Name Datum

Logarithmen
&
Exponentialfunktionen

Logarithmen, Logarithmengesetze
Potenz- und Exponentialgleichungen
Exponentialfunktionen

Inhalt

0 Rückblick – Potenzen & Wurzeln

Rückblick 1 Können!

a) Potenz

- $A^{n} =$
- $A^{-n} =$
- $A^{1/n} =$

b) Potenzgesetze

- Potenzen mit gleicher Basis: $A^{n} \cdot A^{m} =$
- Potenzen mit gleichem Exponenten: $A^{n} \cdot B^{n} =$
- Potenz einer Potenz: $(A^{n})^{m} =$

Rückblick 2 Potenzen im Kopf...

Berechnen Sie.

a) $2^{5} =$

b) $2^{-3} =$

c) $0.1^{2} =$

d) $0.5^{-2} =$

e) $\sqrt[3]{64} =$

f) $9^{0.5} =$

Schätzen Sie.

g) $0.9^{100} =$

h) $5^{-100} =$

i) $0.5^{-100} =$

j) $20^{0.25} =$

Rückblick 3 Algebra for ever

a) $(-y)^{3} \cdot (xy)^{2} =$

b) $(x^{-2})^{3} \cdot x^{n} =$

c) $\dfrac{x^{5} - x^{4}}{x^{5} - x^{3}} =$

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} =$

1 Einstieg

Wir kennen bereits *Potenzgleichungen* $x^n = a$

Diese lösen wir mit Hilfe der *n-ten Wurzel* $x = \sqrt[n]{a}$

Beispiel 1 **Potenzgleichungen**

Lösung ca.20%

a) Eine Schrift wird mit einem Fotokopiergerät mehrmals vergrössert. Nach der sechsten Vergrösserung sind die Buchstaben, die im Original nur 4 mm hoch waren, 12 mm hoch.

- Die Aufgabe führt auf die Potenzgleichung
  $$4x^6 = 12.$$
  Erklären Sie!

- Wie (um wie viele %) vergrössert das Kopiergerät?

b) Eine Tierpopulation wird von einem Virus befallen. Jedes Jahr stirbt ein gewisser Prozentsatz.
Zu Beginn waren es 10'000 Tiere. Nach 4 Jahren leben noch 3'000.

- Wie viele % sterben pro Jahr?

- Wie viele hat es noch 7 Jahre nach Beginn der Infektion?

Lösung ca. 26%, ca. 1220

Die n-te Wurzel ist also ein Hilfsmittel, wie man Potenzgleichungen lösen kann!

Auch der Logarithmus ist ein solches Hilfsmittel! Mit dem Logarithmus kann man sogenannte *Exponential-gleichungen* lösen!

Was sind Exponentialgleichungen?

Beispiel 2 **Exponentialgleichungen**

a) Eine Schrift wird mit einem Fotokopiergerät mehrmals vergrössert. Die Vergrösserung beträgt 25%. Buchstaben, die im Original nur 4 mm hoch waren, sind nun 19 mm hoch.

- Wie *oft* vergrösserte das Kopiergerät?

- Vergleichen Sie mit der Fragestellung im Beispiel 1a). Worin genau liegt der Unterschied?

b) Eine Tierpopulation wird von einem Virus befallen. Jedes Jahr sterben 30%. Zu Beginn waren es 10'000 Tiere. Formulieren Sie eine Frage, die auf eine Exponentialgleichung führt. Stellen Sie die Gleichung auf!

Ergänzen Sie den folgenden Lückentext!

Bei **Potenzgleichungen** _______________ ist gesucht nach _______________________________________

Die Lösung ist die n-te Wurzel __________________________

Bei **Exponentialgleichungen** _______________ ist gesucht nach _________________________________

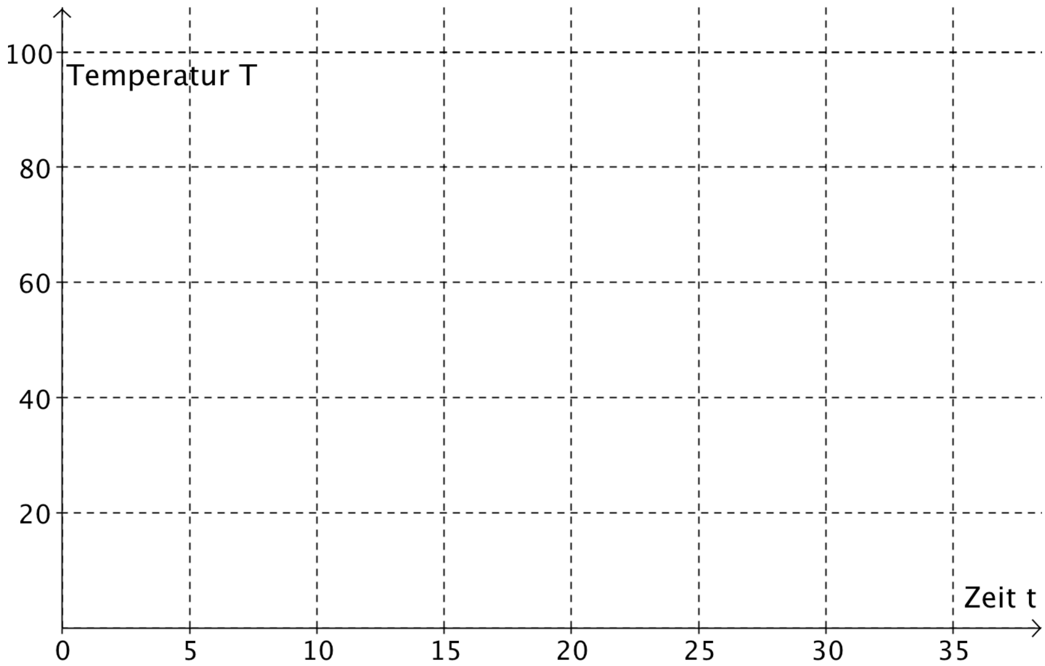
Die Lösung ist der Logarithmus ____________________________

In Worten: Der **Logarithmus** $\log_b a$ ist ____

$\log_b a$ ist diejenige Zahl ____

Beispiel 3 **Kaffee**

Wir stellen einen heissen Kaffee in einen 20 °C warmen Raum. Was passiert?
Er kühlt sich ab. Aber wie?
Wir nehmen an, dass die Anfangstemperatur des Kaffees 90 °C beträgt.



Die Temperatur verändere sich gemäss der Formel (Funktion!)

$$T = 70 \cdot 0.9^t + 20 \quad \text{(T in °C, t in min)}$$

Es handelt sich um eine sogenannte Exponentialfunktion.

a) Wie warm ist der Kaffee nach 10 Minuten?

b) Skizzieren Sie den Graphen.

c) Wann hat der Kaffee Trinktemperatur (60 °C)?

2 Logarithmen & Exponentialfunktionen

AUSWENDIG!!!

Logarithmus

Exponent

$10^2 = 100$ Potenzwert

Basis

$\log_{10} 100 = 2$ Logarithmus

Numerus

Definition

$\log_b a$ („Logarithmus von a zur Basis b“) ist ein **Exponent**.
Es ist **diejenige Zahl, mit der ich (die Basis) b potenzieren muss, um a zu erhalten**.

Beispiel *$\log_2 8$ bedeutet: $2^? = 8$, also ist: $\log_2 8 = 3$*

Beispiel 4 **im Kopf – ☺ – mit Hilfe der Definition!**

a) $\log_5 25 =$

b) $\log_{10} 10'000 =$

c) $\log_2 \frac{1}{2} =$

d) $\log_7 7^5 =$

e) $\log_{10} 0.01 =$

f) $\log_4 \frac{1}{64} =$

g) $\log_3 1 =$

h) $\log_6 \sqrt{6} =$

i) $\log_3 \frac{1}{81} =$

j) $\log_{20} \frac{1}{\sqrt[3]{20}} =$

k) $\log_{1/9} 3 =$

l) $\log_8 \frac{1}{2} =$

m) $\log_4 8 =$

n*) $\log_{32} \frac{1}{4} =$

Beispiel 5 **denken!**

a) $\log_b b^n =$

b) $\log_b \frac{1}{b} =$

c) $\log_a \sqrt[n]{a^m} =$

d) $\log_b 1 =$

e) $\log_c (c^x)^y =$

f) $\log_b 0 =$

g) $\log_a \sqrt[5]{a^2} =$

h) $\log_b \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} =$

i) $\log_2(\log_4 16) =$

j) $\log_5(\log_2 \sqrt[5]{2}) =$

k) $4^{\log_4 16} =$

l) $4^{\log_4 8} =$

m) $4^{\log_4 7} =$

n) $a^{\log_a x} =$

o) $\log_4 x = 3$, $x =$

p) $\log_x 8 = 3$, $x =$

q) $\log_3 x = 4$, $x =$

r) $\log_x 10'000 = 2$, $x =$

s) $\log_{0.5} x = 2$, $x =$

t) $\log_x 1 = 0$, $x =$

„Normalerweise“ gehen Logarithmen (so wie Wurzeln!) nicht so schön auf. Wir können sie dann (wie Wurzeln!) auf dem TR berechnen. Merken Sie sich die entsprechenden Tasten!

Beispiel 6 **log auf TR**

Berechnen Sie die Logarithmen auf dem TR. Versuchen Sie vorher eine Schätzung!

a) $\log_6 30 =$

b) $\log_3 30 =$

c) $\log_4 3 =$

d) $\log_{0.5} 0.2 =$

lg = Zehnerlogarithmus = Logarithmus zur Basis 10

Abkürzende Schreibweise statt: $\log_{10}$... schreiben wir kürzer: log ... oder lg ...

Beispiel *log 1’000 = 3 , lg 0.1 = –1*

Beispiel 7 **Zehnerlogarithmus**

a) log 1’000’000 =

b) $\lg \frac{1}{100} =$

c) $\log 10^n =$

d) $\log \sqrt[3]{100} =$

e) lg (lg 10) =

f) $10^{\lg a} =$

g) bis l) Berechnen Sie die Zehnerlogarithmen auf dem TR. Versuchen Sie aber vorher eine Schätzung!

g) lg 12 =

h) lg 101 =

i) log 1 =

j) log 50 =

k) lg 0.5 =

l) log (–2) =

ln = natürlicher Logarithmus = Logarithmus zur Basis e

Auf dem TR gibt es eine „Logarithmus-Taste“ zu einer „vorinstallierten“ Basis!
Diese Basis, die wichtiger ist als alle anderen (!), ist die sogenannte **euler’sche Zahl e = 2.71...**
Warum diese komische Zahl so wichtig ist, werden wir später erfahren...

Abkürzende Schreibweise statt: $\log_e$... schreiben wir kürzer: ln ...

Beispiel *TR LN:* $\ln 10 \approx 2.30$

Beispiel 8 **natürlicher Logarithmus**

Berechnen Sie die natürlichen Logarithmen auf dem TR. Versuchen Sie vorher eine Schätzung!

a) ln 7 =

b) ln 20 =

c) ln 1 =

d) ln –6 =

e) $\ln \frac{1}{3} =$

f) ln 0.01 =

g) bis l) Die folgenden „natürlichen“ Logarithmen lassen sich im Kopf bestimmen. Kontrolle mit dem TR!

g) ln e =

h) $\ln \frac{1}{e^2} =$

i) $\ln e^x =$

j) $\ln \sqrt{e} =$

k) ln (ln e) =

l) $e^{\ln 10} =$

Beispiel 9 Verwandtschaft

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen sind eng miteinander verwandt. Füllen Sie die Tabelle aus.

Potenz	Wurzel	Logarithmus
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\log_2 8 = 3$
$3^6 = 729$		
	$\sqrt[8]{256} = 2$	
		$\log_5 125 = 3$
		$\log_{10} 10'000 = 4$
	$\sqrt{0.01} = 0.1$	
$2^{-3} = 0.125$		
	$\sqrt[4]{1296} = 6$	
$b^x = a$		

Beispiel 10 Potenzgleichungen und Exponentialgleichungen

- Lösen Sie *exakt* mit dem entsprechenden Symbol. Benennen Sie Ihre Lösung *in Worten*.
- Schätzen Sie nun Ihre Lösung. Berechnen Sie dann mit dem TR. (Wie gut war Ihre Schätzung?)

Beispiel

$4x^5 = 140$ *Potenzgleichung*
$x^5 = 35$

$\Rightarrow$ $x = \sqrt[5]{35}$ *„5-te Wurzel von 35"*

Schätzung: x = 2.1 TR: $x = 35^{0.2} = 2.04$

$2 \cdot 4^x = 120$ *Exponentialgleichung*
$4^x = 60$

$\Rightarrow$ $x = \log_4 60$ *„Logarithmus von 60 zur Basis 4"*

Schätzung: x = 2.9 TR: $x = \log_4 60 = 2.95$

a) $2 + 5x^3 = 72$ **b)** $2 \cdot 3^x - 5 = 95$

c) $160 - 7x^4 = x^4$ **d)** $40 \cdot 2^x = 5$

Potenzgleichung?
Exponentialgleichung?

Exponentialgleichungen 1

Beispiel 11 Exponentialgleichungen

Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen. (Lösung als Logarithmus *und* als Dezimalzahl angeben.)
Tipp *Bringen Sie die Gleichung immer zuerst auf die Form $b^x = a$.*

a) $2^x = 9$ **b)** $12^t = 100$ **c)** $3 \cdot 2^x = 9$ **d)** $2 \cdot 7^x = 50$

e) $4^x \cdot 5^x = 400$ **f)** $9^x = 2 \cdot 3^x$ **g)** $2 \cdot 9^t = 6 \cdot 2^t$ **h)** $a \cdot b^x = c \cdot d^x$

Einschub: besonders einfache Exponentialgleichungen...
... die folgenden Gleichungen lassen sich sehr einfach lösen – auch *ohne* Logarithmus.

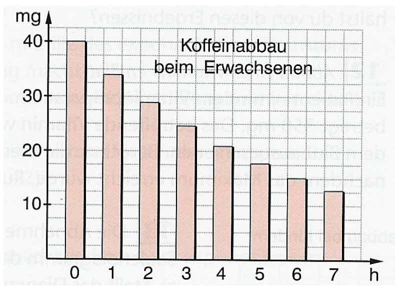
1 Erzeugen derselben Basis **2** Exponentenvergleich ***Beispiel*** $5^x = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^x = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$

i) $2^x = \frac{1}{16}$ **j)** $\sqrt{7} = 7^t$ **k)** $4^x = 0.25$ **l)** $\frac{1}{8} = \frac{2}{4^x}$

Beispiel 12 Anwendungen

a) Bevölkerungswachstum
Die Einwohnerzahl eines Landes beträgt 7 Millionen und wächst jährlich um 4%.

- Wie viele Einwohner hat das Land *nach* 5 Jahren? Wie viel hatte es *vor* 2 Jahren?
- Wann hat das Land mehr als 10 Millionen Einwohner?



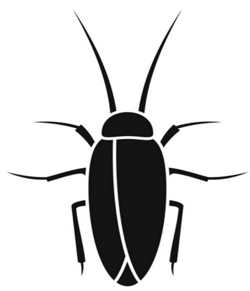
b) Koffein
Koffein wird im Blut mit einer Rate von 15% pro Stunde abgebaut.

- Wie viel Koffein von Anfangs 40 Milligramm sind nach 6 Stunden noch im Blut?
- Wie lange dauert es, bis weniger als 5 mg im Blut sind?

c) Physik: Luftdruckabnahme
Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar alle 1000 m um 13%. Der Luftdruck auf Meeresniveau beträgt ca. 1000 Millibar.

- Wie gross ist der Luftdruck auf dem Matterhorn (4500 m)?
- Die „kritische Schwelle“ (jene Höhe, auf der der menschliche Körper nicht mehr mit genügend Sauerstoff versorgt werden kann und ein Atemgerät braucht) liegt dort, wo der Luftdruck nur noch 30% des Wertes auf Meeresniveau beträgt. Bestimmen Sie diese Höhe ungefähr.

d) Biologie: Ausbreitung einer Population
Bei einer Untersuchung in einem Labor betrug die Anzahl Insekten nach 2 Wochen 140 und nach 4 Wochen 350.



- Berechnen Sie den (wöchentlichen) Wachstumsfaktor.
- Wie viele Insekten hat es in 6 Wochen? Wie viele hatte es zu Beginn?

Logarithmengesetze = Regeln für das Rechnen mit Logarithmen

Beispiel 13 **Logarithmengesetze**

a) auf die Suche ...

Berechnen Sie mit dem TR und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse. Was stellen Sie fest?

• $\log_2(3\cdot 7) =$	$\log_2(3) + \log_2(7) =$
• $\ln(117\cdot 36) =$	$\ln(117) + \ln(36) =$
• $\log\left(\frac{35}{5}\right) =$	$\log(35) - \log(5) =$
• $\ln\left(\frac{456}{12}\right) =$	$\ln(456) - \ln(12) =$
• $\log(7^3) =$	$3\cdot\log(7) =$
• $\ln(0.4^6) =$	$6\cdot\ln(0.4)$
• $\log(\sqrt[4]{28}) =$	$\frac{1}{4}\cdot\log(28) =$

b) Gesetze

Mit Hilfe der obigen Aufgabe ist es möglich, die Logarithmengesetze zu „erahnen“.

1. $\mathbf{\log(u\cdot v) =}$
2. $\mathbf{\log\left(\frac{u}{v}\right) =}$
3. $\mathbf{\log(u^x) =}$

Beweis der Gesetze

Wir halten zuerst fest, dass gilt: $x = 10^{\log x}$ *Warum? log x ist diejenige Zahl, mit der ich...*

Wir beweisen nun das 1. Logarithmengesetz (für die Basis 10; andere Basen analog).

$$10^{\log(x y)} = x\cdot y = 10^{\log x}\cdot 10^{\log y} = 10^{\log x + \log y}$$

Wenn wir nun die Exponenten vergleichen, sehen wir, dass gilt: $\log(x\cdot y) = \log x + \log y$.

Merke *Da Logarithmen Exponenten sind, läuft natürlich auch der Beweis in den Exponenten ab...*

Beweisen Sie die anderen beiden Gesetze!

Beispiel 14 **Konzentrationsübung**

Zerlegen Sie den Term mit Hilfe der Logarithmengesetze.

a) $\log(2x) =$

b) $\log\frac{2}{3} =$

c) $\log 2^{10} =$

d) $\log\frac{1}{x} =$

e) $\log n^{-2} =$

f) $\log(5pq) =$

g) $\log\frac{1}{x-y}$

h) $\log a(a-2) =$

i) $\log(a-b)^2 =$

j) $\log\frac{1}{k^6} =$

k) $\log\frac{1}{(a+1)^3} =$

l) $\log\left(\frac{1}{x-2}\right)^4 =$

m) $\log\frac{u}{u+1} =$

n) $\log\frac{ab}{c} =$

o) $\log\frac{2a}{bc} =$

p) $\log\frac{a+b}{a-b} =$

q) $\log\frac{3a^2}{5b^3} =$

r) $\log(7m^2n^3) =$

s) $\log\sqrt{x} =$

t) $\log\frac{1}{\sqrt[3]{x}} =$

Schreiben Sie als *einen* Logarithmus.

a) $\log 5 + \log 2 =$

b) $\log 8 - \log 2 =$

c) $\log 0.5 - \log 1 + \log 4 =$

d) $\log x^3 + \log x^2 =$

e) $\log 6a - \log 2a =$

f) $\log x - \log x^2 =$

g) $\log a^3 - 2\log a =$

h) $3\cdot\log x^2 - \log\frac{1}{x} =$

Richtig oder falsch ?

	richtig	falsch
a) $\log_a 5 + \log_a 2 = \log_a 10$	☐	☐
b) $\log_a x^3 + \log_a x^2 = \log_a 5x$	☐	☐
c) $\log_2\frac{a}{2} = \log_2 a - 1$	☐	☐
d) $\log_a x^3 + \log_a x^2 = 5\log_a x$	☐	☐
e) $\log_a x \cdot \log_a 2 = \log_a x^2$	☐	☐

Vereinfachen Sie. e bedeutet stets die eulersche Zahl.

a) $\ln(3e) =$

b) $\ln\frac{1}{e} =$

c) $\ln(\ln e) =$

d) $\ln(2e)^2 =$

e) $e^{\ln 2} =$

f) $e^{3\ln 4} =$

Exponentialgleichungen 2 (selber lesen!)

Exponentialgleichungen lassen sich

- **mit Hilfe der Definition** aber auch
- **mit Hilfe der Logarithmengesetze** lösen.
  Man „logarithmiert“ die Gleichung. Dazu verwendet man oft den „ln“ (also $\log_e$...)

Beispiele

a) Gleichung $\boldsymbol{2^x = 3}$

mit Hilfe der Definition

$2^x = 3$

$x = \log_2 3 \approx 1.58$

„Logarithmieren der Gleichung“

$2^x = 3$ *(Gleichung „logarithmieren“)*

$\ln 2^x = \ln 3$

$x \cdot \ln 2 = \ln 3$ *(3. Logarithmengesetz: $\ln u^x = x \cdot \ln u$)*

$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58$

b) Gleichung $\boldsymbol{2 \cdot 3^x = 5^x}$

Definition/Potenzgesetze

$2 \cdot 3^x = 5^x$

$2 = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

$x = \log_{5/3} 2 \approx 1.36$

„Logarithmieren der Gleichung“

$2 \cdot 3^x = 5^x$ *(Gleichung „logarithmieren“)*

$\ln(2 \cdot 3^x) = \ln 5^x$

$\ln 2 + x \cdot \ln 3 = x \cdot \ln 5$ *(1. und 3. Logarithmengesetz)*

$\ln 2 = x \cdot \ln 5 - x \cdot \ln 3 = x(\ln 5 - \ln 3)$

$x = \frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 3} \approx 1.36$

Beispiel 15

Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf beide Arten!

a) $6^x = 35$ **b)** $500 \cdot 3^t = 12^t$ **c)** $e^x = 2$ **d)** $2 \cdot 10^t = 10 \cdot 0.2^t$

e) $3^{x+1} = 20$ **f)** $3^{x-1} = 5$ **g)** $2^{0.5t} = 22$ **h)** $11 = 2^{0.5t+4}$

Hinweis zu e) $3^{x+1} = 3^x \cdot 3$

Lösungen zu Beispiel 15

a) $x = 1.98$ **b)** $t = 4.48$ **c)** $x = 0.69$ **d)** $x = 0.41$

e) $x = 1.73$ **f)** $x = 2.46$ **g)** $t = 8.92$ **h)** $t = -1.08$

Exponentialkurve $y = a \cdot b^x$

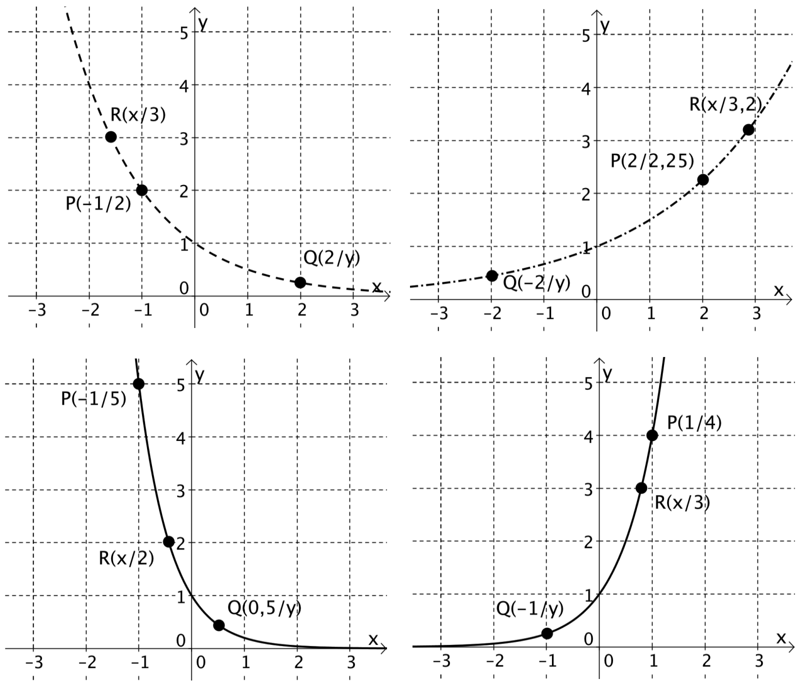
Beispiel 16

a) Zeichnen Sie die Graphen der zwei Exponentialkurven – sauber! – mit *unterschiedlicher* Farbe in ein Koordinatensystem. Sehen Sie ein Muster?

i) $y = 2^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

ii) $y = 3^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) Rechts sind Exponentialkurven der Form $y = b^x$ dargestellt.
Berechnen Sie die Gleichung und dann die fehlenden Koordinaten.



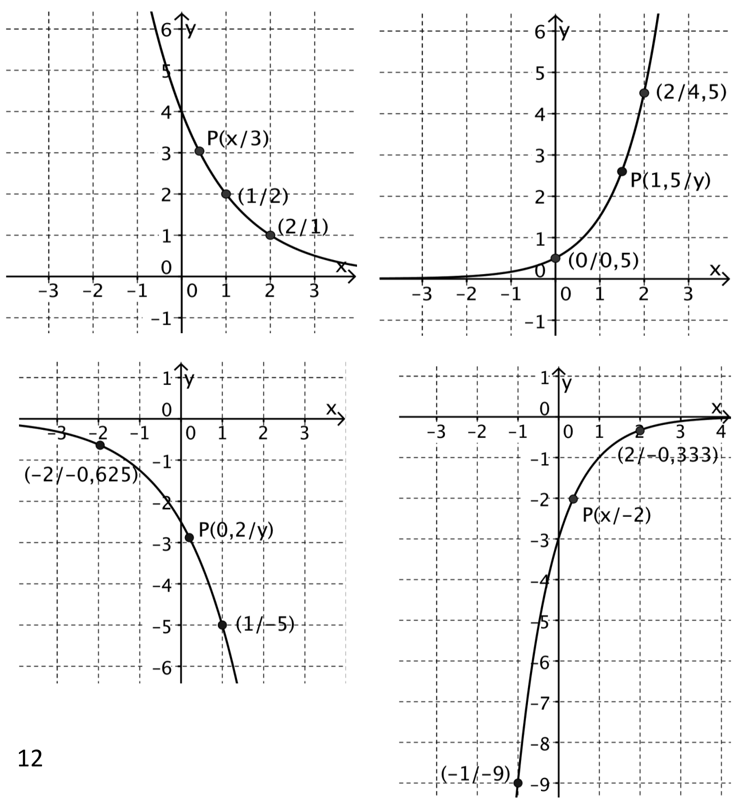
Beispiel 17

a) Zeichnen Sie die Graphen der vier Exponentialkurven – sauber! – mit *unterschiedlicher* Farbe in *ein* Koordinatensystem. Sehen Sie ein Muster?

i) $y = 2^x$; $y = 3 \cdot 2^x$; $y = -2^x$; $y = -3 \cdot 2^x$

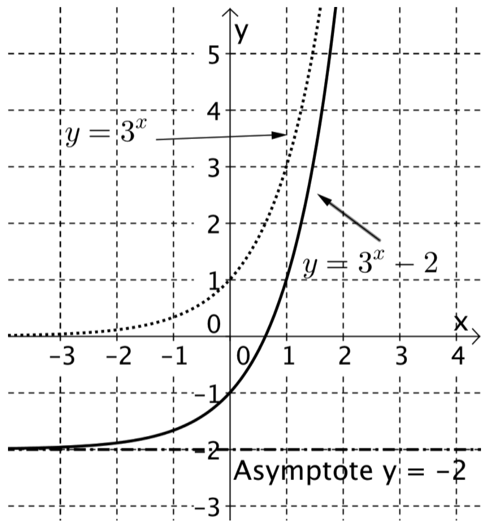
ii) $y = 3^x$; $y = 0.5 \cdot 3^x$; $y = -3^x$; $y = -0.5 \cdot 3^x$

b) Rechts sind Exponentialkurven der Form $y = a \cdot b^x$ dargestellt.
Berechnen Sie die Gleichung und dann die fehlenden Koordinaten.



Exponentialkurven $y = a \cdot b^x + c$

Beispiel 18

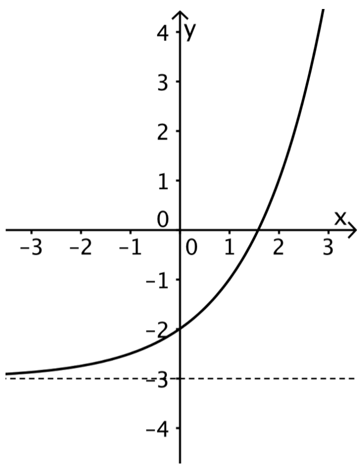


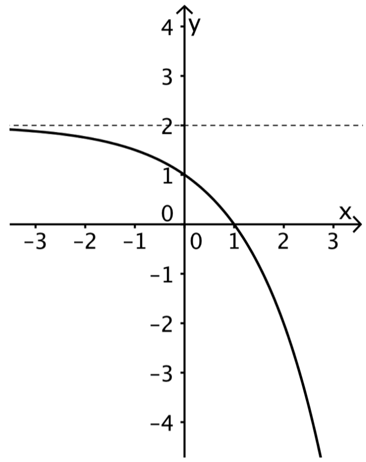
a) Abgebildet ist die Kurve $y = 3^x$ (punktiert).
Weiter eingezeichnet ist die „verschobene" Kurve $y = 3^x - 2$,
mit der zugehörigen Asymptote $y = -2$.

Zeichnen Sie ebenso folgende Kurven mit zugehöriger Asymptote – sauber (!) – in jeweils ein Koordinatensystem.

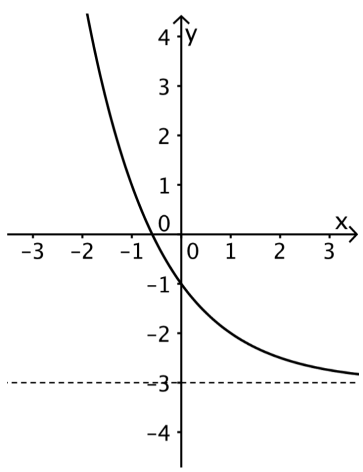
- $y = 2^x$ und $y = 2^x - 4$
- $y = -2^x$ und $y = -2^x + 5$ ***beachte*** *$-2^x \neq (-2)^x$*
- $y = 3 \cdot 0.25^x$ und $y = 3 \cdot 0.25^x - 3$
- $y = -0.5^x$ und $y = -0.5^x + 5$

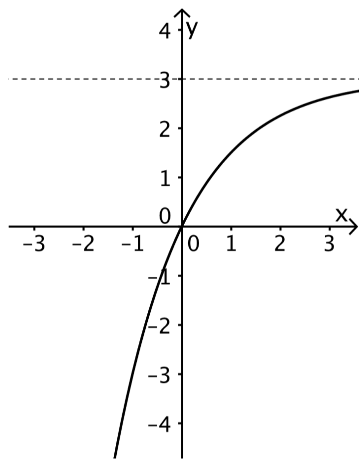
b) Gegeben sind Exponentialkurven der Form $y = a \cdot 2^x + c$. Bestimmen Sie a und c.
Der Schnitt mit der y-Achse ist ganzzahlig!
Tipp *„lesen Sie zuerst c ab" (die Asymptote ist gestrichelt); bestimmen Sie dann a.*





c) Gegeben sind Exponentialkurven der Form $y = a \cdot 0.5^x + c$. Bestimmen Sie a und c.

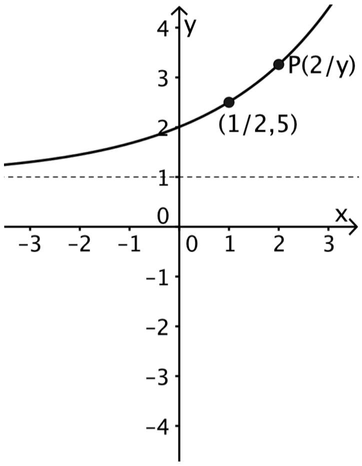




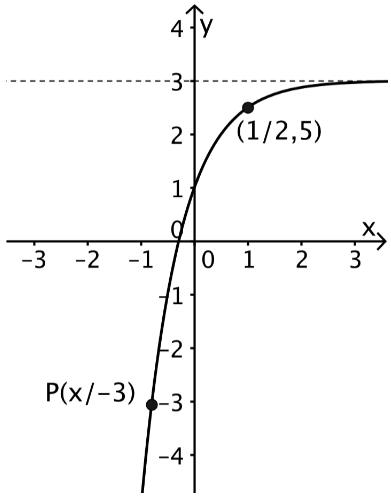
Beispiel 19

a) Abgebildet sind Exponentialkurven der Form $y = a \cdot b^x + c$ mit Asymptote.
Der Schnitt mit der y-Achse ist ganzzahlig! Berechnen Sie die Gleichung und dann die fehlenden Koordinaten.

i)

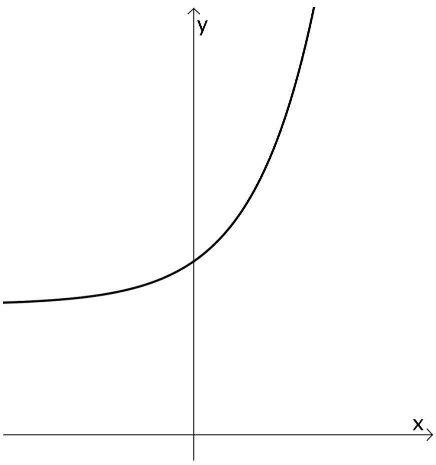


ii)

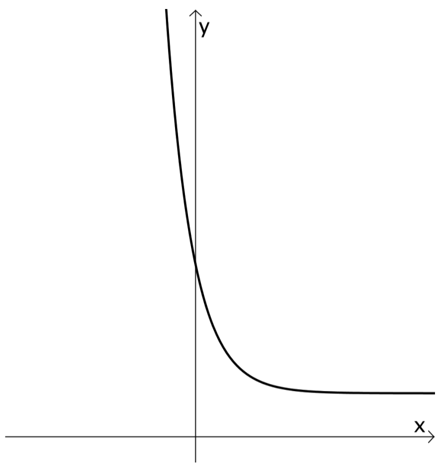


b) Abgebildet sind Exponentialkurven der Form $y = a \cdot b^x + c$.
Was lässt sich über die Parameter a, b und c aussagen? Begründung!

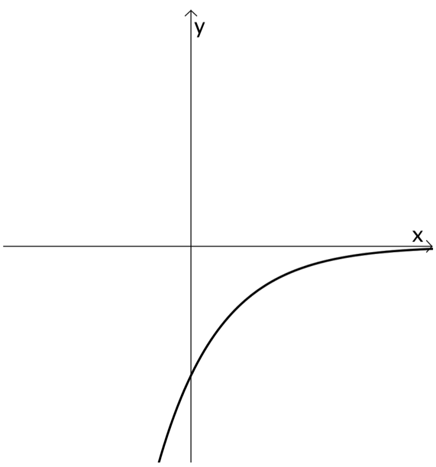
i)



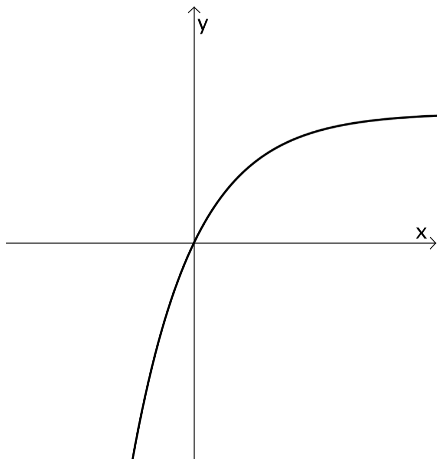
ii)



iii)

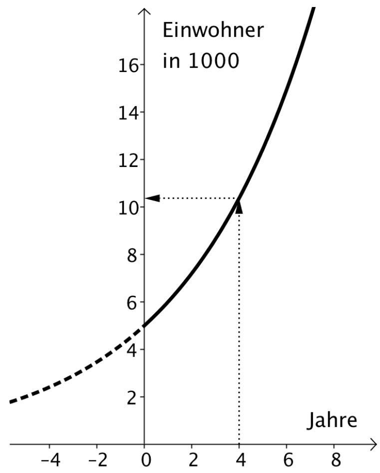


iv)



Exponentielle Prozesse

Beispiel



Eine Stadt hat 5000 Einwohner. Die Behörden für Stadtentwicklung geben bekannt, dass die Bevölkerung jedes Jahr um 20% wächst. Wie viele Einwohner hat die Stadt in vier Jahren?

Wir bezeichnen mit y die Anzahl Einwohner und mit x die Zeit in Jahren und haben:
$y = a \cdot b^x$.
Dabei ist: *a der* ***Anfangswert****, also:* $a = 5000$
b der ***Wachstumsfaktor****, also* $b = 100\% + 20\% = 120\% = 1.2$
Die Exponentialfunktion, die die Entwicklung der Einwohnerzahl wiedergibt,
lautet: $\mathbf{y = 5000 \cdot 1.2^x}$.

Nach vier Jahren hat die Stadt: $y(4) = 5000 \cdot 1.2^4 = 10'360$ *Einwohner.*

Die Stadt könnte auch unter Abwanderung leiden und Einwohner verlieren. Würden jedes Jahr 10% der Einwohner die Stadt verlassen, ergäbe sich der „Wachstumsfaktor“ $b = 100\% - 10\% = 0.9$.

Merke

- *20% mehr entspricht einer Multiplikation mit dem Wachstumsfaktor* $b = 1.2$
  10% weniger entspricht einer Multiplikation mit dem Wachstumsfaktor $b = 0.9$
- *p% mehr/weniger entspricht einer Multiplikation mit dem Wachstumsfaktor* $b = 1 \pm \frac{p}{100}$

Typ: $\mathbf{y = a \cdot b^x}$
- **exponentielles Wachstum (Wachstumsfaktor b > 1)**
- **exponentieller Zerfall (Wachstumsfaktor b < 1)**

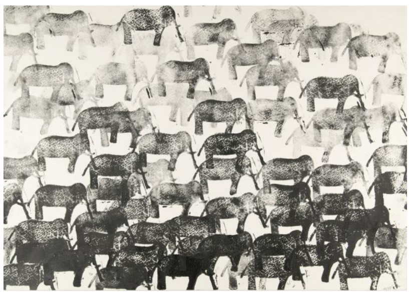
Beispiel 20 **Ausbreitung einer Population**

Die Grösse einer Tierpopulation wird auf 500 geschätzt und wächst jährlich um 10%.

a) Wie lautet die Exponentialfunktion, welche die Anzahl Tiere wiedergibt? Zeichnen Sie den Graphen!

b) *Wie viele*

- Tiere werden es *in* 5 Jahren sein?
- Tiere waren es *vor* 3 Jahren?



c) *Wann*

- werden es mehr als 15'000 Tiere sein?
- werden es doppelt so viele sein wie zu Beginn?
  Die dazu benötigte Zeitspanne heisst auch **Verdoppelungszeit**.

d) Zeigen Sie: die Verdoppelungszeit hängt nicht vom Anfangswert a ab, sondern nur vom Wachstumsfaktor b.

Beispiel 21 Abbau eines Medikamentes

Wirkstoffe (Medikamente, Drogen, ...) werden im Körper oft exponentiell abgebaut.
Eine Person hat 10 mg eines Wirkstoffes im Körper und die „Abbaurate“ beträgt 8% pro Minute.

a) Wie lautet die Exponentialfunktion, welche die Anzahl mg im Körper wiedergibt?
Zeichnen Sie den Graphen der Kurve!

b) Wie viele mg hat es nach 3 Minuten noch im Körper?

c) Wann

- wird es weniger als 7.5 mg sein?
- wird es nur noch halb so viel sein wie zu Beginn?
  Die dazu benötigte Zeitspanne heisst auch **Halbwertszeit***.

d) Zeigen Sie: die Halbwertszeit hängt nicht vom Anfangswert a ab, sondern nur vom Wachstumsfaktor b.

***** Als Mass für die Geschwindigkeit wird die sogenannte Halbwertszeit verwendet, ein Begriff, der ursprünglich aus der Radiochemie stammt und deshalb auch im Zusammenhang mit der Entsorgung radioaktiver Abfälle verwendet wird. In der Pharmakologie bedeutet die Halbwertszeit diejenige Zeitspanne, in welcher die Konzentration eines Arzneimittels im Organismus resp. im Blut auf ihren halben Wert (50%) absinkt. THC (Cannabis) hat zB eine Halbwertszeit von ca. 52 Stunden.

Typ: $y = a\cdot b^x + c$ (Newton'sche Abkühlungsgesetz)

Eine Alltagserfahrung besagt: Körper, die wärmer sind als ihre Umgebung, kühlen sich ab.
Ebenso erwärmen sich Körper, die kälter sind als ihre Umgebung. Der Physiker Isaac Newton (17. Jh.) entdeckte das gemeinsame Muster, also die Gesetzmässigkeit, nach der sich Körper erwärmen oder abkühlen:

Die Differenz D zwischen der Temperatur eines Körpers und der Umgebungstemperatur U nimmt pro Zeiteinheit (zB. pro Minute) stets um denselben Prozentsatz p% ab.
Dabei ist p eine Konstante, die u.a. auch von dem Körper, der sich abkühlt, abhängt.

Beispiel 22 Abkühlen von Kaffee...

Eine Tasse Kaffee hat eine Temperatur von 90 °C bei einer Raumtemperatur von 20 °C.
Die Differenz zwischen Kaffeetemperatur und Zimmertemperatur nimmt ab und wird pro Minute um ca. 6% kleiner. Die *Differenz* nimmt also ab gemäss: $70\cdot 0.94^t$, t in Minuten.
Für die *Kaffeetemperatur* unseres Kaffees gilt demnach die „Formel“

$T = 70\cdot 0.94^t + 20$, (t in Minuten, T in °C).

a) Zeichnen Sie den Graphen.

b) Wann hat der Kaffee eine Trinktemperatur (60°C)?

c) Wie lässt sich die Asymptote interpretieren?

d) Frau Holle kann den Kaffee erst in 5 Minuten trinken. Die kalte Milch würde den Kaffee sofort um 10°C abkühlen. Sie möchte ihn aber möglichst heiss trinken...
Ist es besser, wenn sie die Milch sofort zugiesst oder erst in 5 Minuten?

3 Zusammenfassung

Grundaufgabe 1 Logarithmen und Exponentialgleichungen

a) Was versteht man unter dem Symbol $\log_b a$? Was ist eine Exponentialgleichung?

b) Logarithmen und Exponentialgleichungen

- Bestimmen Sie / Schätzen Sie folgende Logarithmen:
  $\log_2 8 =$ $\qquad\qquad$ $\log 10^{21} =$ $\qquad\qquad$ $\ln 10 =$

- Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen:
  $5 \cdot 2^t = 30$ $\qquad\qquad$ $5 \cdot 2^x = 0.5 \cdot 3^x$

c) Logarithmengesetze und Exponentialgleichungen

- Wenden Sie die Logarithmengesetze an:
  $\log(ab^2) =$ $\qquad\qquad$ $\log 5^t =$ $\qquad\qquad$ $\ln e^3 =$

- Lösen Sie folgende Exponentialgleichung:
  $7 \cdot 2^x = 10^x$ $\qquad\qquad$ $ab^x = cd^x$

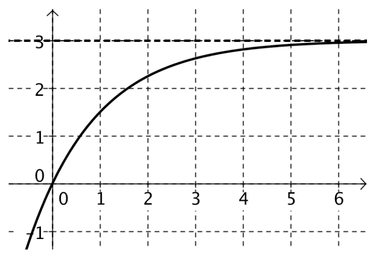
Grundaufgabe 2 Exponentialfunktionen

a) Skizzieren Sie den Graphen der Exponentialfunktion $y = 0.5 \cdot 2^x - 2$

b) Abgebildet ist eine Exponentialfunktion der Form $y = ab^x + c$.
Was lässt sich aussagen über die Parameter a, b und c?

c) Wie bestimmt man den Schnittpunkt zweier Exponentialfunktionen?

b)



Grundaufgabe 3 Anwendungen

a) Radioaktiver Zerfall – Begriff: Halbwertszeit
Bei Atombombenversuchen wird radioaktives Kobalt freigesetzt, das krebserregend ist.
Seine **Halbwertszeit** beträgt ca. 5 Jahre.

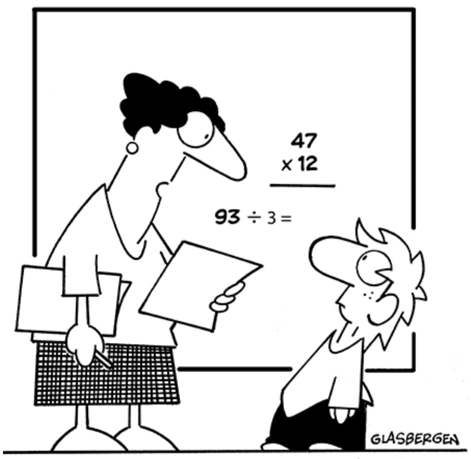
- Berechnen Sie den Zerfallsfaktor bzw. um wie viele % das Kobalt pro Jahr zerfällt.

- Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren nur mehr 10% der ursprünglichen Menge vorhanden ist.

b) Erwärmungsprozess
Ein *Erwärmungsprozess* sei gegeben durch $T = -20 \cdot 0.75^t + 25$, T in °C, t in min.

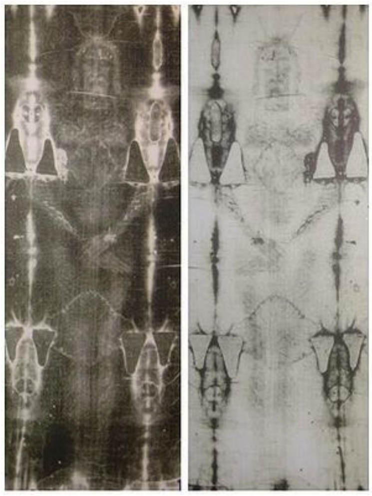
- Zeichnen Sie den Graphen.

- Interpretieren Sie alle in der Funktionsgleichung auftretenden Zahlen.



"Yes, love is the answer...but not on a math test."

Anhang 1 Grabtuch von Turin



Das **Turiner Grabtuch** ist ein 4.36 m langes und 1.10 m breites Leinentuch, das ein Ganzkörper-Bildnis der Vorder- und Rückseite eines Menschen zeigt.

Das Tuch wird in einer im Ende des 17. Jahrhundert erbauten Seitenkapelle des Turiner Doms aufbewahrt.
Der Ursprung des Tuches und sein Aussehen sind der Gegenstand einer intensiven Debatte unter Wissenschaftlern, Theologen, Historikern und Forschern.

Es wird von vielen Gläubigen als das Tuch verehrt, in dem Jesus von Nazaret nach der Kreuzigung begraben wurde und hat eine Reihe von Christusdarstellungen inspiriert.
Die Verehrung des Tuches wurde insbesondere im späten 19. Jahrhundert intensiviert, nachdem fotografische Negative des Grabtuchs ein sehr plastisches und lebensnahes Abbild erkennen ließen.

Die dokumentierte Ersterwähnung des Tuches fand im 14. Jahrhundert statt. Archivbelege, mikroskopische Untersuchungen und Radiokohlenstoffdatierungen deuten auf einen Ursprung als mittelalterliches Artefakt aus dieser Zeit, was die Diskussion um das Grabtuch allerdings nicht zum Ende gebracht hat.
Bis heute ist die Entstehung des Körperabbildes nicht eindeutig wissenschaftlich geklärt. Das Tuch bleibt eines der am meisten untersuchten Artefakte in der Geschichte der Menschheit und eines der umstrittensten.

Die **Radiokohlenstoffdatierung**, auch **C14-Methode** genannt, ist ein Verfahren zur Datierung von kohlenstoffhaltigen, insbesondere organischen Materialien. Der zeitliche Anwendungsbereich liegt zwischen 300 und etwa 60.000 Jahren.
Das Verfahren beruht darauf, dass in lebenden Organismen Kohlenstoff aus stabilen Atomkernen sowie einem Anteil aus radioaktiven Atomkernen C14 besteht.

Sobald ein organischer Stoff stirbt, nimmt der C14-Anteil gemäß dem Zerfallsgesetz mit einer Halbwertszeit von 5736 Jahren ab. Die Radiokohlenstoffdatierung wird oft in der archäologischen Altersbestimmung angewandt.

Entwickelt wurde die Radiokohlenstoffdatierung 1946 von Willard Libby (1908–1980), der für diese Leistung 1960 mit dem Nobelpreis für Chemie ausgezeichnet wurde.

Bei einer Untersuchung des Grabtuches von Turin (Grabtuch Christi), welches die Kirche erst 1988 zur wissenschaftlichen Altersbestimmung freigab, stellte man einen C14-Anteil fest, der nurmehr 91% des ursprünglichen betrug.

a) Aus welchem Jahr stammt das Grabtuch?

Hinweis
Berechnen Sie dazu zuerst den jährlichen Zerfallsfaktor von C14.
Benutzen Sie in Ihrer Rechnung dann den ungerundeten (!) Zahlenwert des Zerfallsfaktors.

b) Wieviel % hätte man vorfinden müssen, damit der Glaube, beim besagten Tuch könnte es sich tatsächlich um das Grabtuch Christi handeln, nicht widerlegt worden wäre?

Lösung a) *ca. 780 Jahre, also aus dem Jahre 1200 n C* ***b)*** *nur etwa 79%*

Anhang 2 schwierigere Exponentialgleichungen

Bei schwierigeren Exponentialgleichungen braucht es manchmal eine zusätzliche Strategie!

Beispiel 1

$2^x + 2^{x+1} = 30$ *(beachte: $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$!!!)*

Lösung (faktorisieren)

$2^x + 2^x \cdot 2^1 = 30$

$(1 + 2)2^x = 30$

$3 \cdot 2^x = 30$

$2^x = 10$

$x = \log_2 10 \approx 3.32$

Beispiel 2

$3^{2x} + 9 = 10 \cdot 3^x$

Lösung (Substitution)

$u = 3^x$

$u^2 + 9 = 10u$

$u^2 - 10u + 9 = 0$ *(quadratische Gleichung)*

$u_1 = 1$, *also* $x_1 = 0$

$u_2 = 9$, *also* $x_2 = 2$

Aufgabe 1 **Zusätzliche Strategie „faktorisieren"**

a) $3^{x+1} + 3^x = 20$

b) $5^{y+1} + 5^{y-1} = 260$

c) $8^{x-1} - 2^{3x+1} = -1$

d) $2^{3x+1} - 3^{x-1} = 2^{3x+2} - 3^{x+1}$

Aufgabe 2 **Zusätzliche Strategie „Substitution"**

a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

b) $5^{2a} + 9 = 10 \cdot 5^a$

c) $3 \cdot e^x + 5 = \frac{2}{e^x}$

d) $4^x - 7 \cdot 2^x = 8$

Die *Substitution* kennen Sie bereits von früher. Es ist eine wichtige und elegante Strategie zum Lösen von Gleichungen!

Aufgabe 3 **Vermischte Aufgaben**

a) $8^x = 3$

b) $e^{x-1} = 3^{e-x}$

c) $3^{3x-4} \cdot 9^{2x-3} = 27^{x+2}$

d) $4^x = 88 - 3 \cdot 2^x$

e) $2 \cdot 3^x = 5 \cdot 7^{2-x}$

f) $-1 = 3^x$

g) $27^{2z+1} + 3^{6z} = 2 + 9^{3z-1}$

h) $4^u - 5^{u+1} = 4^{u+2} - 5^{u+3}$

i) $2^t = 3^t$

j) $4^{x+1} \cdot 8^{3-x} = \frac{0.5^{4x}}{\sqrt{32}^{x-1}}$

Lösungen

Aufgabe 1

a) $x = 1.47$ **b)** $y = 2.43$ **c)** $x = -0.30$ **d)** $x = 0.29$

Aufgabe 2

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 1.58$ **b)** $x_1 = 0$, $x_2 = 1.37$ **c)** $x = -1.01$ **d)** $x = 3$

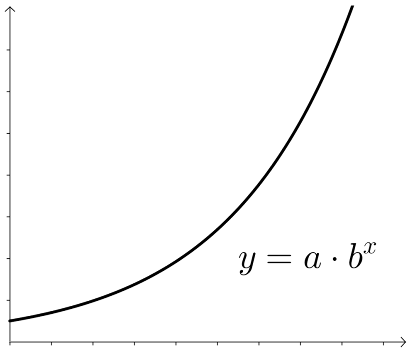
Aufgabe 3

a) $x = 0.58$ **b)** $x = 1.90$ **c)** $x = 4$ **d)** $x = 3$

e) $x = 1.58$ **f)** keine Lösung **g)** $z = -0.40$ **h)** $u = -9.31$

i) $t = 0$ **j)** $x = -\frac{17}{11}$

Anhang 3   logistisches Wachstum



Sie kennen das exponentielle Wachstum

$$y = a \cdot b^x$$

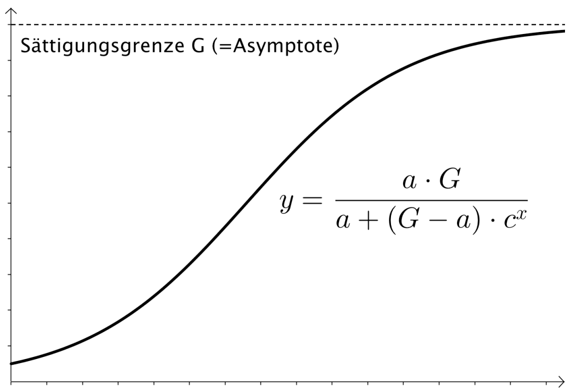
- a = Anfangswert
- b = Wachstumsfaktor

als *Modell*, wie sich eine Population ausbreitet.

Dieses Modell beschreibt eine Ausbreitung aber nur über einen gewissen Zeitraum sinnvoll...

Warum?

Die Population kann sich nicht *beliebig* ausbreiten – irgendwann ist nicht mehr genügend Platz oder Nahrung vorhanden!
Wir sagen: die Population stösst *ressourcenbedingt* an eine (obere) Sättigungsgrenze G.



Für solche Fälle haben sich die MathematikerInnen eine spezielle Kurve ausgedacht. Sie lautet:

$$y = \frac{a \cdot G}{a + (G - a) \cdot c^x}$$

- a = Anfangswert
- G = Sättigungsgrenze

Die Basis c muss jeweils berechnet werden.

Aufgabe

a) Der Herr Bucher unterrichtet an der Kanti Stadelhofen 4 Klassen mit insgesamt 100 SchülerInnen. Eine Schülerin verbreitet morgens um 8 Uhr das Gerücht, dass der krank ist, dass der heute also gar nicht kommt, also nicht, dass der nie mehr kommt, aber eben heute nicht.
Um 9 Uhr wissen es bereits 7 seiner SchülerInnen.

- Welche logistische Funktion beschreibt die Ausbreitung des Gerüchts?

- Um wie viel Uhr kennen bereits 80% seiner Schüler das Gerücht?

b) Von 6000 isoliert lebenden Menschen (zB. auf einer Insel) erkrankt eine Person an Grippe. Durch gegenseitige Ansteckung zählt man nach 5 Wochen bereits 400 Kranke.

- Bestimmen Sie den Funktionsterm (Annahme: logistisches Wachstum).

- Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Bewohner krank? Welche Bedeutung hat dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit?

Lösung

a) $y = \frac{100}{1 + 99 \cdot 0.134^x}$ **;** x = 2.98, also ca. 3 h später

b) $y = \frac{6000}{1 + 5999 \cdot 0.298^x}$ **;** x = 7.18, also ca. 7 Wochen später
Ansteckung verläuft ab diesem Zeitpunkt langsamer.

Anhang 4 Logarithmusfunktion, Sinnesempfindungen

Aufgabe 1

a) Zeichnen Sie die Logarithmusfunktionen und benennen Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten.

- $y = \log_2 x$
- $y = \log_{10} x$
- $y = \ln x$

b) Zeichnen Sie die Logarithmusfunktion $y = y = 10 \cdot \log_{10} x$. Welchen Effekt hat der Parameter 10?

Empfindet man etwas als leise oder laut, als leicht oder schwer, als ... oder als ...

Ein physikalischer Reiz p erzeugt eine Empfindung „der Stärke E“.
Wir unterscheiden also zwischem „physikalischem Reiz p“ und „innerer Empfindung E“.

Die Stärke des Reizes können wir „äusserlich“ mit Messinstrumenten bestimmen, bei der Empfindung ist das schwieriger...
Es stellt sich die Frage, ob der Empfindung eines Menschen überhaupt sinnvoll Zahlenwerte zugeordnet werden können.
Damit dies möglich ist, muss eine Empfindungsskala konstruiert werden.
1860 gelangen Ernst Weber und Gustav Fechner entscheidende Schritte.

Der Psychologe Ernst Weber fand eine fundamentale Gesetzmässigkeit, wie der Mensch die Welt erlebt. Er stellte fest, dass die *relative* Reizzunahme $\frac{\Delta p}{p} = k$ konstant ist.
Was heisst das?

- *„Ein Thaler hat viel weniger Wert für den Reichen als für den Armen, und wenn er einen Bettler einen Tag lang glücklich macht, so wird der Zuwachs zum Vermögen eines Millionärs von diesem gar nicht bemerkt.“*
- *Im Bereich kinästhetischer Empfindungen (also unserem Sinneskanal für Berührungsreize, Druck, Gewicht oder dergleichen), beträgt die Konstante etwa ein Vierzigstel. Wenn Sie also mit geschlossenen Augen einen Briefumschlag mit einem Gewicht von 40 Gramm in der Hand halten, genügt eine Zunahme von nur einem Gramm, um Ihnen das Gefühl einer Veränderung zu geben. Wenn Sie jedoch eine 40 kg schwere Kiste hochheben, muss man Ihnen schon mindestens ein weiteres kg Gewicht dazugeben, um Sie auf eine Veränderung im Gesamtgewicht aufmerksam zu machen.*

Dem Mathematiker Fechner gelang es die Beobachtungen von Weber in eine „Formel“ umzusetzen.
Es zeigt sich dabei, dass die Empfindungsstärke E logarithmisch von der Reizstärke p abhängt.

c) Dem Mathematiker Fechner gelang es die Beobachtungen von Weber in eine „Formel“ umzusetzen. Es zeigt sich dabei, dass die Empfindungsstärke E logarithmisch von der reizstärke p abhängt.

- Zeichnen Sie ein Koordinatensystem, wobei auf der x-Achse die (physikalische) Reizstärke p und auf der y-Achse die Empfindungsstärke E stehen soll.
- Zeichnen Sie qualitativ eine Logarithmuskurve ein. Beachten Sie:
  Gibt es negative x-Werte? Gibt es negative y-Werte? Wo liegt die Nullstelle?
- Inwiefern kommt in der Kurve die Beobachtung von Weber zum Ausdruck?


WACHSTUM, WACHSTUM,
WIR BRAUCHEN WACHSTUM !!
JA, BITTE ??
ICH BIN
DAFÜR !