

Polynomfunktionen

$$-x^4 + x^2 + x$$

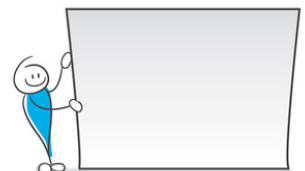


In der Mathematik ist ein Polynom eine (endliche) Summe von Vielfachen von Potenzen mit natürlichen Exponenten einer Variablen, die meist mit x bezeichnet wird...

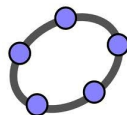
Das Wort Polynom entstammt dem griechischen und heisst „mehrnamig“ (πολύ polý für „viel“ und όνομα onoma für „Name“); diese Bezeichnung geht zurück bis auf Euklid.

(wikipedia)

Welches ist die grösste Schachtel, die sich aus einem A4-Papier (Abmessungen $29.7 \text{ cm} \times 21 \text{ cm}$) falten lässt?



| | | |
|----------|--|-----------|
| 0 | Rückblick – bisher bekannte Funktionen & Gleichungen | 3 |
| | <ul style="list-style-type: none">• Lineare & quadratische Funktionen• TR-funktion: num-solve, poly-solv, sys-solv | |
| 1 | Einstieg | 5 |
| | <ul style="list-style-type: none">• Funktion, Schreibweise | |
| 2 | Polynomfunktionen | 7 |
| | <ul style="list-style-type: none">• Grad• Polynomfunktion zeichnen, TR-funktion: table• Eigenschaften von Polynomfunktionen• Nullstellen• Globalverhalten• Symmetrie• Koeffizienten abschätzen• Polynomfunktionen bestimmen | |
| 3 | Zusammenfassung | 19 |
| 4 | Anhang | 22 |
| | <ul style="list-style-type: none">• Polynomdivision | |



0 Rückblick – bisher bekannte Funktionen & Gleichungen

Rückblick 1 lineare Funktionen

a) Gegeben ist die lineare Funktion

$$y = 0.25x + 3.$$

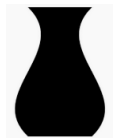
- Zeichnen Sie den Graphen. Wo „sieht“ man die Zahlen beim Graphen?
- Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion.
- Wir interpretieren die Funktion als „Taxigraph“. Sei x = Anzahl gefahrener km (unabhängige Variable), y = Preis in Fr. (abhängige Variable).
Stellen sie sich selber Fragen in diesem Zusammenhang.
Beantworten Sie Ihre Fragen mit Hilfe der Funktionsgleichung.



b) Gegeben ist die lineare Funktion

$$y = -0.25x + 3.$$

- Worin unterscheidet sich diese Funktion von der obigen?
- Sei x = Anzahl Minuten, y = Anzahl Liter in einem Gefäß. Berechnen und interpretieren Sie die Nullstelle.



Rückblick 2 quadratische Funktionen

a) Gegeben ist die quadratische Funktion

$$y = 0.5x^2 - 2.$$

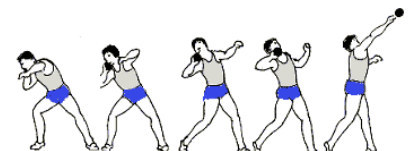
- Zeichnen Sie den Graphen. Wo „sieht“ man die Zahlen beim Graphen?
- Berechnen Sie die Nullstelle(n) der Funktion.

b) Gegeben ist die quadratische Funktion

$$y = -0.25x^2 + 1.5x.$$

- Zeichnen Sie den Graphen. Wo „sieht“ man die Zahlen beim Graphen?
- Wir interpretieren die Funktion als „Wurfparabel“.

Stellen sie sich selber Fragen in diesem Zusammenhang.
Beantworten Sie Ihre Fragen mit Hilfe der Funktionsgleichung.



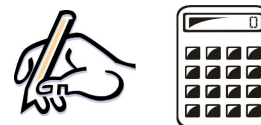
Rückblick 3 weitere Funktionen

Kennen Sie noch weitere Funktionen?
Wie sehen deren Graphen aus?
Was lässt sich mit ihnen beschreiben?

Im Zusammenhang mit *Funktionen* müssen stets auch die entsprechenden *Gleichungen* gelöst werden.

Das Lösen von Gleichungen kann auf zwei Arten geschehen:

- von Hand
- mit dem TR.



Es gibt Gleichungen, die wir nur mit dem TR lösen können. Auf der anderen Seite sind wir aber oft schneller, wenn wir eine Gleichung von Hand lösen (und man hat auch eine Ehre!).

Beide Arten sind wichtig. Beide Arten muss man beherrschen und deshalb üben.

Rückblick 4 Gleichungen ohne / mit TR

a) lineare Gleichung:

- $7x + 5 = -10$
- $ax + b = 0$

Braucht es bei linearen Gleichungen einen TR?

b) quadratische Gleichung:

- $x^2 - 8 = 0$
- $x^2 - 8x = 0$
- $x^2 - 8x + 12 = 0$
- $x^2 = 3.5x + 7.5$

Braucht es bei quadratischen Gleichungen einen TR?

c) kubische Gleichung:

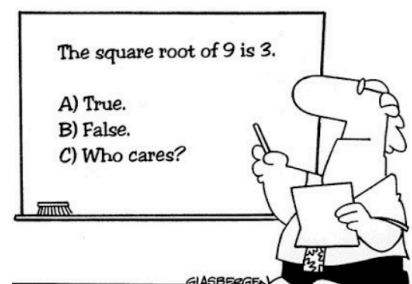
- $2x^3 = 16$
- $x^3 = x + 8$

Braucht es bei kubischen Gleichungen einen TR?

Beachte

Es gibt drei unterschiedliche **Gleichungslöser** auf dem TR:
num-solv, **poly-solv**, **sys-solv**.

- num-solv: löst eine Gleichung näherungsweise.
Achtung: es wird nur *eine* Lösung angegeben.
- poly-solv: löst quadratische und kubische Gleichungen
- sys-solv: löst 2x2 und 3x3 Gleichungssysteme



Many students actually look forward to Mr. Atwadder's math tests.

d) Gleichungssysteme

- $\begin{cases} x - 2y = 12 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3a - b + 5c = 23 \\ 4a + 2b - 2c = -2 \\ 5a + b + 2c = 14 \end{cases}$

1 Einstieg

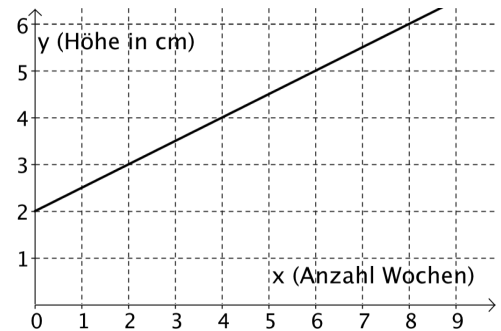


Funktion

Beispiel lineare Funktion

Eine Pflanze ist zu Beginn 2 cm hoch.
Sie wächst jede Woche um 0.5 cm.

Diesen „Vorgang“ können wir auf verschiedene Arten darstellen:
mit einem **Graphen**, einer **Wertetabelle**
oder einer **(Funktions-) Gleichung**.



| | | | | | | |
|-------------------|---|-----|---|-----|---|-----|
| x (Anzahl Wochen) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| y (Höhe in cm) | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | ... |

$$y = 0.5 \cdot x + 2$$

Wir können verschiedene Berechnungen anstellen:

- Wie hoch ist die Pflanze nach $x = 11$ Wochen? $y = 0.5 \cdot 11 + 2 = 7.5$ cm
- Wann ist die Pflanze $y = 20$ cm hoch? $20 = 0.5 \cdot x + 2 \Rightarrow x = 36$ Wochen

Wir sehen: **zum Rechnen ist die Gleichung am besten geeignet!**



Wir führen jetzt eine praktische **Schreibweise** ein.

Statt $y = 0.5 \cdot x + 2$ schreiben wir $y(x) = 0.5 \cdot x + 2$ und lesen: „**y von x gleich ...**“

Damit können wir die Aufgabe

„Wie hoch ist die Pflanze nach $x = 11$ Wochen?“

mathematisch elegant und viel kürzer formulieren, nämlich: $y(11) = ?$

Aufgabe 1

Berechnen und interpretieren Sie – mit Einheiten – den Wert $y(20)$ im obigen Beispiel.

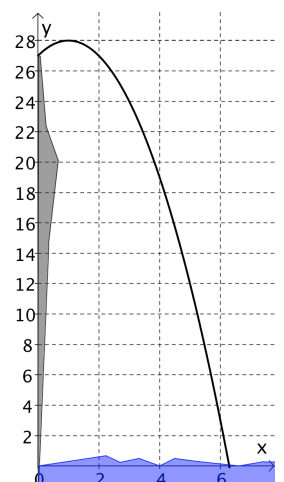
Aufgabe 2 quadratische Funktion

In Acapulco in Mexiko springen Wagemutige als Touristenattraktion von einem 27 m hohen Felsen.

Die Flugbahn eines Springers lässt sich beschreiben durch die Gleichung

$$y(x) = -x^2 + 2x + 27.$$

Dabei bezeichnet y die Höhe und x die horizontale Entfernung vom Absprungpunkt, jeweils in Metern.



a) Berechnen und interpretieren Sie den Wert $y(4)$.

b) Wo trifft er auf das Wasser?

c) Wie hoch ist der Springer zunächst gesprungen? **Hinweis** x -Koordinate des Scheitelpunktes: $x_s = -\frac{b}{2a}$.

Den obigen Aufgaben ist eines gemeinsam:

Einem Wert „ x “ wird ein Wert „ y “ zugeordnet.



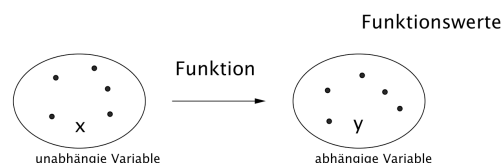
Definition

Eine **Funktion** ist eine Vorschrift, die einem x *genau ein* y zuordnet.

Schreiben wir $y(x)$, dann bezeichnen wir x als die *unabhängige Variable (Grösse)*, y als die von x *abhängige Variable (Grösse)*.

Die Werte, die wir für y bekommen, heissen **Funktionswerte**.

Funktionen lassen sich oft durch eine Gleichung beschreiben. Sie gibt die „Formel“ an, wie die beiden Variablen voneinander abhängen. Diese Gleichung heisst **Funktionsgleichung**.



Beispiel: Hat ein Quadrat die Seitenlänge x und die Fläche F , dann gilt: $F(x) = x^2$.

- Die Fläche F ist *abhängig* von der Seitenlänge x gemäss der Funktionsgleichung: $F(x) = x^2$.
- Ist $x = 3$, so ist die Fläche $F(3) = 9$ gross. Die Zahl 9 heisst der Funktionswert von F an der Stelle $x = 3$.

Funktionen bezeichnen wir im Allgemeinen mit einem kleinen **f** (für „function“).

Im Beispiel 1 schreiben wir anstelle von

$$y(x) = 0.5 \cdot x + 2$$

also auch

$$f(x) = 0.5 \cdot x + 2$$

und lesen:

„**f** von x gleich ...“

$f(x)$

Für den Wasserspringer in Aufgabe 2 schreiben wir entsprechend: $f(x) = -x^2 + 2x + 27$.

Aufgabe 3

Schreibweise: In Formeln: „ $f(6) = 3$ “

In Worten: „der **Funktionswert** von f an der Stelle 6 ist 3“
oder kürzer: „ f von 6 ist 3“

a) Schreiben Sie *in Formeln* auf. Halten Sie sich **genau** an die Schreibweise!

- f von -2 ist 7.5 *oder* der Funktionswert von f an der Stelle -2 ist 7.5.
- g von 14 ist a *oder* der Funktionswert von f an der Stelle 14 ist a .

b) Schreiben Sie *in Worten* auf:

- $f(100) = -12$
- $g(b) = 33$

2 Polynomfunktionen



Polynomfunktion, Grad

Sie kennen bereits „Polynomfunktionen“.

Die lineare Funktion ist eine Polynomfunktion 1.Grades:

$$f(x) = ax + b$$

Die quadratische Funktion ist eine Polynomfunktion 2.Grades:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Aufgabe 4

Wie lautet wohl die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion 3.Grades?



Definition

Eine **Polynomfunktion n-ten Grades** ist eine Funktion der Form

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$$

Die Zahl n könnte aber grösser sein, als die zur Verfügung stehenden Buchstaben...
Wir schreiben deshalb besser:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Die Zahlen a_0, a_1, \dots, a_n heissen **Koeffizienten**.

*Koeffizient = „auch effizient“.
Sie tragen auch – neben dem
x-Wert – zur Berechnung bei.*

Beispiel

Die Polynomfunktion $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x + 1.5$ besitzt den Grad 4. Wir schreiben: **grad(f) = 4**.

Die Koeffizienten lauten: $a_4 = 2, a_3 = -3, a_2 = 0, a_1 = 1, a_0 = 1.5$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie grad(f) und geben Sie alle Koeffizienten an.

a) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 5$

b) $f(x) = 2x^5 - x^3$

c) $f(x) = -0.5x^2 + 1.7x - 4.1$

d) $g(x) = ax^2 - 3x^4$

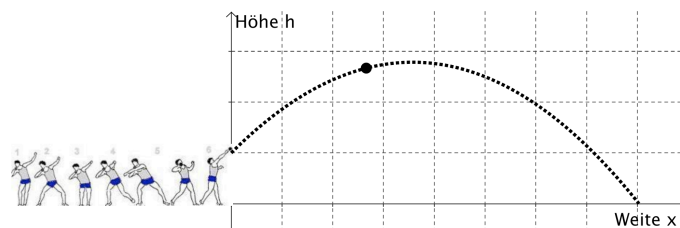
Aber wo kommen Polynomfunktionen überhaupt vor?

Aufgabe 6 Wurfparabel

Bei den olympischen Spielen 1972 wurden Kugelstösse erstmals mit Hilfe von Kameras analysiert. Ziel solcher Analysen ist es, die Wurftechnik zu verbessern.

Der Amerikaner Woods gewann die Goldmedaille. Seine Kugel flog auf der Kurve

$$h(x) = -0.0433x^2 + 0.839x + 2.15 \quad (\text{alle Angaben in Meter})$$



a) Wie gross war die Siegesweite?

b) Welche maximale Höhe erreichte die Kugel?

Aufgabe 7 Kiste falten

Aus einem quadratischen Stück Karton der Grösse 6 dm × 6 dm soll eine oben offene Schachtel gefaltet werden. Dazu werden an den Ecken Quadrate weggeschnitten und die Seiten hochgeklappt.

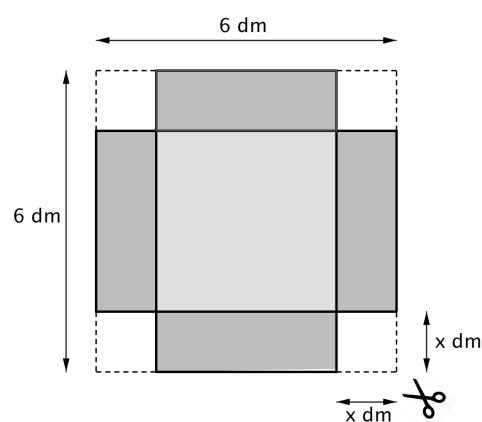
Welches Volumen hat die Schachtel?

Wir wissen, dass für das Volumen eines Quaders gilt:

$$V = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe.}$$

Oder mit x ausgedrückt:

$$V = \underbrace{(6-2x)^2}_{\text{Grundfläche}} \cdot \underbrace{x}_{\text{Höhe}}$$



Je nach dem, wie die Schachtel gefaltet wird (also welche Grösse die von uns abgeschnittenen Eckquadrate haben), verändert sich das Volumen.

Wir haben die „Volumenfunktion“ gefunden ☺. Sie lautet:

$$V(x) = (6 - 2x)^2 \cdot x = (36 - 24x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 24x^2 + 36x.$$

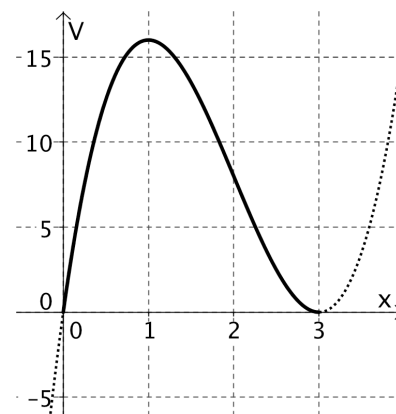
a) Welcher Grad hat diese Polynomfunktion und wie lauten die Koeffizienten?

b) Was nützt einem eine solche Funktion?

- Berechnen Sie die Funktionswerte $V(1)$ und $V(2)$.
- Interpretieren Sie!
Ergibt sich ein grösseres Volumen, wenn man Eckquadrate mit Seitenlänge 1 dm oder mit Seitenlänge 2 dm abschneidet?
- Rechts ist der Graph der Funktion $V(x)$ gezeichnet. Stimmen Ihre berechneten Werte mit denjenigen der Kurve (ungefähr!) überein?

c*) Der Graph vermittelt einen guten Eindruck, wie sich die Funktion verhält.

- Für welchen x -Wert erhält man das grösste Volumen? Sicher?
- Die Funktion hat bei $x = 3$ eine Nullstelle. Warum?





Polynomfunktion zeichnen, TR-funktion: table

Beispiel

Wir zeichnen den Graphen der Funktion $f(x) = 0.5x^3 - 4x^2 + 8x$.

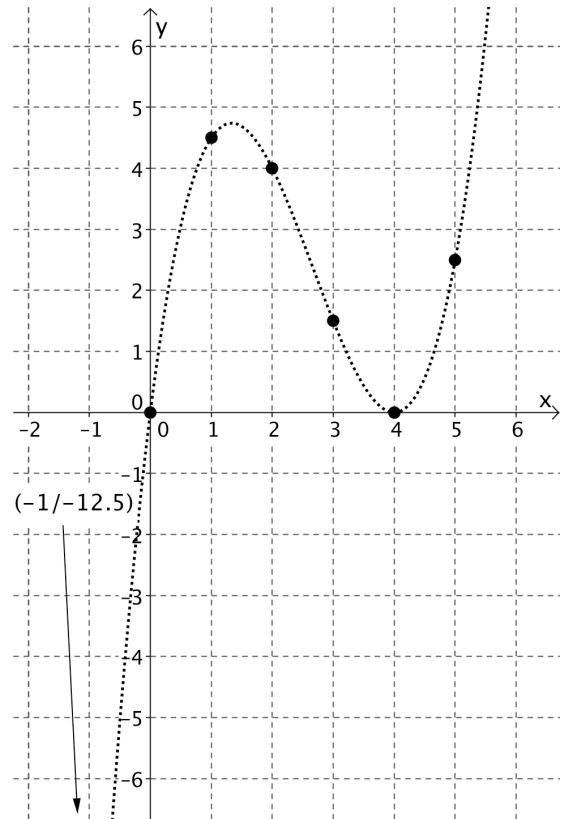
Es handelt sich um eine *Funktion 3.Grades*.

Da wir gar nicht wissen, wie diese Kurve verläuft, berechnen wir einzelne Punkte auf dem Graphen und schauen dann weiter...

Wir rechnen:

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
- $x = 1 \Rightarrow f(1) = 4.5$
- $x = 2 \Rightarrow f(2) = 4$
- $x = 3 \Rightarrow f(3) = 1.5$
- $x = 4 \Rightarrow f(4) = 0$
- $x = 5 \Rightarrow f(5) = 2.5$
- $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -12.5$

Wir zeichnen die entsprechenden Punkte ein und verbinden sie... und sehen:
das sieht definitiv anders aus als das, was wir bisher kennen.
Im Gegensatz zur Parabel hat es hier „zwei Kurven“.



Aufgabe 8 Graph zeichnen

Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = -0.25x^4 + 2x^2$.

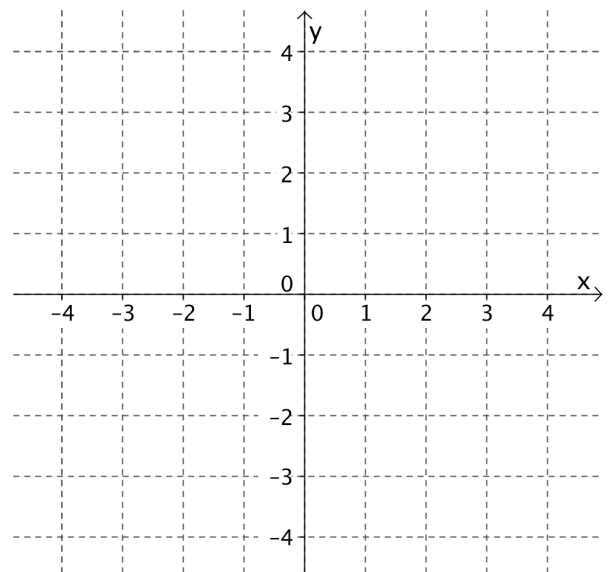
Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$!
Benützen Sie das nebenstehende Koordinatensystem.

Hinweis

Berechnen Sie dazu einzelne Punkte. Verbinden Sie diese zu einer Kurve nach bestem Wissen und Gewissen!

Sie sehen am Graphen bereits einiges.

- Die Funktion hat Nullstellen.
(Können Sie sie berechnen?)
- Der Graph ist symmetrisch.



Bald werden wir diese und weitere Eigenschaften systematisch untersuchen.

Natürlich ist es mühsam, die Graphen von Polynomfunktionen punktweise zu zeichnen...
Wenn etwas langweilig wird, kommt der TR ins Spiel ☺.



Der TR kann uns mit einem Schlag eine ganze Wertetabelle angeben!

Diese Chance lassen wir uns nicht entgehen. Dazu müssen wir dem TR einfach sagen, um welche Funktion es sich handelt. Sprich: wir müssen dem TR die entsprechende *Funktionsgleichung* mitteilen.

Beispiel Wertetabelle auf dem TR / Können!

In Aufgabe 8 ging es die Polynomfunktion $f(x) = -0.25x^4 + 2x^2$.

Wir geben diese Funktionsgleichung in unserem TR ein mit dem Ziel eine *Wertetabelle* zu erzeugen.

Die jeweiligen Eingaben schliessen wir wie immer mit **ENTER** ab.

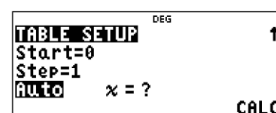
Dazu: wir drücken die Taste **table** und dann **1: Add/Edit function**

$f(x)$ steht schon da. Wir müssen bloss noch den *Funktionsterm* eingeben.

(Wir könnten sogar noch eine zweite Funktion $g(x)$ eingeben... ENTER...)

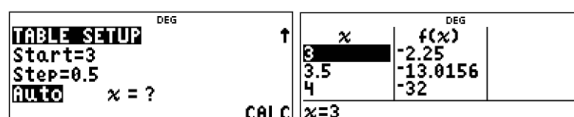
In **TABLE SETUP** werden wir noch gefragt

- wo die Wertetabelle beginnen (**Start**) und
- wie gross die „Schrittweite“ (**Step**) sein soll.



Wir können in der Wertetabelle beliebig weit „nach unten“ gehen.

Wir könnten an einem anderen Ort starten mit einer anderen Schrittweite:



oder beliebige Funktionswerte berechnen:



Sie sehen: völlig natürlich – ein Kinderspiel. Es ist wie am Computer. Ausprobieren macht den Meister!
Vergleichen Sie Ihre in Aufgabe 8 berechneten Werte mit denjenigen die Ihnen der TR angibt! Stimmt es?

Aufgabe 9 Graph zeichnen mit dem TR

a) Zeichnen Sie den Graphen von $f(x) = -0.5x^3 + 2x^2$ in ein Koordinatensystem – sauber und mit Farbe ☺.

Hinweis Erstellen Sie mit Hilfe des TR zuerst eine Wertetabelle. Verbinden Sie die Punkte.

b) Beantworten Sie mit Hilfe des Graphen.

- Besitzt die Funktion Nullstellen? (Können Sie sie berechnen?) Besitzt der Graph eine Symmetrie?
- Was passiert eigentlich mit den Funktionswerten $f(x)$, wenn wir „x immer grösser machen“?
Wenn wir also $x = 10$, dann $x = 100$, $x = 1000$ einsetzen. Gibt es eine „Tendenz“?



Eigenschaften von Polynomfunktionen

Wir haben gesehen:

- Der Graph vermittelt uns einen guten Eindruck, wie sich die Funktion verhält.
- Den Graphen können wir mit einer Wertetabelle zeichnen.

Das Zeichnen eines Graphen mit der Wertetabelle hat aber auch etwas Hilflöses!
Wir sind auf mühsame Berechnungen oder den TR angewiesen.

Es ist also Zeit zu denken...



Im Folgenden werden wir uns mit *Eigenschaften* von Polynomfunktionen auseinandersetzen.

Die Kenntnisse dieser Eigenschaften wird uns helfen, Graphen schneller zu zeichnen – zumindest qualitativ und die Polynomfunktionen damit besser zu verstehen.

Die folgende – ganz wichtige (!) – Eigenschaft von Funktionen kennen wir bereits von früher.



Nullstellen

Analog zu den Polynomfunktionen legen wir fest



Definition

Eine Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

heißt **Polynomgleichung n-ten Grades**.

Sie können bereits Polynomgleichungen lösen!

Beispiel Polynomgleichungen 1.Grades (lineare Gleichungen) & 2.Grades (quadratische Gleichungen)

a) $3x + 5 = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

b) $0.5x^2 + 2x - 2.5 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0.5 \cdot (-2.5)}}{2 \cdot 0.5}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = -5$$

Beachte

- Polynomgleichungen höheren Grades als 2 lassen sich im Allgemeinen nicht ohne TR lösen...
- Allerdings gibt es viele „Sonderfälle“, welche wir trotzdem „von Hand“ lösen können. Die Lösung in diesen Fällen ist von Hand oft *schneller* und macht einen guten Eindruck ☺.

Beispiele Strategien für Polynomgleichungen höheren Grades

- $x^5 - 3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[5]{3}$ Diese Gleichung lösen wir mit der fünften **Wurzel**.
- $0.5x^3 + 2x^2 - 2.5x = 0$
 $\Rightarrow x(0.5x^2 + 2x - 2.5) = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ oder $0.5x^2 + 2x - 2.5 = 0$
 $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -5$ Hier können wir x ausklammern.
 Ein **Produkt ist gleich Null** \Rightarrow einer der Faktoren ist Null
 quadratische Gleichungen lösen wir problemlos...
- Dieser Trick ist so gut, dass wir noch ein Beispiel machen:
 $2x^5 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt[3]{0.5}$
- Ein spezieller Trick ist die sogenannte **Substitution** (= „Ersetzung“).
 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
 Wir substituieren („ersetzen“) x^2 durch u
 $u^2 - 5u + 4 = 0$ quadratische Gleichung ☺
 $\Rightarrow u_1 = 1$ und $u_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1$ und $x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$ und $x_3 = 2, x_4 = -2$

Aufgabe 10 Gleichungen lösen

Lösen Sie folgende Gleichungen von Hand.

a) $x^3 - 9x = 0$ b) $3x^4 - 24x = 0$ c) $x^4 + 4x = 0$ d) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$

Lösen Sie folgende Gleichungen mit dem TR.

e) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$ f) $1.2x^3 + x + 22.6 = 0$

Bei folgenden Gleichungen lassen sich drei von Hand lösen, eine nur mit dem TR.

Lösen Sie diejenigen von Hand die möglich sind. Warum versagen bei der einen unsere Strategien?

g) $0 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$ h) $(x + 2)(x^2 - 16) = 0$ i) $x^4 + x + 1 = 0$ j) $x^5 = 6x - x^3$



Aufgabe 11 Gleichungen gesucht!

Die Gleichung $(x - 2)(x + 3) = 0$ hat offensichtlich die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$.

Ebenso hat die Gleichung $(x + 1)^2(x + 8) = 0$ die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = -8$.

Wie lautet eine Gleichung, die die Lösungen $x_1 = 0, x_2 = 1$ und $x_3 = -4$ besitzt?

Ganz einfach: $x(x - 1)(x + 4) = 0$ bzw. $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$.

Geben Sie eine Gleichung an, welche die Lösungen

- a) $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$ besitzt. b) $x_1 = 0$ und $x_2 = b$ besitzt
- c) $x_1 = 0, x_2 = -1.5$ und $x_3 = 3$ besitzt. d) $x_1 = 0, x_2 = -1.5$ und $x_3 = 3$ besitzt und 4. Grades ist.



Wie viele Lösungen kann eine Gleichung n-ten Grades höchstens haben? Warum?

Geben Sie eine Gleichung dritten Grades an, die eine (zwei, drei) Lösungen besitzt.

Gibt es auch Gleichungen 3. Grades, die keine Lösung haben?



Globalverhalten

Nächste Eigenschaft! „Globalverhalten“ – tönt riesig und ist es auch.
Zusammen mit den Nullstellen ermöglicht es uns in den meisten Fällen, Graphen ganz *relaxed* zu zeichnen.

Beispiel

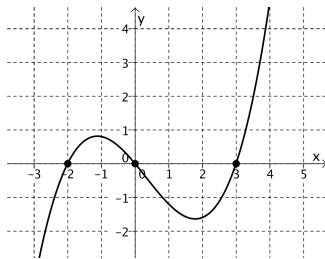
Annahme:

wir kennen die Nullstellen einer Funktion, etwa $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$...
... und man würde Sie bitten, den Graphen zu zeichnen.

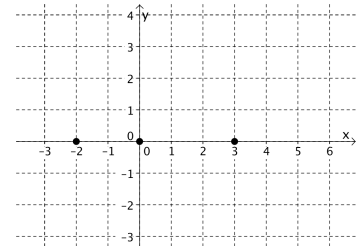
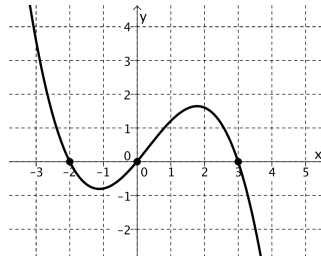
Wie würden Sie ihn zeichnen? Na?

Eben! Sie haben mehrere Möglichkeiten.

Vielleicht würden Sie etwas in der folgenden Art zeichnen:



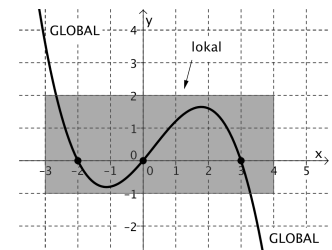
oder



Diese drei Möglichkeiten unterscheiden sich in ihrem *Globalverhalten*.

Das *Globalverhalten* sagt einem, „wohin der Graph geht“, wenn x sehr gross oder sehr klein (also gross negativ) wird.

Uns interessiert also im Moment nicht, was im „Kleinen“ (lokal) passiert, sondern was im „Grossen“ (global) los ist.



Als einfaches, aber wichtiges Beispiel betrachten wir die Polynomfunktion $f(x) = x^2$ (Normalparabel).

Für grösser werdende x („nach rechts“) haben wir

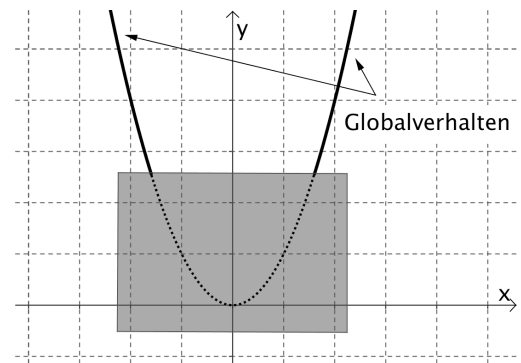
| | | | | | |
|--------|-----|--------|-----------|-----|-----------------|
| x | 10 | 100 | 1000 | ... | $+\infty$ |
| $f(x)$ | 100 | 10'000 | 1'000'000 | | $+\infty^{(2)}$ |

Das heisst: die Kurve verläuft „nach rechts oben“.

Für kleiner werdende x („nach links“) haben wir

| | | | | | |
|--------|-----|--------|-----------|-----|-----------------|
| x | -10 | -100 | -1000 | ... | $-\infty$ |
| $f(x)$ | 100 | 10'000 | 1'000'000 | | $+\infty^{(2)}$ |

Das heisst: die Kurve verläuft „nach links oben“.



Dies ist eine Möglichkeit, wie eine Polynomfunktion „global“ verlaufen kann.

Aufgabe 12 Vier Möglichkeiten für Globalverhalten

Gehen Sie nun analog vor wie im Beispiel. Arbeiten Sie ohne TR!
Machen Sie jeweils Wertetabellen für grösser und kleiner werdende x und skizzieren Sie qualitativ den (Global-)verlauf für

- $f(x) = x^3$
- $f(x) = -x^2$
- $f(x) = -x^3$



Sie haben nun insgesamt vier verschiedene Möglichkeiten für einen möglichen Globalverlauf!



Schreibweise

Werden die Funktionswerte $f(x)$, also die y -Werte, mit grösser werdendem x auch grösser (wenn also die Kurve nach rechts oben geht), dann schreiben wir dies kurz so:

$$x \rightarrow +\infty : f(x) \rightarrow +\infty$$

und sagen:

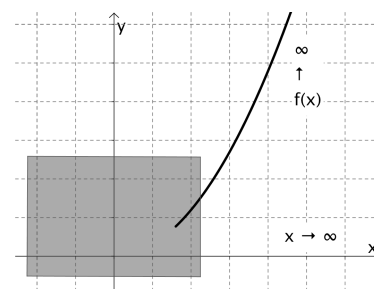
„für x gegen plus unendlich geht $f(x)$ gegen plus unendlich“.

Analog schreiben wir – je nach Globalverhalten:

$$x \rightarrow +\infty : f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow -\infty$$



Aufgabe 13 Globalverhalten von Polynomfunktionen

a) Notieren Sie das Globalverhalten für $f(x) = -x^3$. Legen Sie Wert auf die *korrekte Schreibweise*.

b) Welches Globalverhalten zeigt die Funktion $f(x) = x^n$?

Unterscheiden Sie verschiedene Fälle! Machen Sie jeweils eine qualitative Skizze.

c) Welches Globalverhalten zeigt die Funktion $f(x) = -x^n$?

Unterscheiden Sie verschiedene Fälle! Machen Sie jeweils eine qualitative Skizze.

d) Machen Sie jeweils Wertetabellen für grösser und kleiner werdende x und skizzieren Sie qualitativ den (Global-)verlauf für die nebenstehenden Funktionen. *Hinweis table, step?*

- $f(x) = x^2 - 10x$
- $g(x) = x^3 - 100x^2 + x$
- $h(x) = -0.5x^3 + 10x^2 + 1$
- $i(x) = 2x^4 - 100x^3 - x^2 - 100$

Aufgabe 14 Regel aufstellen & anwenden

a) In Aufgabe 13 haben Sie verschiedene Polynomfunktionen auf ihr Globalverhalten untersucht. Erkennen Sie eine Regel? Was ist ausschlaggebend für das Globalverhalten?

Hinweis Die beiden Funktionen $f(x) = 0.1x^3 - 10x^2 - 5000$ und $g(x) = x^3$ zeigen das gleiche Globalverhalten!

b) Können Sie diese Regel auch begründen?

Wenn Sie unsicher sind bei Ihrer Regel, fragen Sie!



c) Wenden Sie die Regel an! Achten Sie auf die korrekte Schreibweise.

- $f(x) = 3x^4 - x^3 + 3x^2$

- $f(x) = -0.5x^5 + 10x^2$

- $y = x + x^2 + x^3 - x^4$

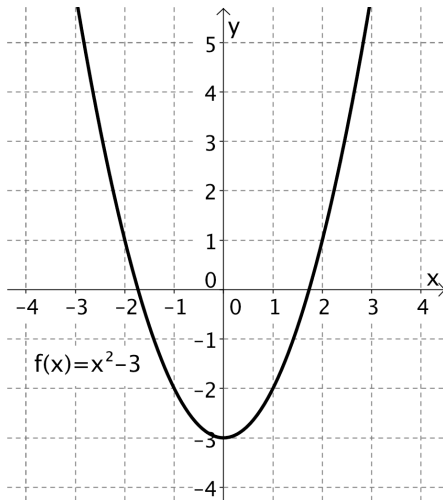
- $g(t) = 0.01t^3 - 123t^2 - 5000$



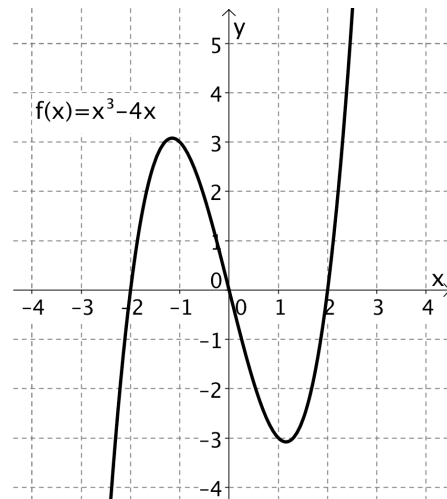
Symmetrie

Wir betrachten *zwei* Arten von Symmetrien.

Achsensymmetrie (zur y-Achse)



Punktsymmetrie (zum Ursprung (0/0))



Versuchen Sie die beiden Symmetrien in (eigene) Worte zu fassen.

Zeichnen Sie selber eine weitere Kurve, die achsensymmetrisch und eine, die punktsymmetrisch ist.

Aufgabe 15 Symmetrie fühlen

a) Oben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 3$ als Beispiel einer achsensymmetrischen Funktion angegeben. Füllen Sie die folgende (lokale!) Wertetabelle aus:

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|------|----|----|----|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | |

b) Oben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 4x$ als Beispiel einer punktsymmetrischen Funktion angegeben. Füllen Sie die folgende (lokale!) Wertetabelle aus:

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|------|----|----|----|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | |

Es ist wichtig, dass Sie bei diesem Beispiel die jeweilige Symmetrie „sehen“ und „fühlen“ ...

... nur dann können Sie verstehen, wie Symmetrie mathematisch definiert wird.



Definition

Eine Funktion $f(x)$ heisst **achsensymmetrisch** (zur y-Achse), wenn für jedes x gilt:

$$f(-x) = f(x).$$

Erklären Sie diese Definition! Z.B mit der Wertetabelle aus Aufgabe 14.

Ergänzen Sie:

Eine Funktion $f(x)$ heisst **punktsymmetrisch** (zum Ursprung), wenn für jedes x gilt:

$$f(-x) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

Aufgabe 16 Symmetrieverhalten von Polynomfunktionen

Welche Symmetrie weist die Funktion $f(x) = x^n$ auf?

Unterscheiden Sie verschiedene Fälle! Machen Sie jeweils eine qualitative Skizze.

Symmetrieverhalten lässt sich *rechnerisch* nachweisen:

Beispiel

a) Besitzt die der Graph der Funktion $f(x) = x^4 - 3x^2$ eine Symmetrie?

Wir wissen

- **Achsensymmetrie** bedeutet: $f(-x) = f(x)$ für jedes x .
- **Punktsymmetrie** bedeutet: $f(-x) = -f(x)$ für jedes x .

Wir rechnen nach. Wir **beginnen immer mit $f(-x)$ und formen um...**

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x) \quad !!!$$

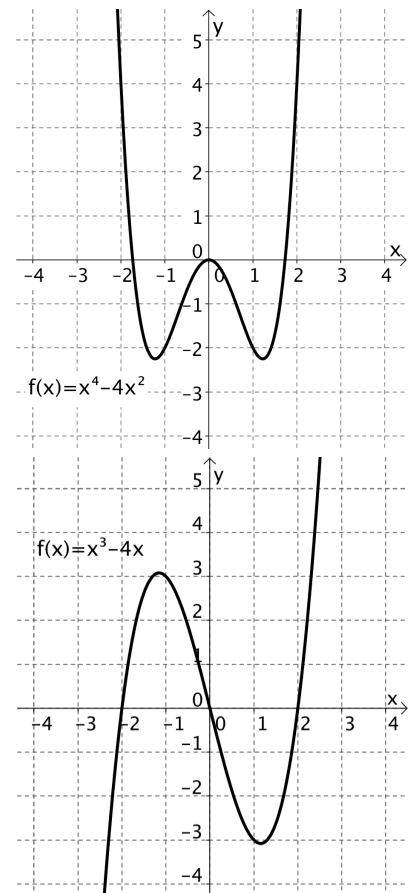
Die Kurve ist also achsensymmetrisch!

b) Besitzt die der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 4x$ eine Symmetrie?

$$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x)$$

Die Kurve ist also punktsymmetrisch!

(beachte zweitletzte Gleichung: -1 ausklammern)



Aufgabe 17 rechnerischer Nachweis & Regel aufstellen

Besitzen die folgenden Graphen eine Symmetrie? Weisen Sie rechnerisch nach.

Formen Sie dazu um, wie im Beispiel. Beginnen Sie immer mit $f(-x) = \dots$

a) $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^2$

b) $f(x) = 5x^3 + 2x$

c) $f(x) = x^2 + 4$

d) $f(x) = x^3 + 2x^2$

e) $f(x) = -0.5x^3 - 3x$

f) Erkennen Sie eine Regel?

Können Sie diese Regel auch begründen?

Wenn Sie unsicher sind bei Ihrer Regel, fragen Sie!



Aufgabe 18 Regel anwenden

Liegt eine Symmetrie vor? Wenden Sie die Regel an

• $f(x) = 0.5x^4 - 14x^2 + 1$

• $g(x) = -x^5 + 2x^3$

• $y = x + x^2 + x^3 - x^4$

• $y = -x^5 + 2x^3 + 1$

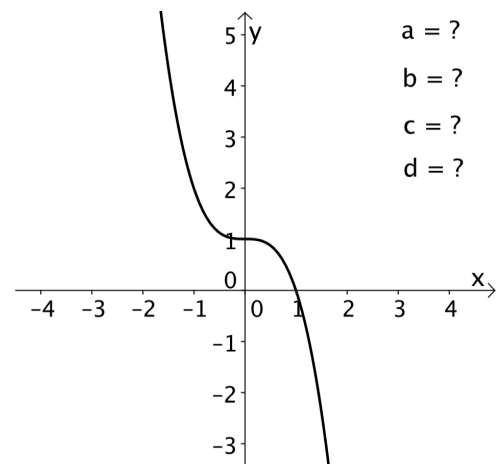
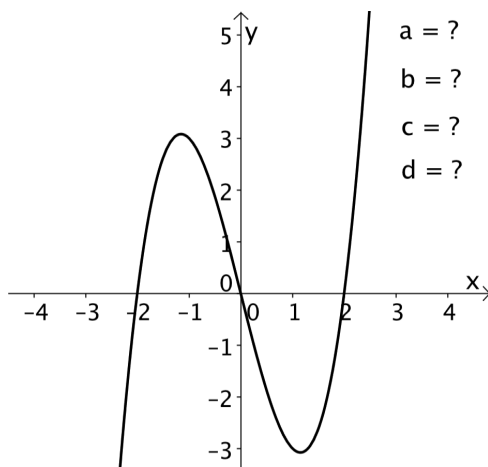


Koeffizienten schätzen

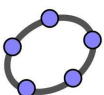
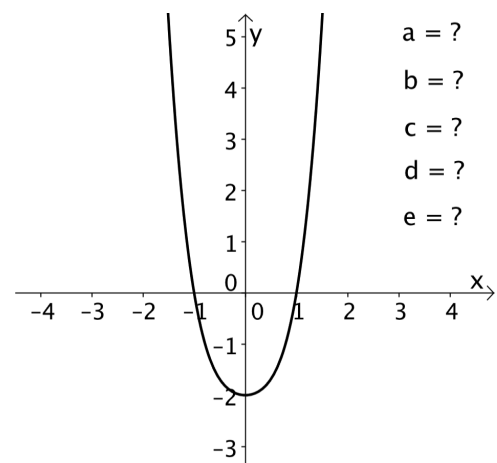
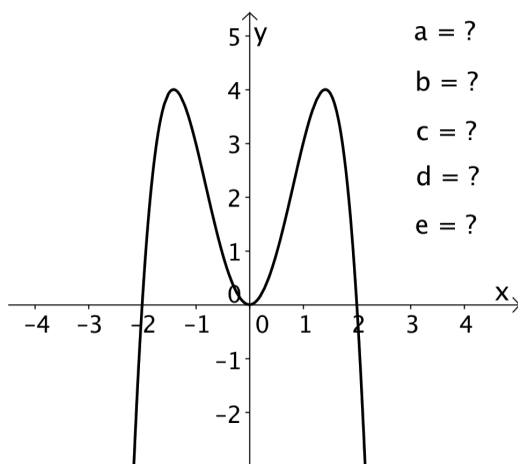
Aus einer Funktionsgleichung lassen sich Eigenschaften der Funktion „herauslesen“. Lässt sich aus den Eigenschaften (im Graphen) umgekehrt etwas über die Funktionsgleichung sagen?

Aufgabe 19 Koeffizienten schätzen

a) Abgebildet ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades.
Welche Aussagen lassen sich über die Koeffizienten a , b , c und d machen?
Begründen Sie!



b) Abgebildet ist der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades.
Welche Aussagen lassen sich über die Koeffizienten a , b , c , d und e machen?
Begründen Sie!



Sie können – wenn Sie wollen – Ihre Schätzung überprüfen mit **GeoGebra**, indem Sie die Funktionen eingeben oder eleganter: die Schieberegler auf die von Ihnen prognostizierten Werte einstellen!



Polynomfunktion bestimmen

Sie wissen schon längst, wie man eine *lineare* Funktion durch *zwei* Punkte bestimmt. Ebenso können Sie eine *quadratische* Funktion durch *drei* Punkte „legen“.

Aber Repetition schadet nie.

Beispiel

a) Bestimmen Sie die lineare Funktion, welche durch die Punkte A(-2/2.5) und B(8/0) verläuft.

Ansatz für die lineare Funktion: $f(x) = ax + b$.

Durch „Einsetzen der Punkte“ ergibt sich ein lineares 2x2 Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} f(-2) = 2.5: \\ f(8) = 0: \end{array} \left| \begin{array}{l} -2a + b = 2.5 \\ 8a + b = 0 \end{array} \right.$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir von Hand oder (notfalls!) mit dem TR und erhalten: $a = -0.25$, $b = 2$.

Damit haben wir die Funktion bestimmt. Sie lautet: $f(x) = -0.25x + 2$.

b) Völlig analog gehen wir bei quadratischen Funktionen vor!

Wie lautet die quadratische Funktion, welche durch die Punkte A(4/9), B(-1/-3.5) und C(-2/-3) verläuft?

Wir erhalten jetzt ein lineares 3x3 Gleichungssystem

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{l} f(4) = 9: \\ f(-1) = -3.5: \\ f(-2) = -3: \end{array} \left| \begin{array}{l} 16a + 4b + c = 9 \\ a - b + c = -3.5 \\ 4a - 2b + c = -3 \end{array} \right. \Rightarrow a = 0.5, b = 1, c = -3 \Rightarrow f(x) = 0.5x^2 + x - 3$$

Aufgabe 20

a) Bestimmen Sie die lineare Funktion, welche durch die Punkte A(-1/-12) und B(5/12) verläuft.

b) Wie lautet die Polynomfunktion 3.Grades, die durch die Punkte A(1/4), B(4/61), C(-1/6) und D(-3/-16) verläuft?

c) Bestimmen Sie die achsensymmetrische Polynomfunktion 4.Grades, welche durch die Punkte A(0/1), B(-1/2) und C(2/-7) verläuft.



Wie hängen die Anzahl vorgegebener Punkte (durch die der Graph verlaufen soll) und der Grad der Polynomfunktion zusammen?

3 Zusammenfassung

Ergänzen Sie den Lückentext!

*ungerade ; Globalverhalten ; achsensymmetrisch ; grad(f) ; Symmetrie ;
n - 1 ; Polynomfunktion ; Nullstellen ; Koeffizienten ; Potenz*

Eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

heisst _____ mit _____ = n.

Die wichtigsten Eigenschaften sind:

- _____

Dazu lösen wir einfach die entsprechende Gleichung $f(x) = 0$.

- _____

Dazu gibt es eine Regel: ausschlaggebend ist der Summand mit der höchsten _____

- _____

Dazu gibt es eine Regel: ausschlaggebend ist, welche Exponenten auftreten.

Treten ausschliesslich gerade Exponenten auf, dann ist $f(x)$ _____

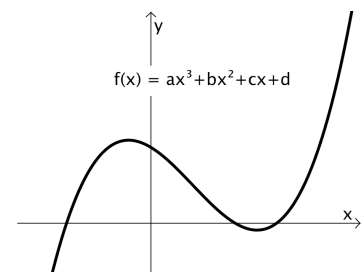
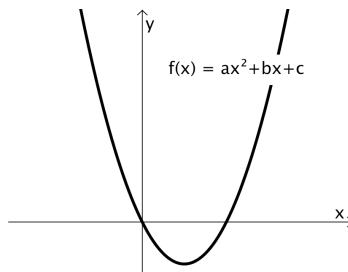
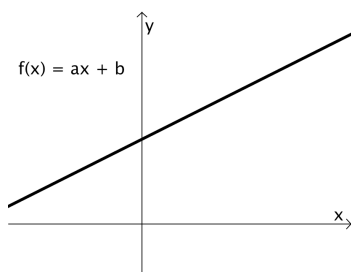
Treten ausschliesslich _____ Exponenten auf, dann ist $f(x)$ punktsymmetrisch.

Die Eigenschaften lassen sich umgekehrt dazu verwenden, etwas über die _____ der Polynomfunktion aussagen zu können.

Polynomfunktionen lassen sich durch vorgegebene Punkte „legen“.

Eine Polynomfunktion, welche durch n vorgegeben Punkte verläuft, besitzt den Grad _____ .

Polynomfunktionen können (müssen nicht!) typische Verläufe aufweisen:



3

Nennen Sie aus Ihrer Sicht **3 Grundaufgaben** im Zusammenhang mit **Polynomfunktionen**.

- Erklären Sie, wie Sie diese lösen.
- Diese Aufgaben sollten sie beherrschen, also in vernünftiger Zeit lösen können.



Aufgabe 21 Eigenschaften & Graph

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0.5x^4 - 3x^2$.

Versuchen Sie es, wenn immer möglich ohne TR ☺.

- Was bedeutet $f(2)$? Berechnen Sie $f(2)$!
- Bestimmen Sie Eigenschaften (Schnittpunkte mit den Achsen, Globalverhalten, Symmetrie) von $f(x)$ und skizzieren Sie dann den Graphen qualitativ.
- Worin unterscheidet sich der Graph von $g(x) = f(x) + 3$ vom Graphen von $f(x)$?

Aufgabe 22

a) Am 20. Juli 1984 warf der damalige Speerwurf-Europameister Uwe Hohn bei einem Leichtathletik-Sportfest in Ost Berlin (Ex DDR!) als erster und einziger Werfer über die 100-Meter-Marke (nachher wurde der Schwerpunkt des Speers geändert so, dass nicht mehr solche Weiten erzielt werden konnten). Die Flugbahn des Speers beschrieb annähernd die Parabel

$$f(x) = -\frac{1}{140}x^2 + \frac{51}{70}x + \frac{21}{10} \quad (\text{Alle Angaben in Metern}).$$

- Was bedeutet $f(10)$? Berechnen Sie $f(10)$!
- Auf welcher Höhe wurde der Speer abgeworfen?
- Wie weit flog der Speer?
- Skizzieren Sie mit Hilfe von b) und c) qualitativ den Verlauf des Wurfes.



Welche Höhe erreichte der Speer?

b) Die Funktion, die die durchschnittliche, tägliche Länge L eines Staus vor einer Baustelle beschreibt ist $L(t) = -0.01t^4 + 0.51t^3 - 9.43t^2 + 74.97t - 213.64$ mit $7 \leq t \leq 20$, wobei t Uhrzeit in Stunden, L in km.

- Was bedeutet $L(10)$? Berechnen Sie $L(10)$!
- Skizzieren Sie mit Hilfe von **table** qualitativ den Verlauf des Graphen bzw. des Staus.
Hinweis $7 \leq t \leq 20$
- Wann ist der Stau fertig? **Hinweis** num-solv



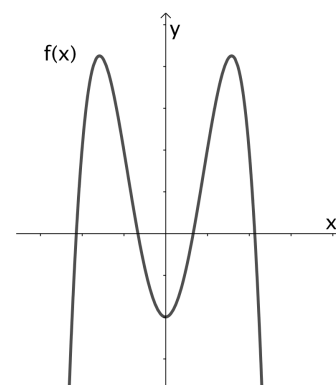
Wann ist der Stau am längsten? Wie lang?

Aufgabe 23

a) Eine punktsymmetrische Funktion 3. Grades verläuft durch die Punkte $A(3/10.5)$ und $B(-2/-2)$. Wie lautet sie?

b) Vgl. Abbildung.

- Was für einen Grad dürfte die Funktion mit nebenstehendem Graph besitzen? Wie lautet die allgemeine Funktionsgleichung?
- Treffen Sie möglichst viele Aussagen über die Koeffizienten der Funktionsgleichung.



Aufgabe 21

a) $f(2)$ ist der Funktionswert (y-Wert) an der Stelle $x = 2$. Es ist: $f(2) = -4$.
Geometrisch: Der Punkt $P(2/-4)$ liegt auf dem Graphen.

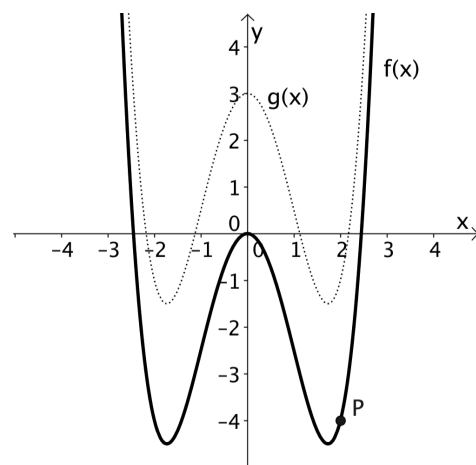
b) Schnittpunkte mit der

- y-Achse: $(0/0)$
- x-Achse: $(0/0), (-\sqrt{6}/0), (\sqrt{6}/0)$ bzw. Nullstellen $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$

Symmetrie: f ist achsensymmetrisch, weil...

Globalverhalten: $x \rightarrow +\infty : f(x) \approx 0.5x^4 \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty : f(x) \approx 0.5x^4 \rightarrow +\infty$

c) Der Graph von g ist um $+3$ in Richtung y-Achse verschoben.



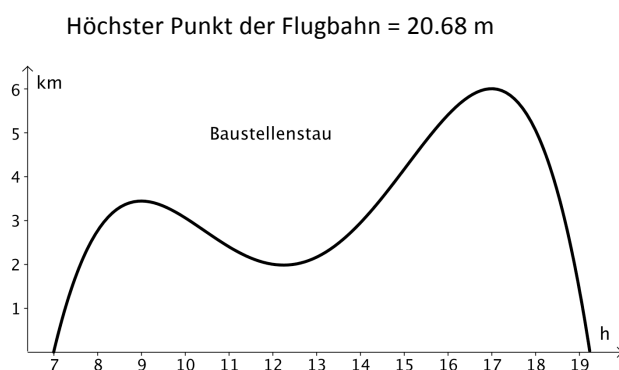
Aufgabe 22

a) Speerwurf

- $f(10)$ = die nach 10 m (horizontal) erreichte Höhe des Speers = 8.67 m
- Abwurfhöhe = $f(0) = 2.1$ Meter
- Wurfweite: $f(x) = 0 \Rightarrow 104.81$ m

b) Stau

- $L(10)$ = die Länge des Staus um 10 Uhr = 3.06 km
- $L(t) = 0 \Rightarrow 19.24$, also um ca. 19.30



Aufgabe 23

a) $f(x) = 0.5x^3 - x$

b) Die Funktion hat sicher Grad 4 (warum?), ist also von der Form: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Es ist: $a < 0$, weil ... (Alle Antworten begründen!)
 $b = d = 0$, weil ...
 $e < 0$, weil ...
 $c > 0$, weil ... (c ist schwieriger! Evt. fragen)

Anhang Polynomdivision

Polynome lassen sich addieren (bzw. subtrahieren) und multiplizieren!

Beispiel

Für die beiden Polynome $p(x) = x - 2$ und $q(x) = 2x^2 + 4x + 3$ ist

- $p(x) + q(x) = (x - 2) + (2x^2 + 4x + 3) = 2x^2 + 5x + 1$
- $p(x) \cdot q(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 + 4x + 3) = \dots = 2x^3 - 5x - 6$

Kann man Polynome auch dividieren?

Ja! Die Division ist ja die Umkehrung der Multiplikation und daher muss aufgrund des Beispiels gelten:

$$(2x^3 - 5x - 6) : (x - 2) = (2x^2 + 4x + 3)$$

Das Vorgehen dazu heisst **Polynomdivision**. Schauen Sie im Internet nach oder fragen Sie. Führen Sie dann folgende Polynomdivisionen durch.

Aufgabe A

a) $(x^2 + x - 12) : (x + 4)$

b) $(3x^3 - 18x^2 - 78x + 9) : (x^2 - 9x + 1)$

Übrigens:

Die Polynomdivision geht nicht immer „schön“ auf. Manchmal gibt es auch einen Rest, ganz genau wie beim Dividieren mit ganzen Zahlen. Auf dies gehen wir aber jetzt nicht ein.

Im Zusammenhang mit der Polynomdivision gibt es eine „praktische“ Erkenntnis:

Wenn man (aus irgendeinem Grund!) weiss, dass $x = 2$ eine Nullstelle des Polynoms $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ ist, dann kann man das Polynom durch $(x - 2)$ dividieren:

$$(x^3 - 6x^2 + 3x + 10) : (x - 2) = x^2 - 4x - 5$$

Und jetzt?

Jetzt haben wir ein quadratisches Polynom, dessen Nullstellen wir wie gewohnt berechnen können!

Die *Polynomdivision* hilft uns also den *Grad der Gleichung zu reduzieren*.

Dies ist wertvoll, weil wir nun die Gleichung lösen können, ohne auf den TR lösbar angewiesen zu sein!

Aufgabe B

Bekannt sei die angegebene Lösung (Nullstelle). Finden Sie die weiteren Lösungen!

a) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$; $x = 3$

b) $2x^3 + 8x^2 + 10x + 4 = 0$; $x = -2$

