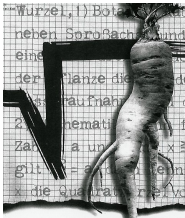


# Potenzen



## ... und Wurzeln



Potenzen mit natürlichen und nicht-natürlichen Exponenten, Wurzeln  
Potenzfunktionen  
Normdarstellung von grossen und kleinen Zahlen, Fermi-Aufgaben

Das Wort

### Potenz

kommt aus dem lateinischen Wort „*potentia*“ und heisst „Macht“.

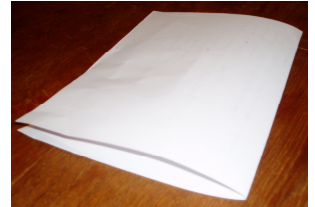
Was soll an Potenzen „mächtig“ sein? Sehen Sie selbst...

Falten Sie ein Papier, wie abgebildet.

Wie „hoch“ wird es, wenn man es 50-mal faltet?

- ... so hoch wie Sie?
- ... so hoch wie die Distanz Erde-Mond?

Schätzen Sie!

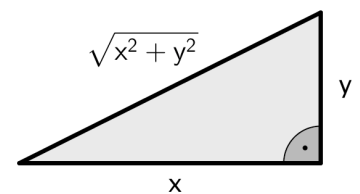


---

Ein häufiger Fehler ist:  $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$ .

Erklären Sie anhand der Abbildung, warum dies falsch sein muss.

Gilt:  $\sqrt{x^2 + y^2} < x + y$  oder  $\sqrt{x^2 + y^2} > x + y$  ? Warum?



## Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Einstieg</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Potenzen</b>	<b>5</b>
	<ul style="list-style-type: none"><li>• Potenzen mit natürlichen Exponenten – Potenzgesetze</li><li>• Potenzen – negative Exponenten</li><li>• Potenzen – rationale Exponenten</li></ul> Exkurs: n-te Wurzel <ul style="list-style-type: none"><li>• Potenzfunktionen</li></ul>	
<b>3</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Anhang</b>	<b>19</b>
	<ul style="list-style-type: none"><li>• Weitere Aufgaben – Lösungen</li><li>• Normdarstellung, Fermi-Aufgaben</li></ul>	



„If we learn from our mistakes, shoundn't  
I make as many mistakes as possible?“

# 1 Einstieg

Die Multiplikation ist eine abkürzende Schreibweise für die Addition gleicher Summanden:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 5$$

Die Potenz ist eine abkürzende Schreibweise für die Multiplikation gleicher Faktoren:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$$

Potenzen sind praktisch:

$9^6$  ist einfacher zu schreiben und zu lesen als  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ .

Wir können jede Zahl mit sich selbst so oft multiplizieren wie wir wollen. Dies halten wir fest.



## Definition

Der Term

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ Faktoren}}$$

heißt **Potenz**. A ist die **Basis** und n der **Exponent**.

$$5^3 =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

$$\sqrt{3}^2 =$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^4 =$$

## Vorsicht bei Klammern und Vorzeichen!

$$-2^4 =$$

$$(-2)^4 =$$

$$-2^3 =$$

$$(-2)^3 =$$

$$(-1)^n =$$

$$3 \cdot 4^2 =$$

$$(3 \cdot 4)^2 =$$

$$-3^2 \cdot (-8 \cdot 0.5)^2 \cdot (-1)^{10} =$$

## Beispiel 1 Potenzen für ...

### a) Freunde des Gartens

In jedes Loch wird ein Bäumchen gesetzt...  
Wie viele Zweigenden sind es dann insgesamt?  
Denken und antworten Sie in Dreierpotenzen!



### b) Freunde des Freundes

Ein Gerücht kann sich sehr schnell verbreiten... Zu Beginn weiss es nur eine Person. Jeden Tag wird das Gerücht von jeder Person, die es kennt, genau einer weiteren Person weitererzählt.

- Wie viele Personen kennen das Gerücht am 6. Tag?
- Wie viele kennen es am n-ten Tag?
- Wie lange geht es, bis die ganze Kanti Stadelhofen davon weiss?



### c) Freunde des Wortes

Beschreiben Sie die Zahl in Worten. **Beispiel**  $10^6$  ist eine 1 gefolgt von 6 Nullen.

- $10^{12}$
- $10^9 - 1$
- $(10^7 - 1) : 3$
- $(10^{10} - 1) : 9$



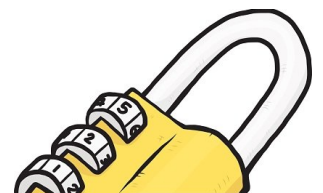
### d) Freunde der Formeln

- Wie lautet die Formel für die Fläche eines Quadrates?
- Wie lautet die Formel für das Volumen eines Würfels?
- Nennen Sie mindestens eine weitere mathematische Formel, bei der eine Potenz vorkommt.

### e) Freunde der Kombinatorik

Ein Zahlenschloss hat

- 3 Räder mit je 10 Ziffern.  
Wie viele verschiedene Einstellungen können vorgenommen werden?
- n Räder mit k verschiedenen Ziffern.  
Wie viele verschiedene Einstellungen können vorgenommen werden?

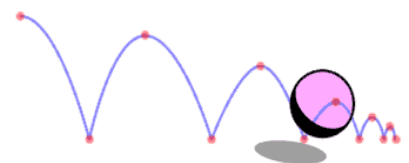


### f) Freunde des Sports

Ein Ball fällt zu Boden und springt wieder hoch...

Bei jedem Aufprall erreicht er nur noch 80% seiner vorangehenden Höhe.  
Welche Höhe erreicht der Ball noch, wenn er Ihnen auf der Höhe 1.5 m aus den Händen rutscht und

- 2-mal aufgeprallt ist?
- n-mal aufgeprallt ist?



## 2 Potenzen



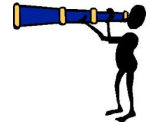
### Potenzen mit natürlichen Exponenten – Potenzgesetze

$$5^3 \cdot 5^4 = ?$$

**Muster erkennen = Muster „sehen“!**

Es ist:

$$5^3 \cdot 5^4 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ Fünfen}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4 \text{ Fünfen}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{7 \text{ Fünfen}} = 5^7$$



„Sehen“ sie das Muster?

### Beispiel 2

a) Vereinfachen Sie, aber Achtung: Sie müssen „sehen“ Sie, was Sie tun!

- $7^3 \cdot 7^5 =$
- $2^2 \cdot 2^4 =$
- $(-3)^2 \cdot (-3)^{11} =$

b) Verallgemeinern Sie! Das heisst:

- Lösen Sie sich von den Zahlen. Ersetzen Sie sie durch Variablen!
- Bringen Sie dadurch eine (allgemeine) **Gesetzmässigkeit** zum Ausdruck.

$$7^5 : 7^2 = \frac{7^5}{7^2} = ?$$

**Muster erkennen = Muster „sehen“!**

Es ist:

$$7^5 : 7^2 = \frac{7^5}{7^2} = \frac{\overbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}^{5 \text{ Siebner}}}{\underbrace{7 \cdot 7}_{2 \text{ Siebner}}} = \text{kürzen!} = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3 \text{ Siebner}} = 7^3$$



Sie müssen das „sehen“, sonst bleiben Sie blind.

### Beispiel 3

a) Vereinfachen Sie, „sehen“ Sie.

- $\frac{5^5}{5^3} =$
- $\frac{14^6}{14} =$
- $\frac{(-8)^5}{(-8)^4} =$

b) Verallgemeinern Sie!

---

$$12^3 \cdot 0.5^3 = ?$$

Schwierig? Nein!  
Muster erkennen...

Es ist:

$$12^3 \cdot 0.5^3 = \underbrace{12 \cdot 12 \cdot 12}_{3 \text{ Zwölfer}} \cdot \underbrace{0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5}_{3 \dots} = \underbrace{12 \cdot 0.5 \cdot 12 \cdot 0.5 \cdot 12 \cdot 0.5}_{3 \text{ Produkte}} = (12 \cdot 0.5)^3 = 6^3 \quad (= 216)$$

#### Beispiel 4

a) Vereinfachen Sie, „sehen“ Sie.

- $8^5 \cdot 0.25^5 =$
- $(-10)^9 \cdot 0.1^9 =$
- $\left(\frac{8}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^4 =$
- $52^3 : 26^3 =$



Muster sehen!

b) Verallgemeinern Sie!

---

$$(3^4)^5 = ?$$

Es ist:

$$(3^4)^5 = \underbrace{3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4}_{5 \text{ Potenzen}} = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{5\text{-mal } 4 \text{ Dreier} = 20 \text{ Dreier}} = 3^{20}$$

#### Beispiel 5

a) Vereinfachen Sie, „sehen“ Sie.

- $(2^3)^5 =$
- $(4^4)^4 =$
- $(10^2)^5 =$



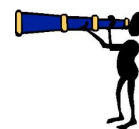
Muster sehen!

b) Verallgemeinern Sie!

#### Beispiel 6      Richtig oder falsch? Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

- |   |                          |                             |                          |
|---|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| (a) $a^2 \cdot a^3 = a^5$                 | <input type="checkbox"/> | (b) $a^2 \cdot a^3 = a^6$   | <input type="checkbox"/> |
| (c) $\frac{b^6}{b^4} = \frac{6}{4} = 1.5$ | <input type="checkbox"/> | (d) $\frac{b^7}{b^2} = b^5$ | <input type="checkbox"/> |
| (e) $(c^3)^4 = c^7$                       | <input type="checkbox"/> | (f) $(c^3)^4 = c^{12}$      | <input type="checkbox"/> |
| (g) $(-x)^6 = x^6$                        | <input type="checkbox"/> | (h) $-(-x)^4 = -x^4$        | <input type="checkbox"/> |
| (i) $y^2 + y^5 = y^7$                     | <input type="checkbox"/> | (j) $2y^3 - 7y^3 = -5y^3$   | <input type="checkbox"/> |
| (k) $(2z)^3 = 8z^3$                       | <input type="checkbox"/> | (l) $-4x^2 = 16x^2$         | <input type="checkbox"/> |





Muster sehen!

### Beispiel 7 Potenzgesetze

a)  $a^3 \cdot a^5 =$

b)  $(-b)^3 \cdot b^8 =$

c)  $(-x)^3 \cdot (-x) =$

d)  $\frac{x^4}{x^2} =$

e)  $\frac{6x^7}{2x^3} =$

f)  $\frac{a^5}{(-a)^5} =$

g)  $10^8 \cdot 10 \cdot 10^3 =$

h)  $(1+x)^3 \cdot (1+x) =$

i)  $a^4 \cdot a^m =$

j)  $x^{n+m} \cdot x^{n-m} =$

k)  $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^m =$

l)  $\frac{x^{m+1}}{x^2} =$

m)  $\frac{8x^{10}}{2x^n} =$

n)  $7a^m \cdot b^{2n} \cdot a^3 \cdot (-b)^3 =$

o)  $6a^{2n} b^{3n} \cdot \left(-\frac{2}{3} a^n b\right) =$

p)  $\frac{x^n \cdot x^3}{5x^2} =$

q)  $a^7 \cdot b^7 =$

r)  $(xyz)^3 =$

s)  $\frac{88^3}{44^3} =$

t)  $\frac{(3a)^n}{a^n} =$

u)  $(10^3)^4 =$

v)  $(y^4)^2 =$

w)  $(3x^{m+1})^2 =$

x)  $(a^n \cdot a^m)^k =$

y)  $2a^2 b^3 (5a^4 - 3ab) =$

z)  $(a^m + b^n)(a^{2m} + (ab)^3) =$

### Beispiel 8 faktorisieren, kürzen

Faktorisieren Sie! **Beispiel**  $x^5 + x^2 = x^2(x^3 + 1)$

a)  $2x^6 - x^4 + 5x^3 =$

b)  $a^{n+2} - a^n =$

Kürzen Sie! **Beispiel**  $\frac{a^4 - a^3}{a^2} = \frac{a^3(a-1)}{a^2} = a(a-1)$

c)  $\frac{a^{12} - a^8}{a^4} =$

d)  $\frac{x^n - 4x^3}{x^2} =$



Welche Zahl ist grösser:  
 $2^{500}$  oder  $8^{167}$  ?



## Potenzen – negative Exponenten



Muster sehen!

$$5^{-3} = ?$$

Aber was soll das sein?

Wir wissen:

$$5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ Fünfen}}$$

„5 hoch +3“ heisst: ich **multipliziere** dreimal die 5.

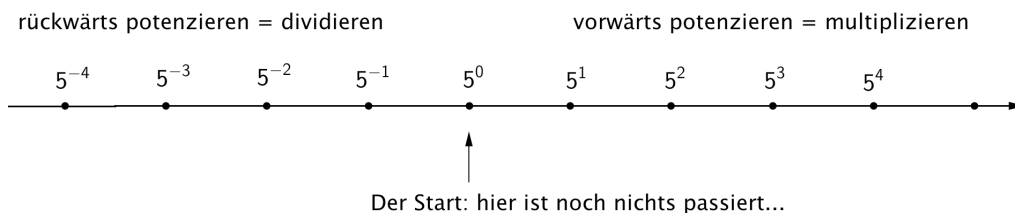
Was soll  $5^{-3}$  bedeuten? Negativ?

Das Gegenteil von „+“ ist „-“. Das Gegenteil von Multiplizieren ist? **Dividieren!**

Ein *negativer* Exponent heisst: wie oft ich durch die Zahl *dividiere!*

### Beispiel

- $5^{-1} = 1 : 5 = \frac{1}{5} = 0.2$
- Oder mehrmals:  $5^{-3} = 1 : 5 : 5 : 5 = \frac{1}{5^3} = 0.008$



Wir wissen zudem von den Potenzgesetzen:

$$5^6 : 5^3 = \frac{5^6}{5^3} = 5^{6-3} = 5^3$$

und jetzt:

$$5^3 : 5^6 = ?$$

$$5^3 : 5^6 = \frac{5^3}{5^6} =$$

Rechnung  $\rightarrow \frac{1}{5^3}$

Potenzgesetze  $\rightarrow 5^{3-6} = 5^{-3}$

**Alles perfekt!**

Negative Exponenten und Potenzgesetze vertragen sich! ☺



## Definition

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ; \quad \text{speziell: } a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$3^{-2} =$

$10^{-3} =$

$x^{-4} =$

$0.5^{-1} =$

### Merke

Um das Vorzeichen des Exponenten zu wechseln, müssen wir einfach den Kehrwert bilden.

### Beispiel 9      Potenzen mit negativen Exponenten!

**a)**  $5^{-2} =$

**b)**  $2^{-3} =$

**c)**  $1^{-8} =$

**d)**  $0.5^{-2} =$

**e) bis h)** Schreiben Sie als Potenz, deren Basis eine natürliche Zahl ist.

**e)**  $\frac{1}{16} =$

**f)**  $0.001 =$

**g)**  $\frac{1}{81} =$

**h)**  $0.2 =$

**i) bis l)** Klammern, Vorzeichen, ... Sorgfalt!

**i)**  $(-2)^{-2} =$

**j)**  $-2^{-2} =$

**k)**  $(-2)^{-3} =$

**l)**  $-2^{-3} =$

**m) bis p)** Schreiben Sie mit positivem Exponenten. **Beispiel**  $4x^{-3} = \frac{4}{x^3}$ .

**m)**  $3a^{-2} =$

**n)**  $(3a)^{-1} =$

**o)**  $-7m^{-5} =$

**p)**  $ab^{-6} =$

**q) bis t)** vermischte... „sehen“ und Sorgfalt

**q)**  $(-4x)^{-2} =$

**r)**  $\frac{1}{x^2} =$

**s)**  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$

**t)**  $\left(\frac{4}{3}\right)^{-n} =$

### Beispiel 10      Potenzgesetze

**a)** Gelten die Potenzgesetze auch für Potenzen mit negativen Exponenten? Machen Sie selber geeignete Beispiele, um dies herauszufinden! **Beispiel:**  $x^{-2} \cdot x^{-3} = ?$

**b)**  $x^3 \cdot x^{-5} =$

**c)**  $3z^{-4} \cdot z^6 =$

**d)**  $(2x)^3 x^5 x^{-1} =$

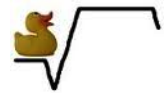
**e)**  $(y^{-2})^3 =$

**f)**  $(-2a)^{-2} \cdot (5a)^{-2} =$

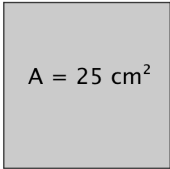
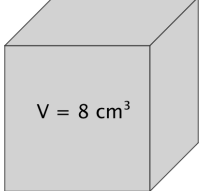
**g)**  $\frac{x^5}{x^{-5}} =$



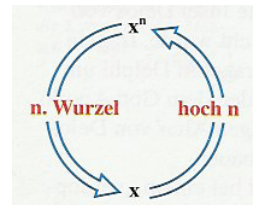
## Potenzen – rationale Exponenten



### Exkurs: n-te Wurzel

Quadratwurzel (2-te Wurzel) $\sqrt{\dots}$		Kubikwurzel (3-te Wurzel) $\sqrt[3]{\dots}$	
Es ist	$4^2 = 16$		$4^3 = 64$
bzw.	$\sqrt{16} = 4$		$\sqrt[3]{64} = 4$
Beispiel			
Seitenlänge a =		Seitenlänge a =	
	a = ?		a = ?
$n$ -te Wurzel $\sqrt[n]{\dots}$			

**Beispiel**  $x^5 = 243 \Rightarrow x =$



#### Beispiel 11 n-te Wurzeln im Kopf (berechnen oder schätzen!)

- |                               |                              |                                |                         |
|-------------------------------|------------------------------|--------------------------------|-------------------------|
| a) $\sqrt[3]{1000} =$         | b) $\sqrt[5]{32} =$          | c) $\sqrt[3]{10} =$            | d) $\sqrt[6]{1} =$      |
| e) $\sqrt{10^4} =$            | f) $\sqrt[4]{10^4} =$        | g) $2 \cdot \sqrt[3]{0.001} =$ | h) $\sqrt[10]{100} =$   |
| i) $\sqrt{3^{-4}} =$          | j) $\sqrt[4]{11^{-4}} =$     | k) $(-\sqrt[5]{6})^5 =$        | l) $\sqrt[3]{5^6} =$    |
| m) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} =$ | n) $\sqrt{x^4} =$            | o) $\sqrt{x^{-2}} =$           | p) $\sqrt[4]{a^8} =$    |
| q) $\sqrt[3]{8 \cdot 7} =$    | r) $\sqrt[3]{a \cdot b^3} =$ | s) $\sqrt[n]{a^n \cdot b} =$   | t) $\sqrt[n]{(ab)^m} =$ |

u) Wie lang ist eine Seite, wenn der Würfel das Volumen  $V = 100 \text{ m}^3$  hat? Wenn er das Volumen  $V$  hat?



Die **Quadratwurzel**  $\sqrt{a}$  einer positiven Zahl  $a$  ist diejenige positive Zahl, deren Quadrat  $a$  ist. Zudem gilt:  $\sqrt{0} = 0$ .

- Geben Sie die Definition der  $n$ -ten Wurzel an!
- Was versteht man unter dem Symbol  $\sqrt[6]{13}$ ? Antworten Sie in einem ganzen Satz!
- Komentieren Sie folgende Aussage:  
„Es ist  $\sqrt{4} = 2$  oder  $\sqrt{4} = -2$ , weil: wenn ich das Ergebnis quadriere, bekomme ich 4.“
- Sehen Sie Probleme, wenn man Wurzeln aus negativen Zahlen zulässt? Also z.B.  $\sqrt{-4}$  oder  $\sqrt[3]{-8}$ ?



Jetzt kommen rationale Exponenten ins Spiel!

$$5^{1/3} = ?$$

Aber was soll das sein?

Einerseits wissen wir:  $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$  und andererseits sagt uns das Potenzgesetz:  $(5^{1/3})^3 = 5^{1/3 \cdot 3} = 5^1 = 5$ .

Wir haben keine andere Wahl, als zu setzen:

$$5^{1/3} =$$



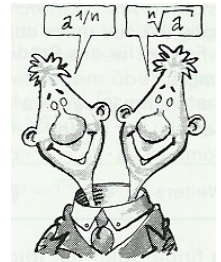
Muster sehen!



### Definition

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{m/n} = \begin{cases} = a^{1/n \cdot m} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m \\ = a^{m \cdot 1/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m} \end{cases}$$



### Beispiel 12 Wurzeln und rationale Exponenten

a) bis h) Bringen Sie jeweils in die andere „Form“ (Potenz bzw. Wurzel).

a)  $\sqrt[3]{6} =$

b)  $\sqrt[3]{18^2} =$

c)  $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

d)  $\frac{3}{\sqrt[5]{x}} =$

e)  $5^{\frac{4}{3}} =$

f)  $3^{-0.5} =$

g)  $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} =$

h)  $x^{0.7} =$

i) bis p) Berechnen oder schätzen Sie!

i)  $16^{0.5} =$

j)  $0.01^{\frac{1}{2}} =$

k)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} =$

l)  $100^{\frac{1}{3}} =$

m)  $100^{\frac{1}{100}} =$

n)  $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} =$

o)  $\sqrt[100]{2^{101}} =$

p\*)  $1024^{1.1} =$

q bis x) Potenzgesetze anwenden!

q)  $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} =$

r)  $28^{\frac{1}{2}} : 7^{\frac{1}{2}} =$

s)  $(2^{0.5})^{-4} =$

t)  $0.5^{-0.5} \cdot 4.5^{-0.5} =$

u)  $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{4}{5}} =$

v)  $2ab \cdot 3a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} =$

w)  $5x^2 \cdot \sqrt[3]{x} =$

x)  $\sqrt[3]{3x^2} \cdot \sqrt[3]{9x^4} =$



• Was ist richtig?  $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[3]{a}$  oder  $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$  ??

• Begründen Sie zuerst, dass gilt:  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$ . Berechnen Sie dann möglichst geschickt:  $\sqrt[4]{81^5}$ .



## Potenzfunktionen



### Definition

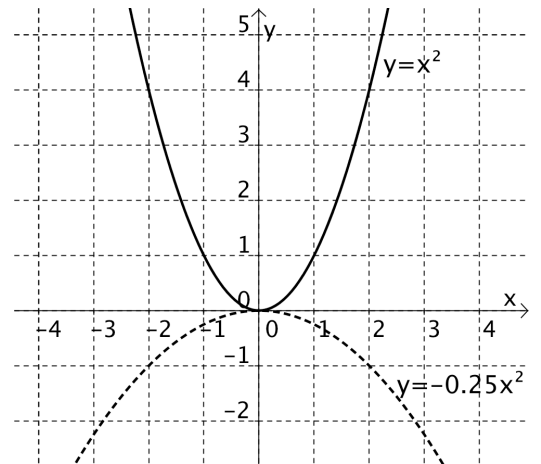
Eine Funktion mit der Gleichung

$$y = a \cdot x^n$$

heisst **Potenzfunktion n-ten Grades**.

Sie kennen bereits eine Potenzfunktion, nämlich die „quadratische Funktion“ der Form  $y = ax^2$ .

Sie wissen auch, welchen Einfluss der Parameter  $a$  auf das Aussehen der Kurve hat.



### Beispiel 13 kubische Funktion

a) Skizzieren Sie die „kubische“ Potenzfunktion  $y = x^3$ .  
Merken Sie sich diesen Verlauf. Er tritt immer wieder auf!

b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem – aber mit jeweils *unterschiedlichen* Farben – die Potenzfunktionen

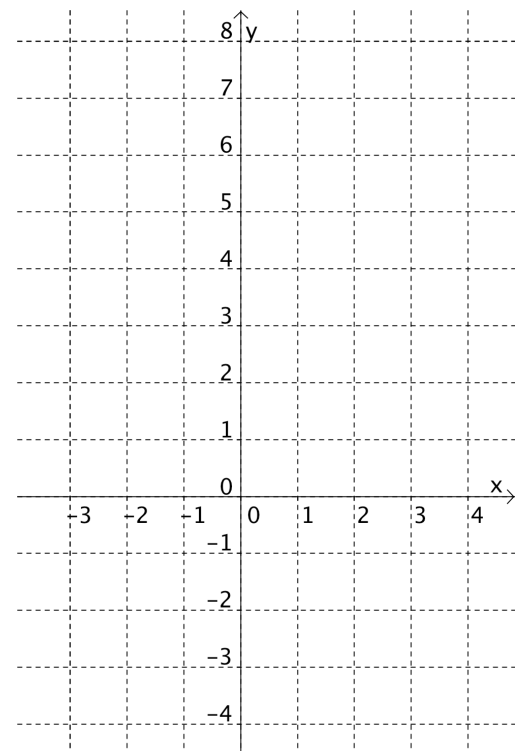
- $y = 0.5x^3$
- $y = -x^3$

c) Machen Sie sich klar, dass der Parameter  $a$  genau denselben Effekt hat wie bei der quadratischen Funktion.

**Gesetzmässigkeit!**

d) Der Punkt  $P$  liegt auf der Kurve  $y = x^3$ . Bestimmen Sie  $x$  bzw.  $y$ .

- $P(3/y)$ .  $y =$   $P(x/2)$ .  $x =$
- $P(-2/y)$ .  $y =$   $P(x/-2)$ .  $x =$



Vorsicht bei der Schreibweise!

**Beispiel 14 Potenzfunktionen... Muster erkennen**

Eingezeichnet im nebenstehenden Koordinatensystem sind die Potenzfunktionen

- $y = x^2$  (durchgezogen)
- $y = x^3$  (gestrichelt)

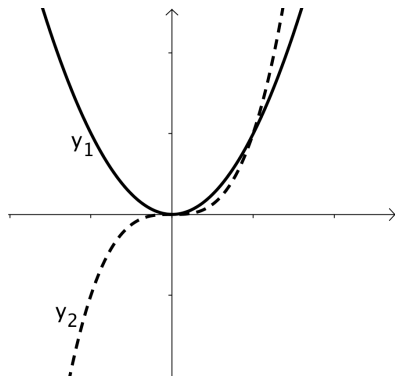
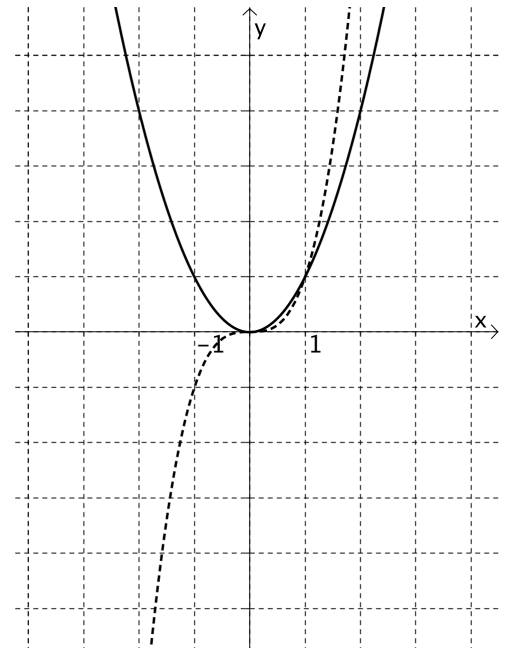
a) Skizzieren Sie – qualitativ! – die Potenzfunktionen

- $y = x^4$
- $y = x^5$

mit unterschiedlicher Farbe in das Koordinatensystem ein.

b) Es dürfte Ihnen nun nicht mehr schwerfallen, sich vorzustellen, wie die Kurve  $y = x^6$  aussieht...

**Gesetzmässigkeit!** Dazu:



Im nebenstehenden Koordinatensystem sind die Kurven

- $y_1 = x^n$  und
- $y_2 = x^m$

gezeichnet. Was ist richtig? (Bitte ankreuzen!)

- |            |                          |            |                          |
|------------|--------------------------|------------|--------------------------|
| n gerade   | <input type="checkbox"/> | m gerade   | <input type="checkbox"/> |
| n ungerade | <input type="checkbox"/> | m ungerade | <input type="checkbox"/> |
| $n < m$    | <input type="checkbox"/> | $n > m$    | <input type="checkbox"/> |

**Beispiel 15 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten**

a) Skizzieren Sie – mit Vorsicht (!) und mit unterschiedlicher Farbe – die Potenzfunktionen

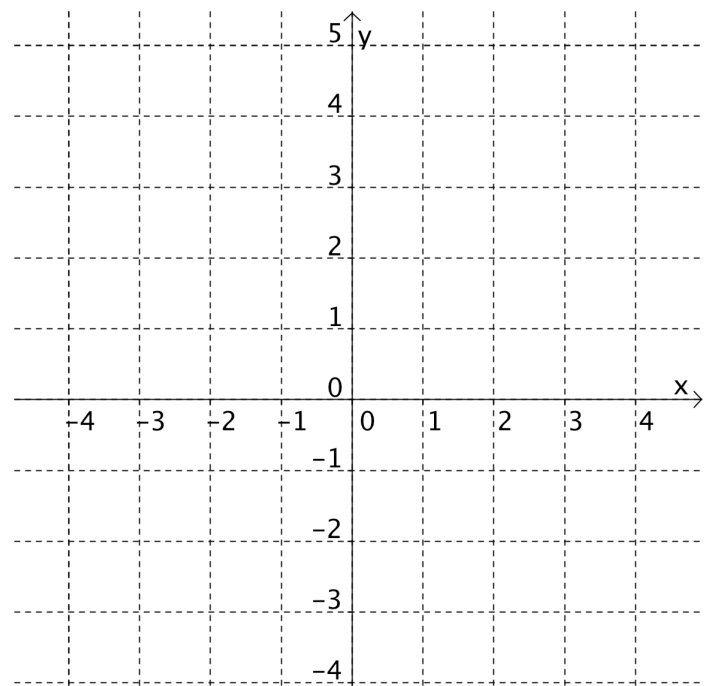
- $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$
- $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

b) Es dürfte Ihnen nun nicht mehr schwerfallen, sich vorzustellen, wie die Kurven

- $y = x^{-3}$
- $y = x^{-4}$
- $y = \dots$

wohl aussehen...

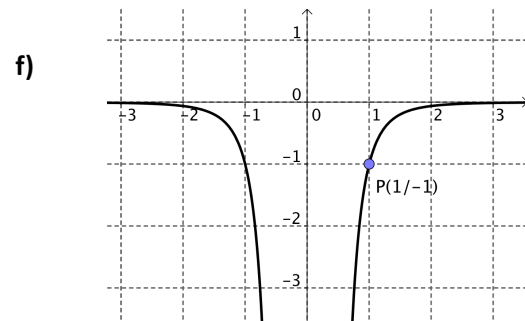
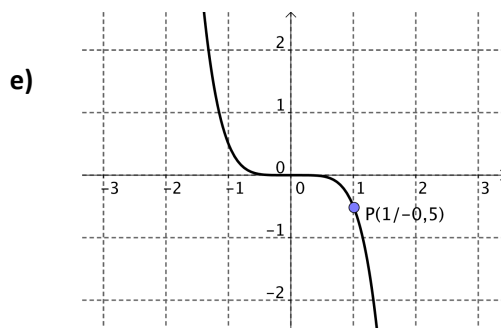
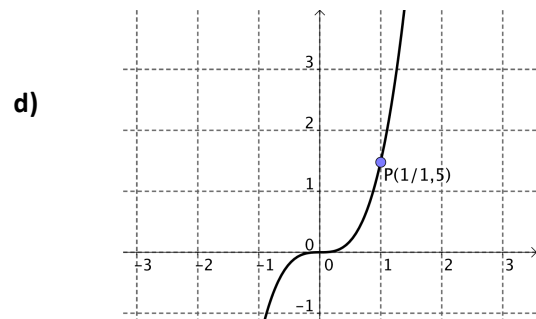
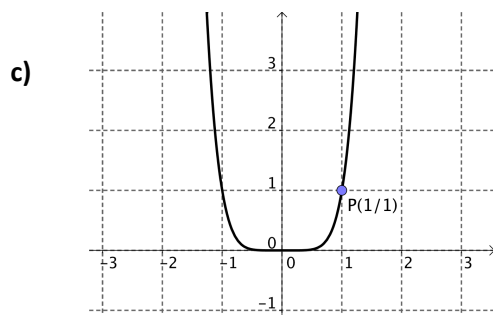
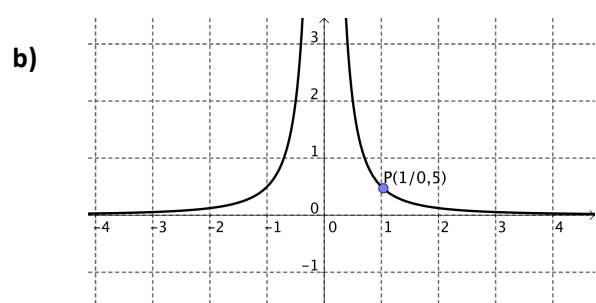
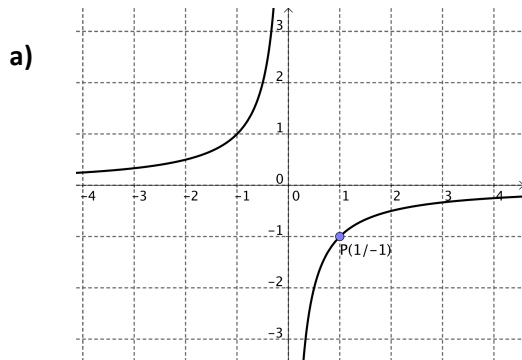
Auch bei Potenzfunktionen mit negativen Exponenten gibt es einen „klaren“ Zusammenhang zwischen Graph und Exponent (*gerade* bzw. *ungerade*).



**Beispiel 16 „Graphenquiz“**

Abgebildet sind sechs Graphen der Form  $y = ax^n$ . Welche Gleichung gehört zu welchem Graphen? Begründen Sie Ihre Entscheidung! Vorsicht, nicht jede Gleichung hat einen Graphen!

$y_1 = -0.5x^5$ ;  $y_2 = 0.5x^{-2}$ ;  $y_3 = -0.5x^{-3}$ ;  $y_4 = 1.5x^3$ ;  $y_5 = -\frac{1}{x^4}$ ;  $y_6 = -x^{-1}$ ;  $y_7 = x^2$ ;  $y_8 = 1.5x^6$ ;  $y_9 = x^6$



**Beispiel 17 Potenzfunktionen: skizzieren, bestimmen**

a) Skizzieren Sie qualitativ („aus dem Handgelenk“) die folgenden Potenzfunktionen:

- $y = -0.1x^5$
- $y = x^4 - 4$

Wie lauten die Nullstellen?

b) Bestimmen Sie die fehlenden Koeffizienten. Die Kurve verläuft durch die angegebenen Punkte.

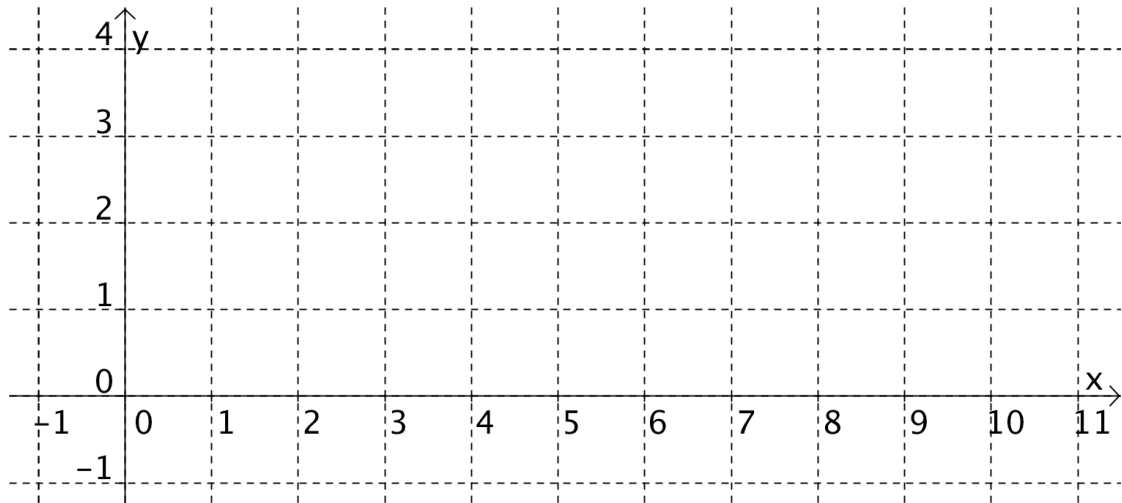
- $y = a \cdot x^6$  ;  $P(2/16)$
- $y = a \cdot x^3 + c$  ;  $P(-2/-1)$ ;  $Q(1/3.5)$

**Beispiel 18      Wurzelfunktion**

Natürlich gibt es auch Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten bzw. Wurzelfunktionen.

a) Diejenige, die immer wieder einmal auftritt, ist Die Wurzelfunktion...

Skizzieren Sie  $y = \sqrt{x}$       bzw.  $y = x^{1/2}$ .



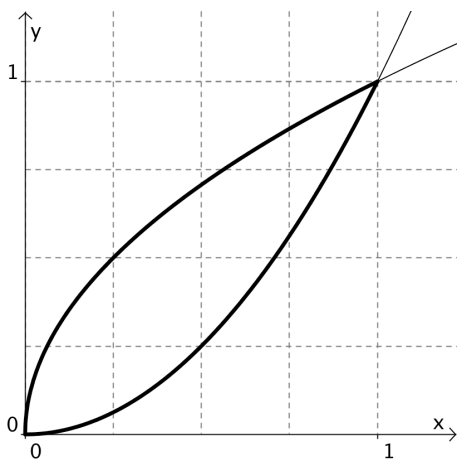
b) Skizzieren Sie – mit unterschiedlicher Farbe – ins obige Koordinatensystem  $y = \sqrt[3]{x}$  bzw.  $y = x^{1/3}$ .

Können Sie deren Verlauf bereits „erraten“?

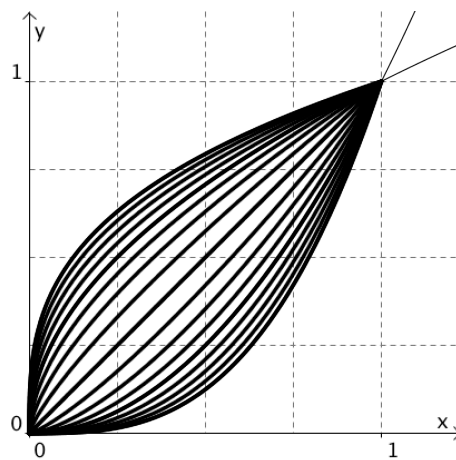


*Muster sehen!*

c) mathematische Zwiebel



Welche Funktionen sind in der obigen Darstellung abgebildet?



Mit welchen zusätzlichen Funktionen bekommt die „Zwiebel“ wohl ihr Aussehen?

### 3 Zusammenfassung



#### Zusammenfassung

Alles, was man wissen muss:

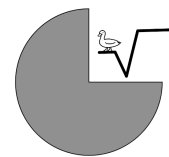


Der Exponent sagt einem, **wie oft** die Zahl multipliziert wird.

Ein **negativer** Exponent heisst **dividieren**, weil: die Umkehrung des Multiplizierens ist das Dividieren.



Ein **rationaler** Exponent wie  $1/n$  heisst die **n-te Wurzel** ziehen:  $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ .



Damit können wir **alles** verstehen ☺ !

Etwa:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Wenn wir  $x^n \cdot x^m$  rechnen... wie oft tun wir dies? Antwort: zuerst „n“-mal und dann noch „m“-mal, also insgesamt „n + m“-mal.

**Beispiel**

$$x^3 \cdot x^4 = xxx \cdot xxxx = x^7$$

Oder:

$$x^n : x^m = x^{n-m}$$

Wie oben: wie oft multiplizieren wir am Schluss mit x? Antwort: „n“-mal, vermindert um „m“-mal (weil wir dividieren), also insgesamt um „n – m“-mal.

**Beispiel**

$$x^5 : x^2 = xxxxx : xx = x^3$$

Dieses Gesetz sagt uns auch, warum die Festlegung

$$x^0 = 1$$

sinnvoll ist.

**Beispiel**

$$x^2 : x^2 = x^{2-2} = x^0 = 1$$

Ein bisschen schwieriger:

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^m}$$

Aber das Wichtige ist:  $x^{1/n}$  = n-te Wurzel aus x.

Dann sagt ein rationaler Exponent wie  $4^{3/2}$  einfach:

„mache hoch 3 und zieh' die Wurzel – in einer *beliebigen Reihenfolge*“.

Warum spielt die *Reihenfolge* keine Rolle? Weil gilt:  $m/n = m \cdot 1/n$  oder eben auch:  $m/n = 1/n \cdot m$ .

# 3

Nennen Sie aus Ihrer Sicht **3 Grundaufgaben** im Zusammenhang mit **Potenzen**.

- Erklären Sie, wie Sie diese lösen.
- Diese Aufgaben sollten sie beherrschen, also in vernünftiger Zeit lösen können.



## Grundaufgabe 1 Rechnen mit natürlichen Exponenten

a) Vereinfachen Sie.

- $(3xy)^2 \cdot x^4 z$
- $0.25x^3(16x^5 - 2x)$
- $\frac{5x^{n+1}}{x^3}$

b) Stellen Sie in der Zehnerpotenzschreibweise dar. *Beispiel: 2'400 = 2.4 · 10<sup>3</sup>.*

- 38'000
- 123'000
- 1 Million und 1 Milliarde



## Grundaufgabe 2 Rechnen mit nicht-natürlichen Exponenten

a) Vereinfachen Sie.

- $(ab)^3 \cdot (3a^2)^{-2}$
- $5x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

b) Berechnen Sie.

- $16^{1.5}$
- Stellen Sie in Zehnerpotenzschreibweise dar: 0.004.



## Grundaufgabe 3 Potenzfunktionen

a) Skizzieren Sie qualitativ (also „aus dem Handgelenk“) die Graphen der folgenden Potenzfunktionen.

- $y = x^3 - 2$
- $y = -0.1x^6 + 1$

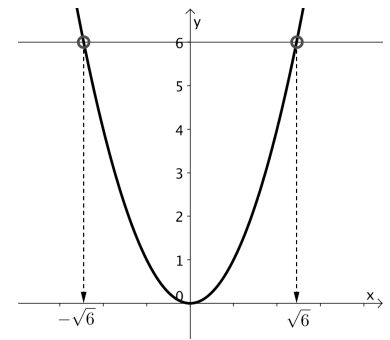
*Wie lauten die Nullstellen?*

b) Die Kurve  $y = ax^5 + c$  verläuft durch die Punkte P(2/5) und Q(-1/-3.25)  
Berechnen Sie die Koeffizienten a und c. Bestimmen Sie anschliessend die Nullstelle.

## Anhang 1 Weitere Aufgaben

### Aufgabe 1 Potenzgleichung

a) Die Gleichung  $x^2 = 6$  besitzt die zwei Lösungen  $x_1 = \sqrt{6}$  und  $x_2 = -\sqrt{6}$ . Dies lässt sich „graphisch“ sehr gut sehen (vgl. Abbildung).



Die allgemeine Potenzgleichung lautet:

$$x^n = a \quad (n > 0)$$

Wie lautet die allgemeine Lösung? Unterscheiden Sie dabei die folgenden 4 Fälle:

n gerade,  $a > 0$

n gerade,  $a < 0$

n ungerade,  $a > 0$

n ungerade,  $a < 0$

b) Lösen Sie folgenden **Potenzgleichungen**:

**b<sub>1</sub>)**  $x^4 = 81$

**b<sub>2</sub>)**  $x^3 + 12 = 37$

**b<sub>3</sub>)**  $2x^3 = -16$

**b<sub>4</sub>)**  $10 \sqrt[3]{x-1} = 20$

### Aufgabe 2 Knobeln ?!

- Ist  $2^{100}$  eine Quadratzahl?

Ist  $a^{12}$  eine Kubikzahl?

- Welche Zahl ist grösser?  
 $2^{500}$  oder  $8^{167}$ ?

$200^{-95}$  oder  $20^{-92} \cdot 8^{-31} \cdot 5^{-93}$ ?

- Was ist hier falsch?

$$1 = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{(-1)^2} = (-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

### Aufgabe 3 Textaufgaben

a) Eine Schrift wird mit einem Fotokopiergerät mehrmals vergrössert. Bei der dritten Vergrösserung sind die Buchstaben, die im Original nur 4 mm hoch waren, 13.5 mm hoch. Wie (um wie viele %) vergrössert das Kopiergerät?



b) Eine Tierart stirbt langsam aus. Jedes Jahr leben nur noch 80% der Tiere des vorherigen Jahres.

Zu Beginn waren es 10'000 Tiere. Wie viele Tiere hat es noch nach 4 Jahren? Wie viele nach n Jahren?

### Aufgabe 4 Bergmann'sche Regel

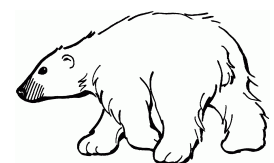
*Warum gibt es in der Arktis keine kleinen Säugetiere?*

Der Wärmeverlust eines Säugetiers ist etwa proportional zur Körperoberfläche, seine Wärmeproduktion ist etwa proportional zum Körpervolumen.

Welches Tiere verliert weniger Wärme, das kleine oder das grosse?

Begründen Sie dies mit dem Verhältnis der Oberfläche zum Volumen.

**Hinweis** Wir können uns das Tier „würfelförmig“ vorstellen.



Wie gross ist eigentlich Ihre Körperoberfläche? In einem Biologiebuch steht dazu folgende Formel:

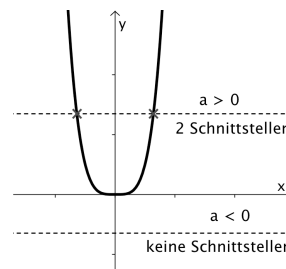
$$O = 0.007184 \cdot m^{0.425} \cdot h^{0.725}, \text{ wobei } m = \text{Gewicht in kg, } h = \text{Grösse in cm.}$$

## Lösungen

### Aufgabe 1

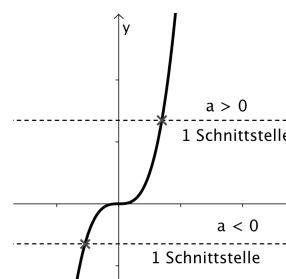
a) siehe auch nebenstehende Abbildungen

- n gerade,  $a > 0$ : zwei Lösungen  $x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{a}$
- n gerade,  $a < 0$ : keine Lösung
- n ungerade,  $a > 0$ : eine Lösung  $x_1 = \sqrt[n]{a}$
- n ungerade,  $a < 0$ : eine Lösung  $x_1 = -\sqrt[n]{-a}$



b) Potenzgleichungen

**b<sub>1</sub>)**  $x = \pm 3$                       **b<sub>2</sub>)**  $x = \sqrt[3]{25}$   
**b<sub>3</sub>)**  $x = -2$                         **b<sub>4</sub>)**  $x = 9$



### Aufgabe 2

a)

- $3^{100} = (3^{50})^2$  ja!                                       $a^{12} = (a^4)^3$  ja!
- $8^{167} = (2^3)^{167} = 2^{501}$  ist grösser                       $20^{-92} \cdot 8^{-31} \cdot 5^{-93}$
- Das ist eine gute Frage. Bucher würde sagen: bei  $\dots = (-1)^{2/6}$ , weil: man darf bei rationalen Exponenten nur positive Basen verwenden. Warum? Damit genau *dieses* Problem *nicht* auftritt.

### Aufgabe 3

a)  $4x^3 = 13.5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3.375} = 1.5$  ; Vergrößerung um 50%

b) nach 4 Jahren:  $10'000 \cdot 0.8^4 \approx 5000$  Tiere ; nach n Jahren:  $10'000 \cdot 0.8^n$  Tiere

### Aufgabe 4

Würfeloberfläche =  $6x^2$ ; Würfelvolumen  $V = x^3 \Rightarrow \text{Verhältnis} = \frac{\text{Oberfläche}}{\text{Volumen}} = \frac{6x^2}{x^3} = \frac{6}{x}$ .

Das heisst: je grösser x umso kleiner das Verhältnis, also umso kleiner der *relative* Wärmeverlust.



Sie kennen die vier Grundoperationen: Addition (+), Subtraktion (-), Multiplikation ( $\cdot$ ), Division (:). **MathematikerInnen** sagen oft (ein bisschen angeberisch), es gäbe nur zwei Operationen, nämlich die Addition und die Multiplikation. Wie ist das zu verstehen?  
**Hinweis** Die Subtraktion ist nicht anderes als die Addition negativer Zahlen. Und die Division?

## Anhang 2 Normdarstellung (wissenschaftliche Schreibweise)

Jede Zahl lässt sich in der Form

$$a \cdot 10^z$$

schreiben, mit  $1 \leq a < 10$  und  $z \in \mathbb{Z}$

Diese Darstellung einer Zahl heisst **Normdarstellung**.

### Warum macht man das?

Die Normdarstellung ist eine Möglichkeit, grosse oder kleine Zahlen mit Hilfe von Zehnerpotenzen

- **kürzer** und
- **einheitlich** zu schreiben, damit sie leichter *vergleichbar* sind.

### Aufgabe 1

a) Schreiben sie kürzer kompakter (Normdarstellung!).

a<sub>1</sub>) 30'000'000

a<sub>2</sub>) 0.0010

a<sub>3</sub>) 0.00000000034

a<sub>4</sub>) 70'100·10<sup>34</sup>

b) Welche Zahl ist grösser? Vergleichen Sie... mit Hilfe der wissenschaftlichen Schreibweise.

b<sub>1</sub>) 400'003'488'123 oder 2.3 Billionen ?

b) 2'001'000'000 oder 2 Giga ?

c) Schreiben Sie dezimal bzw. in Normdarstellung.

c<sub>1</sub>) Weltbevölkerung:  $6.8 \cdot 10^9$

c<sub>2</sub>) Dicke eines menschlichen Haares: 0.000006 m

c<sub>3</sub>) Lichtgeschwindigkeit:  $300'000'000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c<sub>4</sub>) Durchmesser eines roten Blutkörperchens:  $7 \cdot 10^{-6}$  m

### Aufgabe 2

a) Ihre Mutter findet DJ Bobo „mega“, Ihre Grossmutter findet ihn „giga“ und Sie finden, dass er paar Kilo zuviel hat. Wer mag ihn am liebsten?

b) Wie heissen die entsprechenden, „kleinen“ Begriffe zu „kilo“ „mega“ und „giga“?

### Aufgabe 3

Schreiben Sie in Normdarstellung in der angegebenen Einheit.

**Beispiel**  $1 \text{ m} = 10^3 \text{ mm}$   $1 \text{ m}^2 = (10^3 \text{ mm})^2 = 10^6 \text{ mm}^2$

$$6.75 \text{ m}^3 = 6.75 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

a) 1 cm (in m)

b) 1 cm<sup>2</sup> (in m<sup>2</sup>)

c) 1 cm<sup>3</sup> (in m<sup>3</sup>)

d) 40 cm<sup>2</sup> (in m<sup>2</sup>)

e) 1 g (in kg)

f) 0.5 g (in t)

g) 1 m (in km)

h) 27 mm<sup>2</sup> (in km<sup>2</sup>)

i) 1 Liter (in m<sup>3</sup>)

j) 0.5 Liter (in cm<sup>3</sup>)

k) 1 Jahr (in sec), *ungefährer Wert!*

#### Aufgabe 4 Fermi-Aufgaben

##### Denken und rechnen Sie mit Hilfe von Normdarstellungen bzw. Zehnerpotenzen.

Schreiben Sie die von Ihnen getroffenen Annahmen auf! Berechnen Sie dann à la Fermi (vgl. unten):

- a) Wie viele Liter hat es im Zürisee?
- b) Wie schwer sind alle Menschen auf der Welt zusammen? (Angabe in t)
- c) Wie oft haben Sie im Leben schon geblinzelt?
- d) Stau am Gotthard. Wie viele Menschen stehen im Stau?

Für die folgenden Aufgaben, muss man wissen:

- Erdradius  $\approx 6'370$  km
- Distanz Sonne-Erde  $\approx 150'000'000$  km
- Formel für die Kugeloberfläche:  $O = 4\pi r^2$
- Formel für das Kugelvolumen:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

e) Wie lang hat das Licht von der Sonne zu uns?

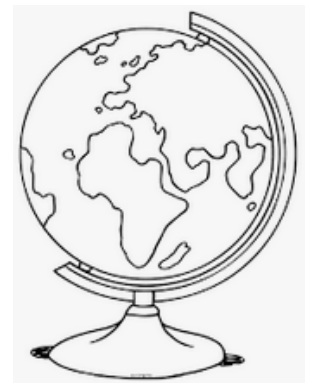
f) Geben Sie das das Volumen der Erde an in  $m^3$ !

g) Wie viele Liter gibt es in den Weltmeeren?

h) Der wievielte Teil der Sonnenstrahlung fällt auf die Erde?

**Hinweis** Zur Berechnung kann man den Querschnitt der Erde, also einen Kreis, vergleichen mit der Oberfläche

der Kugel, deren Radius gleich der Sonnenentfernung ist:  $\frac{\text{QUERSCHNITT ERDE}}{\text{OBERFLÄCHE KUGEL}} = \dots$



---

Vor 50 Jahren fragte der Physiker **Enrico Fermi\*** seine Studenten an der Universität von Chicago:

“Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?”

Fermi wusste natürlich, dass keiner seiner StudentInnen die Antwort auf die Frage kannte. Indem er ihnen aber solche Fragen stellte, wollte er sie dazu anregen, auf einem schnellen Weg eine Lösung durch begründete Schätzungen zu finden. Die Schätzungen sollten sich nur auf Alltagserfahrung und leichte mathematische Kenntnisse stützen und so einfach sein, dass sie auf einem benutzten Briefumschlag gerechnet werden kann.

Die Lösung einer Fermi Aufgabe besteht nicht in einer zu 100% präzisen Antwort, sondern darin, die richtige **Größenordnung\*** zu bestimmen.

##### \* Größenordnung

Naturwissenschaftler und Mathematiker verwenden die Idee der *Größenordnung*, um einen schnellen Eindruck von einer Größe (Distanz, Geldbeträge u.ä.) zu geben. Üblicherweise werden hierfür Zehnerpotenzen benutzt. Ein Fermi-Aufgabe ist demnach “richtig” gelöst, wenn der Exponent der Zehnerpotenz korrekt ist.

