Scheitel $S(2/-4)$ besitzt. Wo schneidet die Parabel die y-Achse?



Aufgabe zum Produktansatz

- a) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, die die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$ besitzt.
- b) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, die die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$ besitzt und nach unten geöffnet ist.
- c) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, die die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$ besitzt.
- d) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, die die einzige Nullstelle $x = 4$ besitzt und nach unten geöffnet ist.
- e) Zeichnen Sie eine Parabel die die Nullstellen $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$ besitzt. Wie viele Möglichkeiten haben Sie? Geben Sie die Gleichung einer solchen Parabel an!
- f) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, die die Nullstellen $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$ besitzt und durch den Punkt $P(2/7.5)$ verläuft.
- g) Eine Parabel hat den Scheitelpunkt $S(-3/-1)$ und die Öffnung $a = 4$. Geben Sie die Parabelgleichung in der Form $y = ax^2 + bx + c$ an.
- h) Eine Parabel besitzt den Scheitelpunkt $S(2/2)$ und verläuft durch den Punkt $N(12/0)$. Wo schneidet die Parabel die y-Achse?

Lösungen

- a) Die allgemeine Form lautet: $y = a(x - 3)(x + 1)$.
Als einfachstes Beispiel setzen wir die $a = 1$ (Normalparabel) und erhalten: $y = (x - 3)(x + 1)$
oder in ausmultiplizierter Form: $y = x^2 - 2x - 3$
- b) $y = -(x - 3)(x + 1) = -x^2 + 2x + 3$ c) $y = x(x + 3) = \dots$ d) $y = -(x - 4)^2 = \dots$
- e) $y = (x - 5)(x + 3) = \dots$
- f) Ansatz über Nullstellen: $y = a(x - 5)(x + 3)$. Dann P einsetzen $\Rightarrow a = -0.5 \Rightarrow y = -0.5(x - 5)(x + 3)$
Alternative: Parabelgleichung durch die drei Punkte $N_1(5/0)$, $N_2(-3/0)$ und $P(2/7.5)$.
- g) $y = 4(x + 3)^2 - 1 = 4x^2 + 24x + 35$
- h) Ansatz: $y = a(x - 2)^2 + 2$. Dann N einsetzen $\Rightarrow y = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{25}x + \frac{48}{25}$
Alternative: Parabelgleichung durch die drei Punkte $N(12/0)$, $N^*(-8/0)$ und $S(2/2)$.
Die Parabel schneidet die y-Achse im Punkt $Y(0/\frac{48}{25})$.



Zusatzaufgabe

Jemand hat die Aufgabe b) wie folgt gelöst:

- 1.Schritt: Produktansatz: $y = (x - 3)(x + 1)$ und ausmultipliziert: $y = x^2 - 2x - 3$
- 2.Schritt: nach unten öffnen: wechse Vorzeichen bei x^2 ! Resultat: $y = -x^2 - 2x - 3$.

Stimmt das?



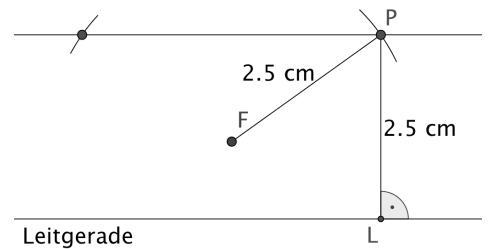
Parabel – geometrische Definition – Herleitung der Gleichung

Die Punkte, die von einer Geraden und einem Punkt den gleichen Abstand haben, liegen auf einer „Kurve“. Diese Kurve heisst **Parabel**.

Aufgabe Konstruktion

a) Zeichnen Sie eine Gerade und einen Punkt F, der 1 cm weit von der Geraden entfernt ist. Konstruieren Sie mindestens 15 Punkte, deren Abstand von F und der Geraden gleich ist. Verbinden Sie die Punkte zu einer Kurve.

Tip In der Abbildung ist die Konstruktion eines Punktes ausgeführt, der von Gerade und Punkt den Abstand 2.5 cm hat.



b) Wählen Sie in einer jeweils *neuen* Zeichnung den Abstand von F zur Leitgeraden nun

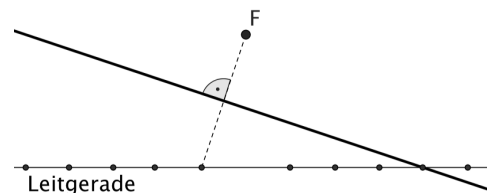
- 2 cm
- 4 cm

c) Sie haben jetzt drei Kurven gezeichnet. Was ist diesen Kurven gemeinsam und worin unterscheiden sie sich?

d) Auf der nächsten Seite gibt's Parabeln mit einem Gerade-Kreis-Muster...

e) Hüllkurve

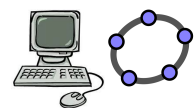
- Zeichnen Sie eine (waagrechte) Leitgerade und einen Brennpunkt F im Abstand $p = 2$ cm.
- Tragen Sie dann auf der Leitgeraden vier, fünf Punkte nach rechts und links ab. Verbinden Sie diese Punkte mit F (nur dünn zeichnen).
- Zeichnen Sie nun mit dem Geodreieck die Mittelsenkrechten zu den einzelnen Verbindungsstrecken. Erkennen Sie eine Parabel?



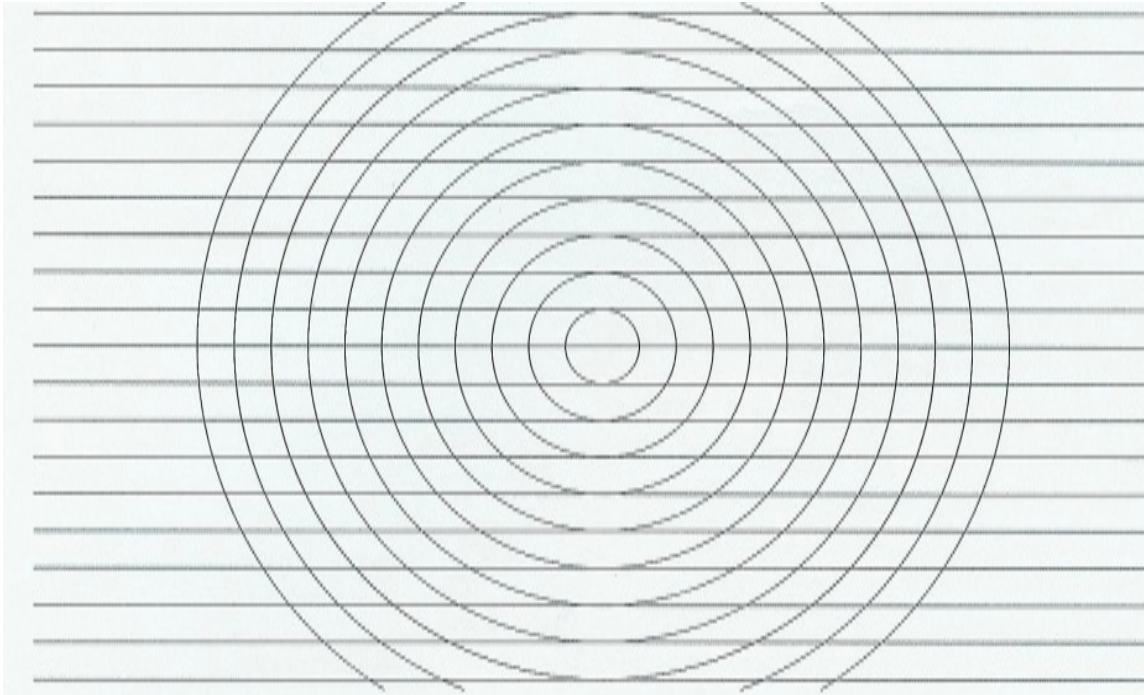
In der Abbildung ist *eine* Mittelsenkrechte eingezeichnet.

Die Parabel wird hier von Geraden „eingehüllt“. Die Parabel ist die sogenannte Hüllkurve dieser (unendlich vielen) Geraden. Die einzelnen Geraden sind Tangenten an die Parabel.

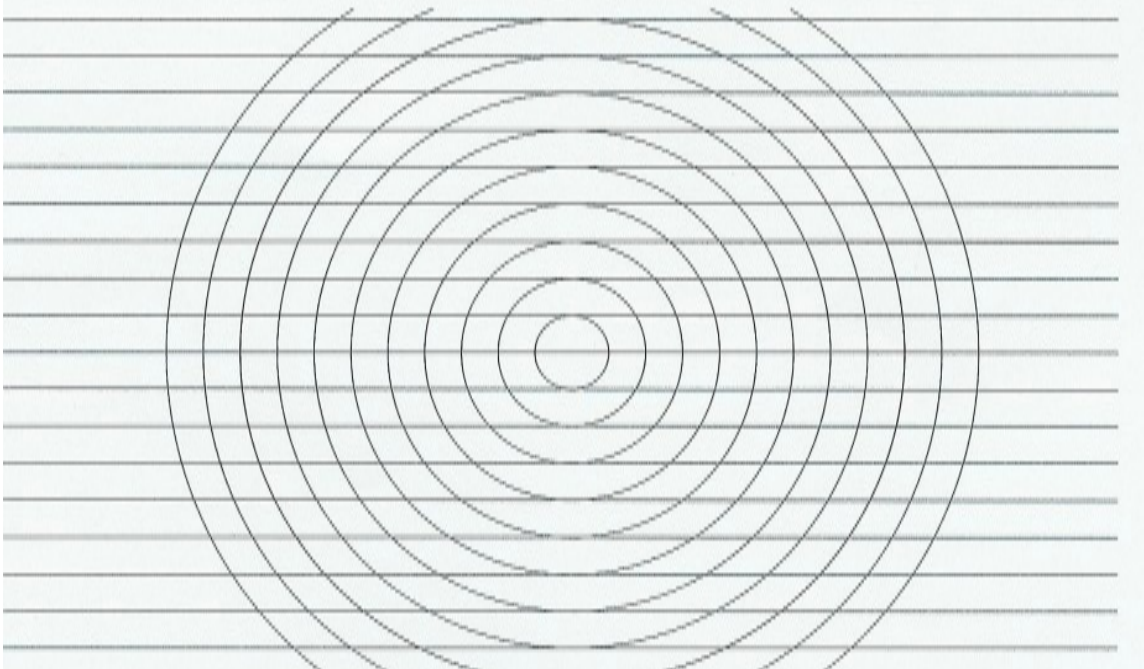
Eine Animation dazu ist die geogebra Datei: [parabel.hüllkurve.ggb](#)



- Wählen Sie eine Gerade aus. Markieren Sie alle Punkte, die gleich weit vom Mittelpunkt und von der von Ihnen gewählten Gerade entfernt ist. Ergänzen Sie die Punkte zu einer Parabel.
- Wählen Sie eine andere Gerade aus, und wiederholen Sie die Schritte von oben noch einmal.



- Als Parabelprofi können Sie jetzt in *ein* Bild auch *mehrere* Parabeln einzeichnen.



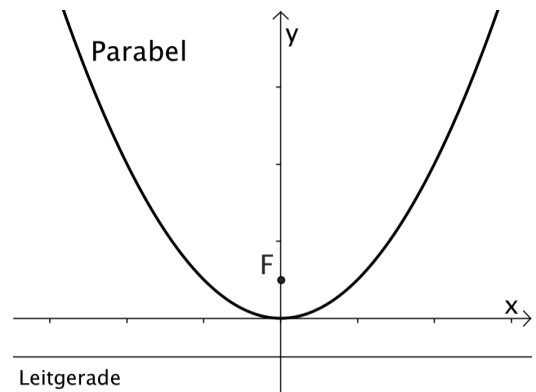
Aufgabe Herleitung der Gleichung

Die Parabel ist als die Kurve definiert, die dadurch festgelegt ist, dass jeder Parabelpunkt P den selben Abstand zum Brennpunkt F und zur Leitgeraden (Punkt L) hat.

Wenn wir die Parabel mit einer Gleichung beschreiben wollen, müssen wir sie in einem „geeigneten“ Koordinatensystem betrachten.

Wir legen das Koordinatensystem so, dass der Scheitelpunkt der Parabel im Ursprung zu liegen kommt.

Daraus lässt sich die „Parabelgleichung“ herleiten...



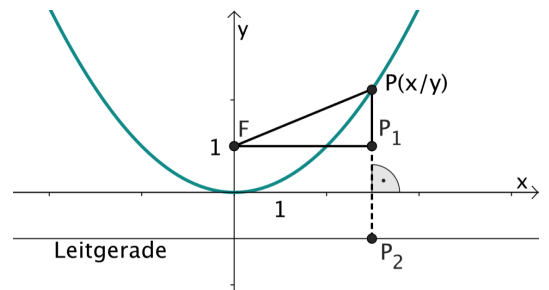
Wir gehen von einer Parabel aus mit $p = 2$.

1 Zeichnen Sie zuerst die Parabel und legen Sie *anschliessend* das Koordinatensystem wie angegeben hinein.

2 Welche Koordinaten hat der Brennpunkt? Wie lautet die Gleichung der Leitgeraden?

3 Sei $P(x/y)$ ein Punkt auf der Parabel. Versuchen Sie eine Gleichung zwischen x und y aufzustellen.

Tipp *Pythagoras auf das eingezeichnete Dreieck anwenden. Zudem gilt: $FP = PP_2$.*



4 Lösen Sie die Gleichung nach y auf, um die Parabelgleichung in die Form $y = ax^2$ zu bringen. Welchen Wert besitzt a ?

5 Führen Sie die Rechnung für allgemeines p durch und leiten Sie somit den allgemeinen Zusammenhang zwischen p und a her.

Ist p der Abstand vom Brennpunkt F zur Leitgeraden und liegt der Scheitelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems, so gilt:

$$y = \frac{1}{2p} x^2.$$

Auf der nächsten Seite steht mehr zum Namen „Brennpunkt“.

Parabolspiegel

Eine *Satellitenempfangsanlage* hat einen Parabolspiegel mit einem Durchmesser von 120 cm und einer Tiefe von 20 cm.

- Bestimmen Sie den Parameter p der Parabel.

b) Die eigentliche Empfangsantenne befindet sich im Brennpunkt der Parabel, weil sich dort die Strahlen bündeln. Wie weit ist sie vom Scheitelpunkt entfernt?

c) Auf youtube gibt es viele „Experimente“ zu Brennpunkt/Parabolspiegel ...





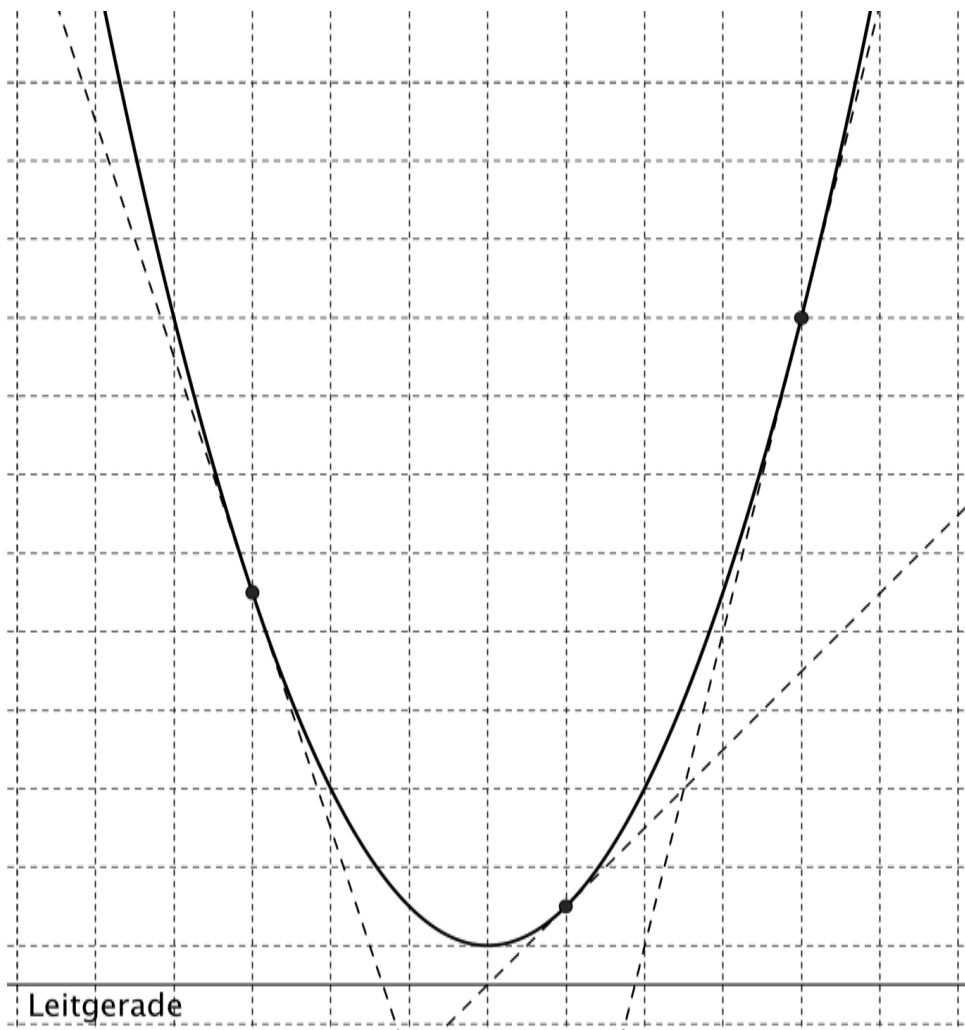
Brennpunkteigenschaft der Parabel

Strahlen fallen senkrecht von „oben“ ein und werden an der Parabel reflektiert. Die reflektierten Strahlen haben eine spezielle Eigenschaft: sie verlaufen alle durch einen *gemeinsamen* Punkt. Dieser Punkt heisst *Brennpunkt* F (vom engl.: „focus“). Man spricht von der Brennpunkteigenschaft.



Die Parabel ist die einzige Kurve, welche die Brennpunkteigenschaft besitzt!

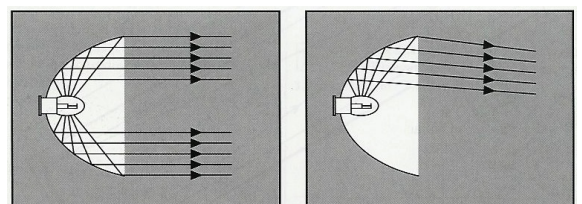
Wo liegt der Brennpunkt der abgebildeten Parabel? Konstruieren Sie ihn!



Überall, wo Strahlen *gebündelt* werden müssen, spielt die Parabel eine zentrale Rolle: Satellitenschüssel, Scheinwerfer, ...

Bringt man den Glühfaden der Lampe möglichst genau in den Brennpunkt eines Parabolspiegels, so wird das abgestrahlte Licht gebündelt und tritt nach vorn parallel aus dem Scheinwerfer, so dass es sehr weit reicht (Abb. links).

Beim Abblendlicht sitzt der Glühfaden etwas vor dem Brennpunkt, so dass das Lichtbündel nicht parallel, sondern zusammenlaufend ist (Abb. rechts).





$$y = x^2$$