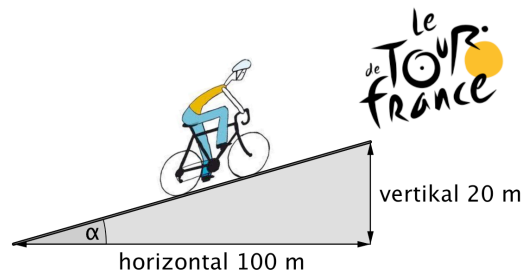


Trigonometrie



Sinus, Kosinus, Tangens
Einheitskreis, Bogenmass
Sinuskurve
Kosinussatz



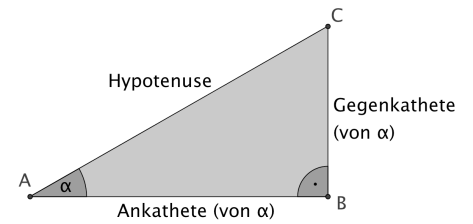
Periodische Vorgänge lassen sich mit Hilfe von „Sinuskurven“ beschreiben.

Inhalt

1	Einstieg	3
2	Trigonometrie	4
	<ul style="list-style-type: none">• Sinus, Kosinus, Tangens• Trigonometrie am nicht-rechtwinkligen Dreieck• Verallgemeinerung von sin und cos am Einheitskreis• Bogenmass eines Winkels (Radian)• Sinusfunktion $y = \sin x$• Kosinussatz	
3	Zusammenfassung	16
4	Weitere Aufgaben – Lösungen	17
5	Anhang	19
	<ul style="list-style-type: none">• Anhang 1 Tangens, spezielle Werte, Polarkoordinaten• Anhang 2: Horizonterweiterung (der kroatische Kapitän)• Anhang 3: person in front of a mirror• Anhang 4: Leichtathletik und Musik	

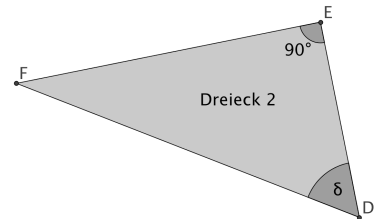
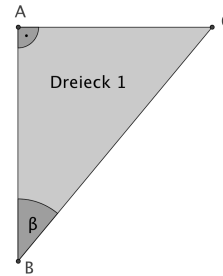
1 Einstieg

Im *rechtwinkligen* Dreieck gelten die nebenstehenden Bezeichnungen:



Beispiel 1 Bezeichnungen

- a) Im Dreieck 1 ist BC die Hypotenuse.
Welches ist die Ankathete und die Gegenkathete von β ?
- b) Wie a) im Dreieck 2.



Beispiel 2 Grütschalp zu Fuss

Im Berner Oberland fährt eine Standseilbahn von der Talstation Lauterbrunnen (796 m ü. M.) auf einer 1421 m langen Strecke hinauf zur Grütschalp (1481 m ü. M.).

- a) Bei einer Bergfahrt am 9. Juli 2011 blieb der Wagen wegen eines technischen Defekts nach einer Fahrtstrecke von 1200 m stehen.
Wie viele Höhenmeter mussten die Insassen noch zu Fuss überwinden?

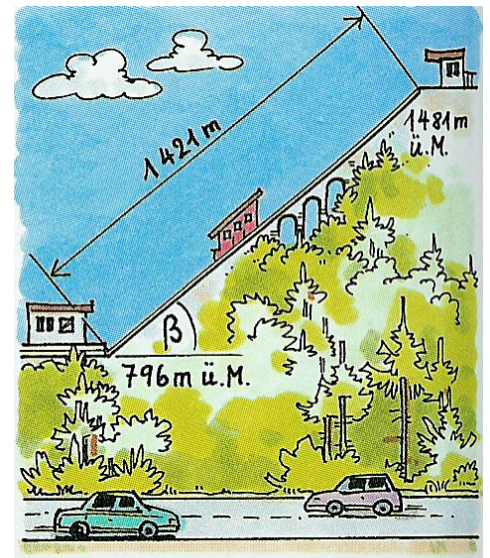
Hinweis Strahlensatz

- b) Welche Steigung (in Prozent) hat die Bahn?

Hinweis Pythagoras

- c) Eine Vorstellung der Steigung liefert auch die Grösse des Winkels β .
Er heisst auch *Steigungswinkel*. Wie gross ist er?

Hinweis Zeichnung



In rechtwinkligen Dreiecken können wir mit dem Satz des Pythagoras Seitenlängen berechnen. Jedoch können wir in solchen Dreiecken die Grösse von Winkeln nur *zeichnerisch* bestimmen. Unser **Ziel** ist es, Verfahren kennen zu lernen, um auch die Winkel zu *berechnen*.

Beispiel 3 Verhältnis

- a) Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 30^\circ$. Messen Sie (mit Lineal) die Länge der Gegenkathete und der Hypotenuse. Bilden Sie dann das Verhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$. Wie gross ist es?

- b) Zeichnen Sie ein anderes (grösseres oder kleineres) rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 30^\circ$.

Bestimmen Sie wiederum das Verhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$. Was fällt auf? Warum ist das so?

- c) Von was hängt die Grösse dieses Verhältnisses ab? Wie steht es mit anderen Verhältnissen?



2 Trigonometrie



Sinus, Kosinus, Tangens

Beispiel 4 früher & Trick

Im 16. Jahrhundert wurden die ersten Tabellen für Sinus, Kosinus und Tangens erstellt. Rechts ist eine solche Tabelle auszugsweise für verschiedene Winkel abgebildet.

α°	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0	0,0000	1,0000	0,0000
5	0,0872	0,9962	0,0875
10	0,1736	0,9848	0,1763
15	0,2588	0,9659	0,2679
20	<input type="text"/>	0,9397	0,3640
25	0,4226	<input type="text"/>	0,4663
30	0,5000	0,8660	0,5774
35	<input type="text"/>	0,8192	<input type="text"/>
40	0,6428	<input type="text"/>	0,8391
45	0,7071	0,7071	1,0000

a) Einige Eintragungen fehlen in der Tabelle.

Ergänzen Sie mindestens *eine* davon.

Zeichnen Sie zu diesem Zweck ein zum gegebenen Winkel passendes – nicht zu kleines – rechtwinkliges Dreieck und bestimmen Sie das fehlende Seitenverhältnis durch Ausmessen.

b) Im Laufe der Zeit wurden die trigonometrischen Verhältnisse mit höherer Genauigkeit bestimmt.

Selbst die exakte Berechnung manchmal möglich:

Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1.

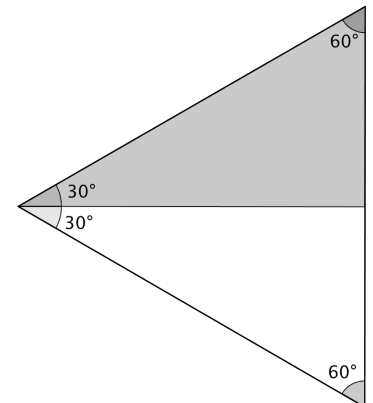
Halbieren Sie es durch die Höhe auf eine Seite.

Bestimmen Sie nun aus der entstandenen Figur $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ und $\tan 30^\circ$

exakt. Vergleichen Sie mit der Tabelle oben.

Diesen Trick müssen Sie kennen. Sie müssen also in der Lage sein, jederzeit $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ und $\tan 30^\circ$ exakt (ohne TR!) zu berechnen.

Wie lässt sich damit auch $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ und $\tan 60^\circ$ – ohne weitere Rechnung – bestimmen?

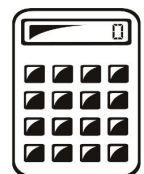


sin, cos, tan auf dem TR

In früheren Zeiten wurden für Berechnungen die Sinus, Kosinus- und Tangenswerte gedruckten Tabellen entnommen. Heute verwenden wir dazu den TR.

Zu gegeben Winkelgrößen lassen sich die zugehörigen Seitenverhältnisse auf dem TR berechnen: $\sin(\dots)$, $\cos(\dots)$, $\tan(\dots)$.

Beispiel $\sin(40) = 0.64\dots$



VORSICHT MIT DEM TR:

Haben Sie $\sin(40) = 0.74\dots$

erhalten?

Dann fragen Sie!



Umgekehrt kann zu einem Seitenverhältnis auch der zugehörige Winkel berechnet werden:

$\sin^{-1}(\dots)$, $\cos^{-1}(\dots)$, $\tan^{-1}(\dots)$.

Beispiel $\sin^{-1}(0.5) = 30^\circ$

Bemerkung

für \sin^{-1} sagen wir auch „Arcussinus“.

Beispiel 5 Schätzen

a) Geben Sie jeweils einen Schätzwert für \sin , \cos , \tan an zu den folgenden Winkelgrößen:
 $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 32^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\delta = 85^\circ$. Berechnen Sie *anschliessend* mit dem TR.

b) Schätzen Sie zuerst die zugehörigen Winkelgrößen. Berechnen Sie *anschliessend* mit dem TR:
 $\tan\alpha = 0.75$; $\sin\beta = 0.5$; $\cos\gamma = 0.5$; $\tan\alpha = 3$; $\sin\epsilon = 0.1$; $\cos\phi = 0.9$

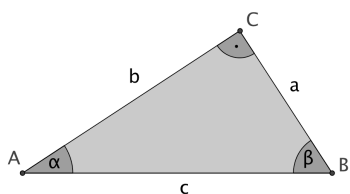


Beispiel 6 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

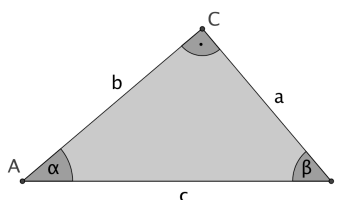
Winkelsumme, Pythagoras, Trigonometrie!

a) **Skizze gegeben.** Berechnen Sie alle restlichen Größen.

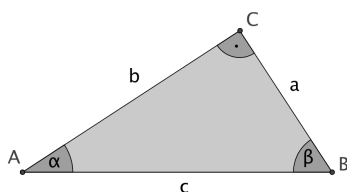
a₁) Gegeben $a = 4$ cm, $\alpha = 35^\circ$



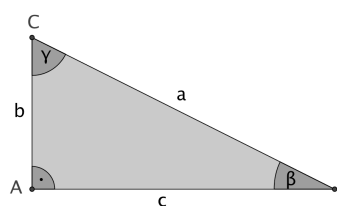
a₂) Gegeben $\alpha = 44^\circ$, $b = 4.5$ cm



a₃) Gegeben $\beta = 60^\circ$, $c = 10$



a₄) Gegeben $b = 7$, $a = 18$



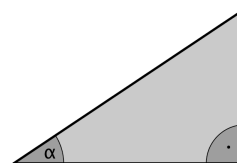
b) **Qualitative Skizze machen.** Berechnen Sie alle restlichen Größen.

b₁) In einem Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ sind die Katheten gegeben: $a = 5.2$ und $b = 6.4$.

b₂) In einem Dreieck ist $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 25^\circ$ und $b = 7$ cm.

Beispiel 7* überlegen...

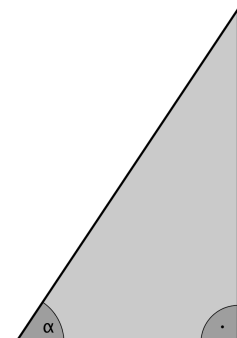
Der Winkel α kann gross oder klein sein; dabei verändern sich natürlich auch die Seitenlängen... (vgl. Abbildung rechts, α wird grösser, α wird kleiner).



a) Wenn α grösser wird, wird dann $\sin\alpha$ auch grösser?
 Und wie ist es mit $\cos\alpha$, und wie mit $\tan\alpha$?

Legen Sie eine Tabelle an!

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
α grösser			
α kleiner			



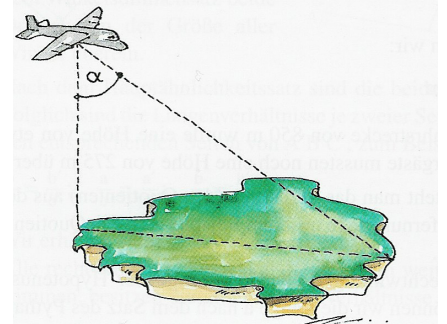
b) Wie gross ist $\sin 0^\circ$ ($\cos 0^\circ$, $\tan 0^\circ$)? Wie gross ist $\sin 90^\circ$ ($\cos 90^\circ$, $\tan 90^\circ$)?

Beispiel 8 Trigonometrie in Anwendungen

a) Eisberg

Immer wieder brechen Eisberge ab. Sie werden mit Hilfe von Satelliten oder Flugzeugen vermessen.

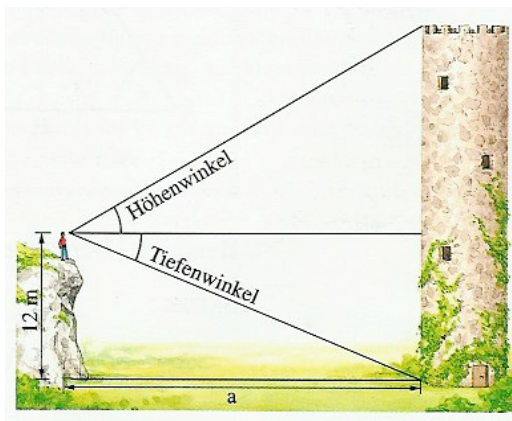
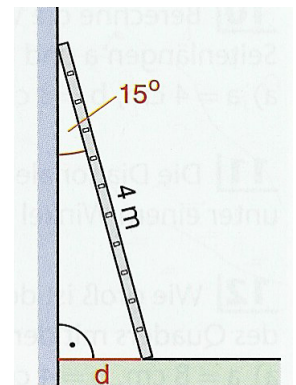
Wie lang ist der Eisberg, wenn das Flugzeug in einer Höhe von 1500 m den Winkel $\alpha = 30^\circ$ bestimmen kann?



b) Sicherheitsvorschrift

Gemäss Sicherheitsvorschrift darf eine Leiter – an eine Wand gestellt – einen Neigungswinkel von 15° nicht unterschreiten.

Welchen Abstand zur Wand muss sie mindestens haben? Die Leiter ist 4 m lang.



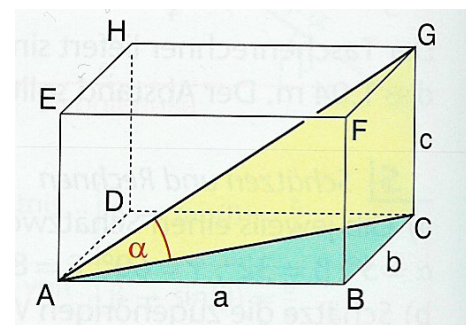
c) Turm

Aus 12 m Höhe sieht man den Fuss eines Turmes unter einem Tiefenwinkel von 14° und einem Höhenwinkel von 24° .

- Wie gross ist der Abstand a vom Turm?
- Bestimmen Sie die Höhe des Turmes.

d) Quader & Würfel

- Wie gross ist der Winkel α , den die Raumdiagonale des Quaders mit der Flächendiagonale einschliesst?
Die Längen der Seitenkanten sind $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm.
- Die gleiche Aufgabe für einen Würfel!
Spielt die *Länge* der Kante dabei eine Rolle?



e) Tour de France

An der Tour de France überwinden die Fahrer Pässe mit bis zu 20% Steigung.

- Was bedeutet 20% Steigung? Zeichnen Sie eine solche Strasse!
- Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Strasse.



Trigonometrie am nicht-rechtwinkligen Dreieck



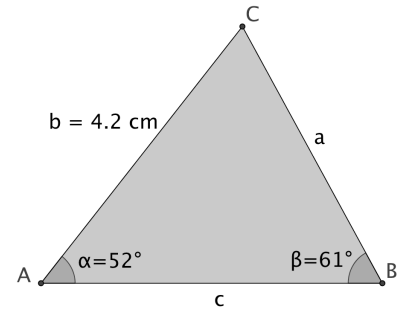
Strategie zur Berechnung von nicht-rechtwinkligen Dreiecke:

Durch Einzeichnen einer geeigneten Höhe zerlegt man das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.

Die Höhe wird so gewählt, dass in einem der beiden entstehenden Teildreiecke zwei Stücke gegeben sind.

Beispiel 9

a) Berechnen Sie die Seiten a und c im nebenstehenden Dreieck.



b) Im Dreieck ABC sind gegeben: $a = 5.8 \text{ cm}$, $b = 5.4 \text{ cm}$, $\gamma = 48^\circ$. Berechnen Sie die restlichen Grössen und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Tipp zuerst qualitative Skizze des Dreiecks machen.

c) Im Dreieck ABC sind gegeben: $a = 9.2 \text{ cm}$, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 22^\circ$. Berechnen Sie die restlichen Grössen.

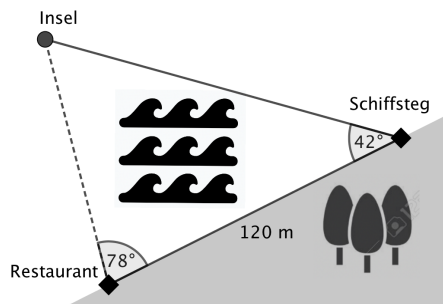
Tipp zuerst qualitative Skizze des Dreiecks machen.

d) Gegeben: Trapez mit $a = 12.0 \text{ cm}$; $b = 7.8 \text{ cm}$; $\alpha = 70.2^\circ$; $\beta = 42.4^\circ$.

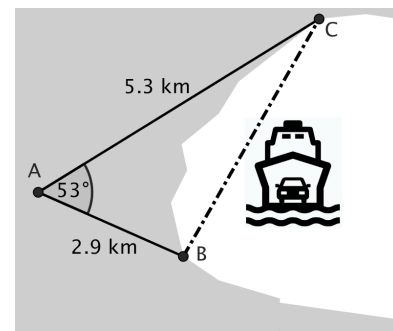
Berechnen Sie den Umfang U und den Flächeninhalt A des Trapezes.

Beispiel 10

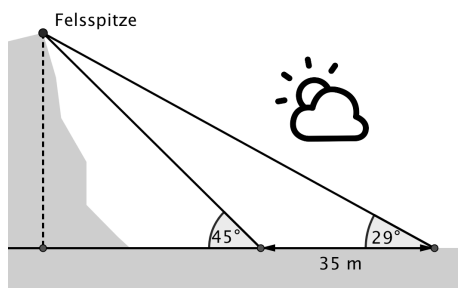
a) Wie weit ist die Insel von der Gaststätte entfernt?



b) Welche Strecke legt die Fähre zurück?



c) Wie hoch ist die Felswand?



Für c) gibt es zwei Lösungswege:

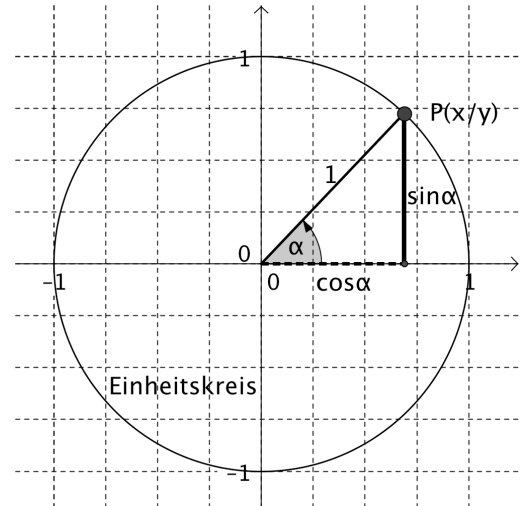


- „nicht-rechtwinkliges Dreieck“
- rechtwinklige Dreiecke durch Einführen einer zusätzlichen Variablen...



Verallgemeinerung von sin und cos am Einheitskreis

Sei $P(x/y)$ ein beliebiger Punkt auf dem Einheitskreis und α der Winkel zwischen x-Achse und dem vom Ursprung O durch den Punkt P gehenden Strahl. Dann legt man fest:
 $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$

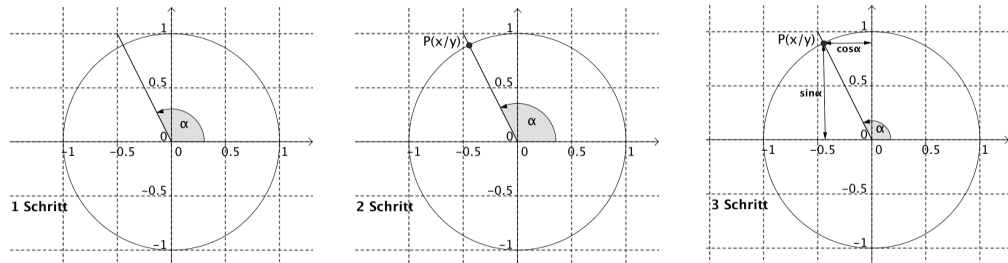


Beachte

Dies ist eine *Verallgemeinerung* der bisherigen Definition.
 Für $\alpha < 90^\circ$ bleibt alles beim Alten, aber wir können jetzt neu sin und cos auch für Winkel $\alpha \geq 90^\circ$ berechnen!

Beispiel 11 $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bestimmen mit Zeichnen (ohne TR!)

step by step



Beispiel

für $\alpha = 117^\circ$ ergibt sich $\sin 117^\circ \approx 0.9$ und $\cos 117^\circ \approx -0.4$

Bestimmen Sie *zeichnerisch* mit Hilfe des Einheitskreises folgende Werte

a) $\sin 50^\circ$

b) $\cos 170^\circ$

c) $\sin 200^\circ$

d) $\cos 200^\circ$

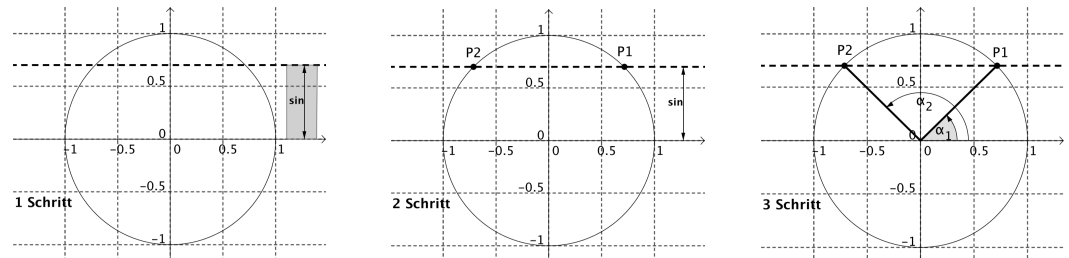
e) $\sin 410^\circ$

f) $\cos(-50^\circ)$

(Hinweis: „- Winkel“ im Uhrzeigersinn)

Beispiel 12 α bestimmen mit Zeichnen

step by step



Beispiel

für $\sin\alpha = 0.7$ ergibt sich $\alpha_1 \approx 44^\circ$ und damit $\alpha_2 \approx 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$

Bestimmen Sie *zeichnerisch* mit Hilfe des Einheitskreises folgende Winkel

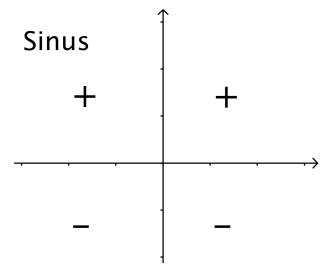
a) $\sin\alpha = -0.3$

b) $\cos\alpha = 0.5$

Im Folgenden können Sie qualitativ vorgehen, es muss nicht mehr „genau“ sein!

Beispiel 13 Vorzeichen des Sinus

a) In welchen Quadranten sind die Werte von Sinus und Kosinus positiv, in welchen sind sie negativ?
Nebenan ist die „Lösung“ für den Sinus angegeben.
Fertigen Sie eine analoge Zeichnung für den Kosinus an.



b) In welchen Quadranten gilt: $\sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0$?

Beispiel 14

a) Schätzen Sie die folgenden Werte für Sinus und Kosinus im Kopf:
 $\sin 170^\circ \approx \dots$ $\cos 100^\circ \approx \dots$ $\sin 271^\circ \approx \dots$ $\cos 200^\circ \approx \dots$

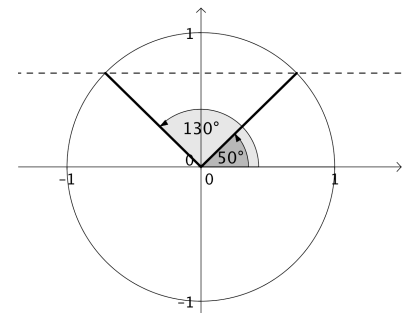
b) Für welche Winkel gilt: $\sin\alpha = 1$; $\cos\alpha = 1$; $\sin\alpha = 0$; $\cos\alpha = 0$; $\sin\alpha = -1$; $\cos\alpha = -1$?

c) Bestimmen Sie die Winkel α mit $\sin\alpha = 0.9$. (Der TR gibt nur eine Lösung an. Welche?)

d) Bestimmen Sie β so, dass $\cos\beta = -0.8$.

e) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $3\sin\alpha = -0.6$.

f) Für welche Winkel α ist $\sin\alpha = \cos\alpha$? Für welche $\sin\alpha = -\cos\alpha$?



Beispiel 15 Quadrantenrelationen

a) Es gilt zum Beispiel: $\sin(50^\circ) = \sin(130^\circ)$.
Ergänzen Sie:

- $\cos(20^\circ) = \cos(\dots)$
- $\sin(44^\circ) = \sin(\dots)$
- $\sin(800^\circ) = \sin(\dots)$

b) Begründen mit Hilfe einer Skizze. Sind die folgenden Beziehungen richtig? ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
- $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
- $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$

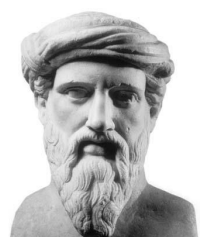
c) Vervollständigen Sie mit Hilfe des Einheitskreises die folgenden zu b) analogen Gleichungen.

- $\cos(180^\circ - \alpha) = \dots$
- $\cos(180^\circ + \alpha) = \dots$
- $\cos(360^\circ - \alpha) = \dots$

Beispiel 16 trigonometrischer Pythagoras

a) Auch in der Trigonometrie gibt es den Pythagoras! Begründen Sie die folgende Gleichung.
 $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

b) Vereinfachen Sie folgenden Term: $(\sin\alpha)^3 + (\cos\alpha)^2 \cdot \sin\alpha$

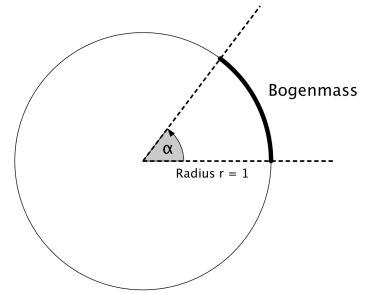




Bogenmass eines Winkels (Radian)

Wie misst man einen Winkel? Klar! Mit dem Geodreieck und dann messen... Neben dieser bekannten Art, dem *Winkelmass*, gibt es auch noch eine weitere Möglichkeit.

Sie heisst das **Bogenmass** (oder: der **Radian**) eines Winkels .



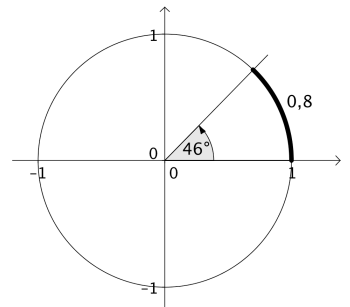
Wird ein Winkel α am Einheitskreis abgetragen, so kann die Grösse des Winkels charakterisiert werden durch die *Länge des Bogens*, der auf dem Einheitskreis herausgeschnitten wird.

Beispiel

Der Winkel $\alpha = 46^\circ$ schneidet einen Bogen von (ungefähr) der Länge 0.8 aus.

Wir sagen: α hat das Winkelmass = 46°

α hat das Bogenmass = 0.8



Beachten Sie, dass das Bogenmass eine Zahl – ohne Einheit – ist.

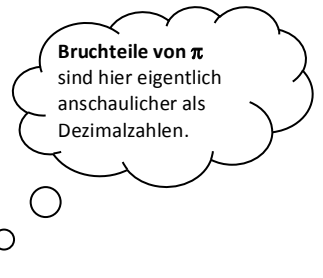
Das Bogenmass von α wird mit **arc α** bezeichnet. (lat. arcus = Bogen)

Beispiel 17 Bogenmass

In der 1. Zeile ist das Bogenmass als Bruchteil von π gesucht.

In der 2. Zeile können Sie eine dezimale Näherung angeben.

Gradmass α	0°	45°	90°	180°	270°	360°
Bogenmass arc α	0	$\frac{\pi}{4}$				
Näherung	0	0.8				



Wie kann man nun die beiden Winkelmasse ineinander umrechnen? Wir suchen die Formel!

Wir können die folgende Verhältnisgleichung angeben $\frac{\alpha}{360^\circ} =$

$\Rightarrow \alpha =$ arc $\alpha =$

Beispiel 18 Umrechnung

Rechnen Sie um.

a) $200^\circ =$

b) $1 =$



Einstellungen des TR immer beachten!

MODE: DEG = DEGREE = Winkelmass; RAD = RADIAN = Bogenmass





Sinusfunktion $y = \sin x$

Schritt 1

Vervollständigen Sie mit dem Taschenrechner die Wertetabelle bis zu 90° .

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin \alpha$										

Schritt 2

Vervollständigen Sie die Wertetabelle *ohne Taschenrechner* bis zu 190° .

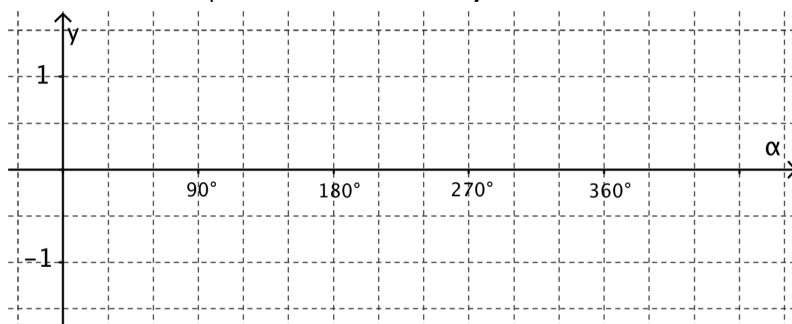
Denken Sie an die Darstellung am Einheitskreis und nützen Sie Symmetriebeziehungen aus.

α	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	190°
$\sin \alpha$										

Schritt 3

Zeichnen Sie die Punkte zwischen 0° und 190° in das Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Punkte bis 360° .

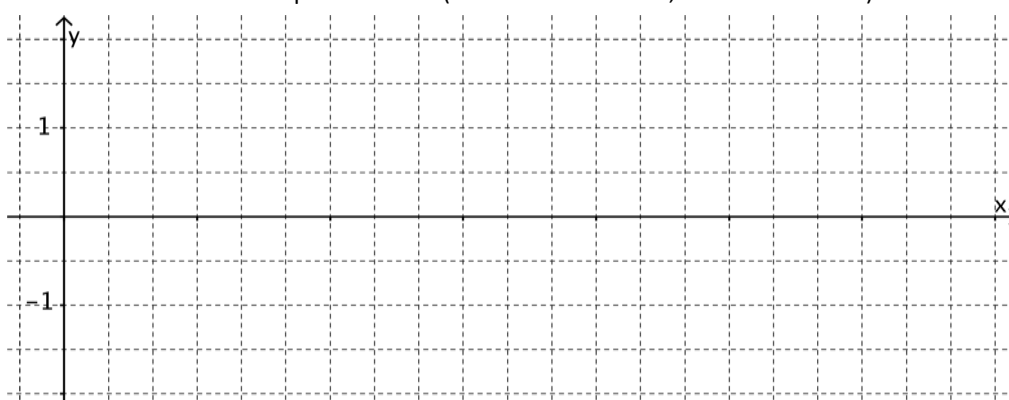
Zeichnen Sie den Graphen der **Sinusfunktion $y = \sin \alpha$** .



Schritt 4

Skizzieren Sie den Verlauf der **Sinusfunktion $y = \sin x$** (x im Bogenmass!) in einem Bereich von 0 bis 3π .

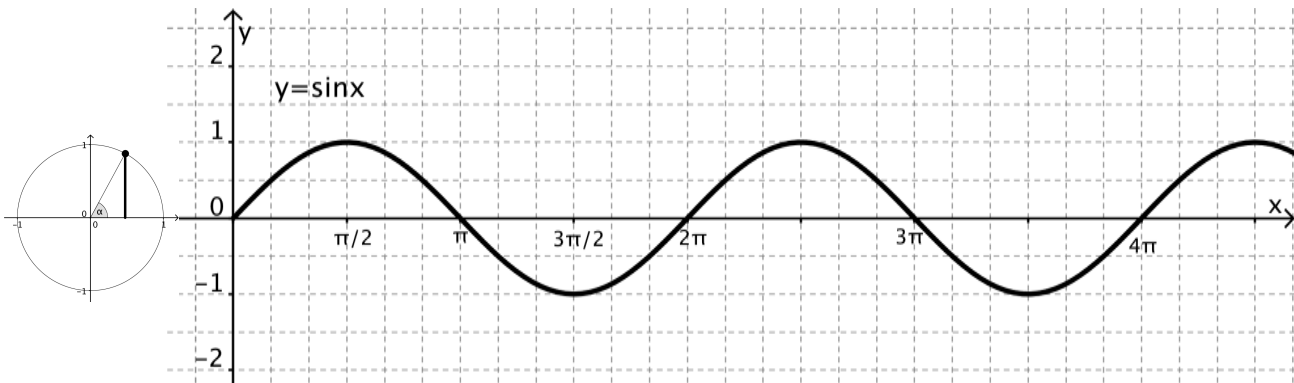
Passen Sie die Einheiten entsprechend an. (Wählen Sie für $\pi = 3,14\dots$ den Wert 3 !)



Zusatz Skizzieren Sie in das obige Koordinatensystem die Graphen der beiden Funktionen

- $y_1 = 2 \cdot \sin x$ (mit grün) und
- $y_2 = -\sin x$ (mit rot).

Eigenschaften der Sinusfunktion



Die Sinuskurve besitzt eine schlangenförmige Gestalt. Sie beginnt bei Null und steigt zuerst an. Die Sinuswerte wiederholen sich bei jeder Umdrehung periodisch.

Periode

Die Sinuskurve verläuft periodisch mit der Periode _____

Nullstellen

Die Sinuskurve schneidet die x-Achse bei $x =$ _____

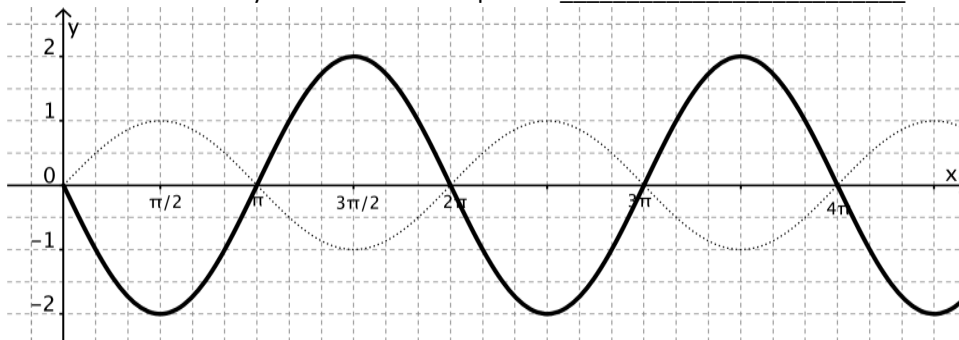
Amplitude

Die Amplitude (höchster Ausschlag nach oben bzw. unten) beträgt _____

Modifikation (der Sinuskurve)

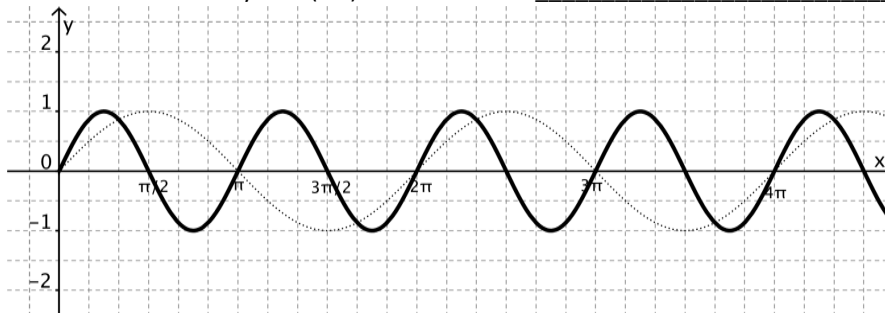
• der Amplitude

die Sinusfunktion $y = A \cdot \sin x$ hat die Amplitude _____



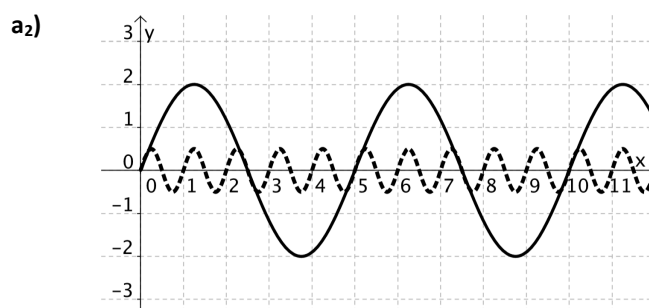
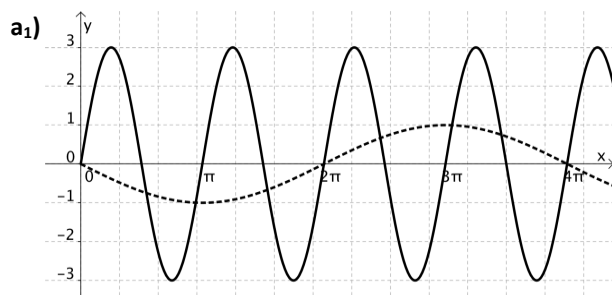
• der Periode

die Sinusfunktion $y = \sin(b \cdot x)$ hat die Periode _____



Beispiel 19 Funktionsgleichung vs Graph

a) Bestimmen Sie die Amplitude A und die Periode P.
Geben Sie dann die Funktionsgleichung der Sinuskurven $y = A \cdot \sin(b \cdot x)$ an.



b) Bestimmen Sie zuerst Periode und Amplitude. Skizzieren Sie dann die Kurve.

b₁) $y = 4 \cdot \sin(3 \cdot x)$

b₂) $y = -1.5 \cdot \sin(\pi \cdot x)$

c) Skizzieren Sie die Sinuskurve $y = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) + 2$.

Beispiel 20 Anwendungen der Sinuskurve – periodische (= immer wiederkehrende) Vorgänge

a) Die **Theorie der Biorhythmen** besagt Folgendes:

Das Leben des Menschen verläuft vom Tag seiner Geburt an in wellenförmigen Schwingungen. Dabei gelten folgende Perioden:

- *physische Aktivität: 23 Tage*
- *intellektuelle Leistungen (Verstandesleben): 33 Tage*
- *Gefühlsleben: 28 Tage*



Bei einer bestimmten Person sind am 1. März alle drei Bereiche auf Null.

a₁) Beschreiben Sie die physische Aktivität durch eine Sinuskurve
 $y = A \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $-10 \leq P \leq 10$ (t in Tagen).

Wie ist der Stand der physischen Aktivität am 25. Mai?

a₂) Beschreiben Sie die intellektuelle Leistung durch eine Funktion der Form: $L = A \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $-10 \leq L \leq 10$.
Wie ist der Stand der intellektuellen Leistung am 21. Juni?

a₃) ...

b) Eine Kugel *schwingt* auf einer vertikal aufgehängten Feder auf und ab.
Diese Schwingung lässt sich durch eine Sinuskurve

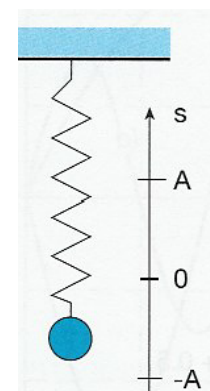
$$s = A \cdot \sin(b \cdot t) \text{ mit}$$

s = Auslenkung und t = Zeit, beschreiben.

Die maximale *Auslenkung (Amplitude)* sei A und die *Schwingungsdauer* T.
Bestimmen Sie die Sinuskurve s (s: in cm, t in Sekunden).

b₁) Kugel startet bei s = 0, bewegt sich zuerst nach oben, mit A = 3 cm, T = 2 Sekunden.

b₂) allgemein (Kugel startet bei s = 0).





Kosinussatz

Sinus, Kosinus und Tangens dürfen wir nur in rechtwinkligen Dreiecken benützen (warum?).

Bei allgemeinen (also nicht-rechtwinkligen) Dreiecken gingen wir immer nach demselben *Muster* vor

- wir erzeugen rechtwinklige Teildreiecke durch Einzeichnen einer „geeigneten“ Höhe
- wir berechnen die fehlenden Größen mit Hilfe dieser Höhe

Wir können Arbeit sparen, wenn wir die Berechnung *einmal allgemein* ☺ durchführen, damit eine *Formel* erhalten, die wir dann aber bis an unser *Lebensende* anwenden können! ☺

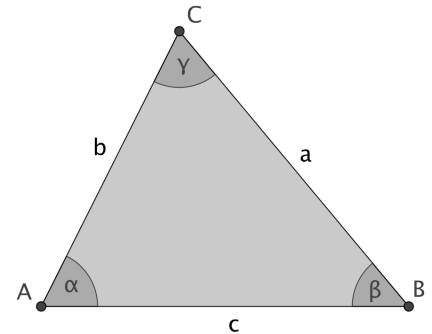
Im Zusammenhang mit allgemeinen Dreiecken gibt es einen sehr wichtigen Satz, den so genannten



Kosinussatz

In jedem Dreieck gilt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$.

Welchem Satz ähnelt dieser Satz sehr stark?



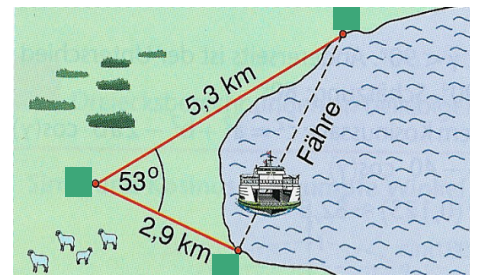
Beispiel 21 jetzt mit Kosinussatz!

Nebenstehende Aufgabe haben Sie bereits einmal gelöst – indem Sie eine Höhe eingezeichnet haben und dann...

Mit dem Kosinussatz ist die Lösung viel einfacher!

Welche Strecke legt die Fähre zurück?

Lösung 4.24 km



Beispiel 22 Beweis des Kosinussatzes

Zuerst zeichnen wir – wie immer bei nicht-rechtwinkligen Dreiecken! – eine Höhe ein.

In der Abbildung teilt die Höhe h_a das Dreieck in die beiden rechtwinkligen Dreiecke AHC und ABH auf.

Die Seite a wird durch den Punkt Höhenfußpunkt H in die beiden Teilstrecken x und $a - x$ geteilt.

Im Dreieck ABH gilt

- nach Pythagoras:

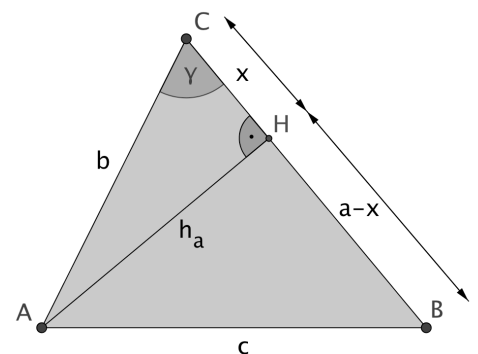
Im Dreieck AHC gilt

- nach Pythagoras:
- und die trigonometrische Beziehung:

Einsetzen von (2) in (1) ergibt:

Führen Sie diesen Schritt aus und setzen Sie (3) in (4) ein.

Begründen Sie damit den Kosinussatz!



$$(1) c^2 = h_a^2 + (a-x)^2$$

$$(2) b^2 = h_a^2 + x^2$$

$$(3) \cos \gamma = \frac{x}{b}$$

$$(4) c^2 = (b^2 - x^2) + (a-x)^2 = \dots$$

Beispiel 23 Kosinussatz und Pythagoras

a) Da alle Seiten „gleichberechtigt“ sind (es gibt ja keinen rechten Winkel mehr und somit auch keine Hypotenuse etc.) lässt sich der Kosinussatz für jede Seite formulieren. Es gilt also auch:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

Ebenso gilt: $a^2 =$ _____

b) Kosinussatz und der Pythagorassatz sind eng miteinander verwandt. Der eine ist nämlich „bloss“ ein Spezialfall des anderen! Sehen Sie warum?

Beispiel 24 Kosinussatz trocken

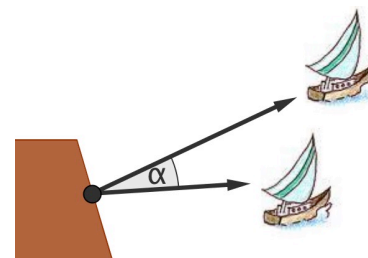
Gegeben sind die drei Seiten eines Dreiecks: $a = 6$ cm, $b = 8$ cm und $c = 7$ cm. Bestimmen Sie die Winkel.

Lösung $\alpha = 46.6^\circ$; $\beta = 75.5^\circ$; $\gamma = 57.9^\circ$

Beispiel 25 Kosinussatz nass

Zwei Segelboote bewegen sich auf gradlinigen Kursen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt weg.

Die Geschwindigkeiten betragen $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw. $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



a) Wie gross ist der Abstand der Boote 3.5 Stunden nach dem Start, wenn die Kurse um $\alpha = 20^\circ$ auseinander laufen?

b) Wie gross wäre α gewesen, wenn nach 3.5 Stunden die Boote einen Abstand von 12 km gehabt hätten?

Lösung a) 9.2 km b) $\alpha = 33^\circ$



Merke

Sind bei einem Dreieck die 3 Seiten gegeben, dann müssen wir den Kosinussatz anwenden, um die Winkel zu berechnen.

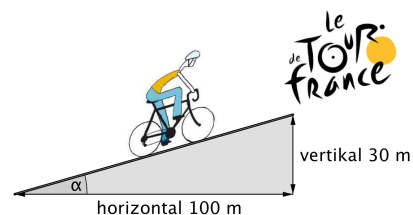
3 Zusammenfassung



Grundaufgabe 1 Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

a) Berechnen Sie den Steigungswinkel der Strasse.

b) In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Kathete $a = 5$ und die Hypotenuse $c = 12$ gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Grössen.

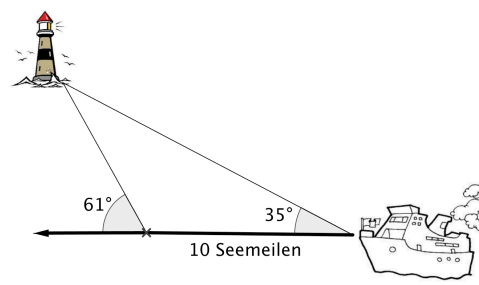


Grundaufgabe 2 Trigonometrie am nicht-rechtwinkligen Dreieck

a) Ein Leuchtturm wird unter einem Winkel von 35° zur Fahrtrichtung angepeilt. Nach 10 Seemeilen ergibt eine erneute Peilung den Winkel von 61° .

Wie weit ist das Schiff bei der 2. Peilung vom Leuchtturm entfernt?

b) Gegeben sind die drei Seiten eines Dreiecks. Wie gross sind die Winkel? Machen Sie ein Beispiel.



Grundaufgabe 3 Verallgemeinerung – Sinusfunktion

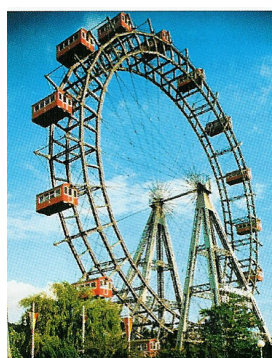
a) Zur Verallgemeinerung von \sin und \cos am Einheitskreis.

- Wie gross ist das Bogenmass von 130° ? Schätzen Sie $\sin 130^\circ$. Begründen Sie Ihre Schätzung!
- Schätzen Sie $\cos 1^\circ$ und $\cos 1$. Beachten Sie den Unterschied!
- Machen Sie ein Beispiel einer Quadratenrelation.
- Lösen Sie die Gleichung: $-2\cos\alpha = 0.4$ *zeichnerisch!*

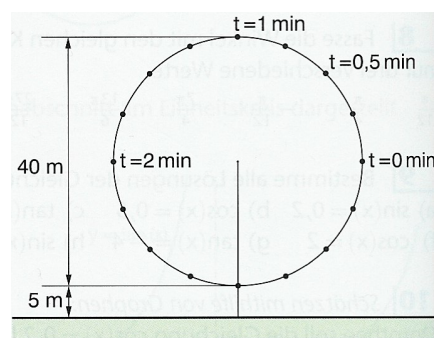
b) Das Riesenrad dreht sich gleichmässig (ohne anzuhalten). Für eine volle Umdrehung braucht es 4 Minuten. Zu verschiedenen Zeitpunkten befindet sich die Gondel auf verschiedenen Höhen (über dem Boden).

Die Höhe h hängt von der Zeit t ab und lässt sich mittels einer Sinuskurve beschreiben.

- Wie lautet die Gleichung der Kurve?
Beachte zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Gondel auf halber Höhe.
- Skizzieren Sie die Kurve.
- Wann befindet sich die Gondel auf einer Höhe von 35 m?



Riesenrad

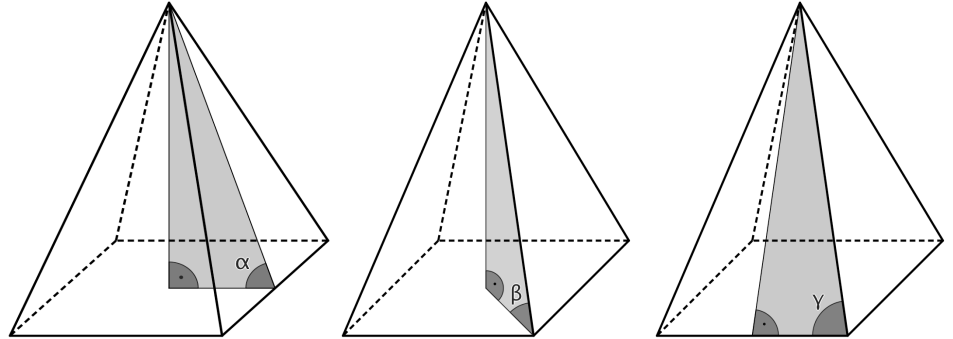


Modell

4 Weitere Aufgaben – Lösungen

Aufgabe 1 Pyramide

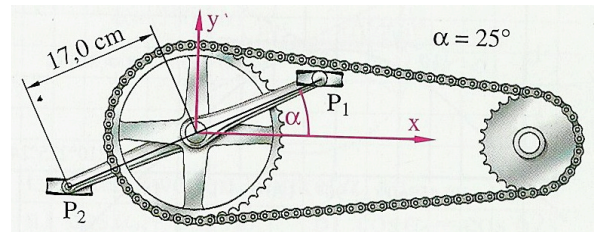
In einer Pyramide sind unterschiedliche Neigungswinkel zu finden.
Bestimmen Sie die drei Winkel.
Die Grundfläche der Pyramide ist quadratisch mit Seitenlänge $a = 6$, die Höhe beträgt $h = 8$.



Aufgabe 2 Velo

Berechnen Sie die Koordinaten der Pedale.

- in der eingezeichneten Lage.
- eine Vierteldrehung weiter.

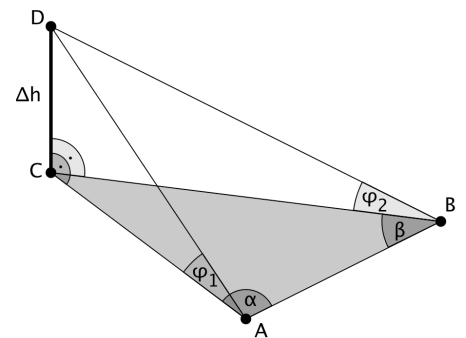


Aufgabe 3 Triangulation

Höhenmessung

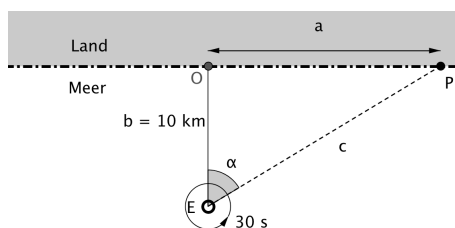
Von der horizontalen Standlinie AB aus wird die Höhendifferenz Δh berechnet. Es ist:

- $AB = 36.5 \text{ m}$
- $\alpha = 78.4^\circ$, $\beta = 57.1^\circ$
- Höhenwinkel: $\varphi_1 = 38.9^\circ$, $\varphi_2 = 34.7^\circ$ (Kontrollwinkel!)

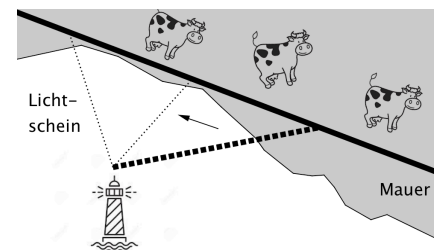


Aufgabe 4 weitere trigonometrische Funktionen

- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $y = 2 \cdot (\sin x)^2$.



- Ein Leuchtturm ist 10 km von der Küste entfernt und sein Licht benötigt 30 s für eine Umdrehung. Beobachtet wird die Bewegung des Lichtscheins entlang einer Mauer an der Küste.



Hinweis Tangensfunktion!

- Stellen Sie die Entfernung des Lichtscheins vom Punkt O auf der Mauer als Funktion der Zeit t dar.
- Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion.

Lösungen

Aufgabe 1

$$\alpha = 69.4^\circ; \beta = 62.1^\circ; \gamma = 70.7^\circ$$

Aufgabe 2

a) $P_1(15.4/7.2)$ cm ; $P_2(-15.4/-7.2)$ cm

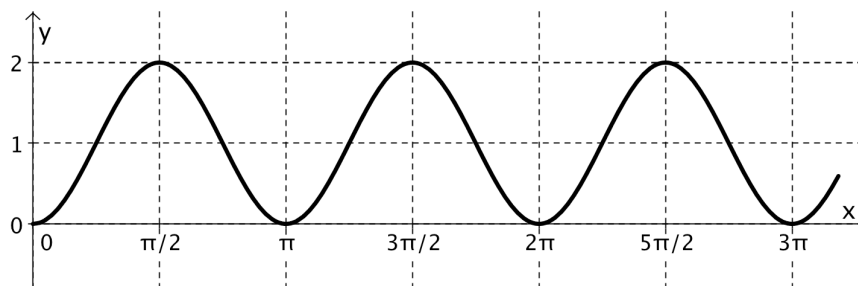
b) $P_1(-7.2/15.4)$ cm ; $P_2(7.2/-15.4)$ cm

Aufgabe 3

$$\Delta h = 35.3 \text{ m}$$

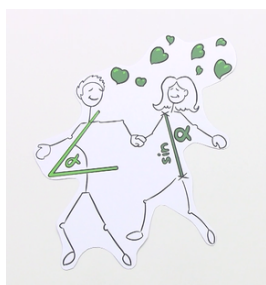
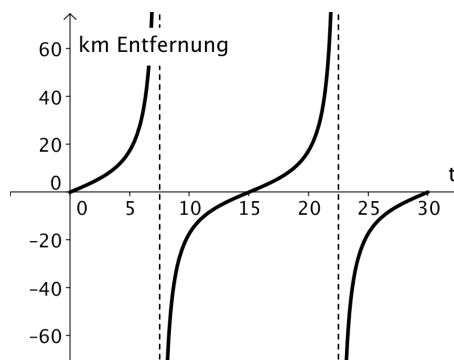
Aufgabe 4

a) $y = 2 \cdot (\sin x)^2$



b) $y = 10 \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{30} \cdot t\right)$.

Das Licht trifft auf die Mauer für die t-Werte $0 \leq t \leq 7.5$ und $22.5 \leq t \leq 30$.



Anhang 1 Zusätzliches...

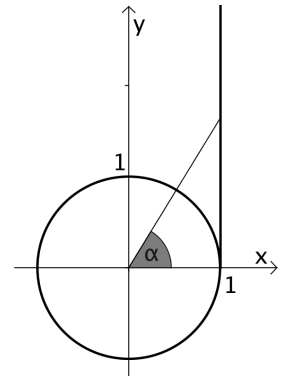


Tangens am Einheitskreis

Sie wissen, wie sich der Sinus und der Kosinus am Einheitskreis veranschaulichen und verallgemeinern lassen.

Dies ist auch beim Tangens möglich. Wie?

Benützen Sie nebenstehende Skizze. (Tangens \approx Tangente...)

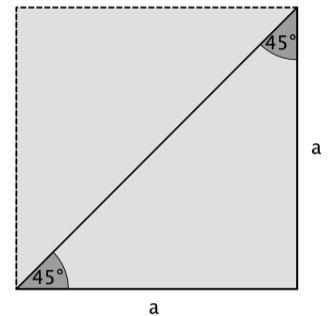
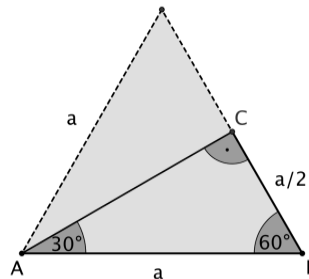


Spezielle Werte (ohne TR!)

Die Sinus-, Kosinus- und Tangens-werte, die der Taschenrechner zeigt, sind zwar auf viele Stellen genau, aber in der Regel doch nur gerundet. Für die Winkel 30° , 45° und 60° ergeben sich jedoch einfache Brüche bzw. Wurzelausdrücke.

Ergänzen Sie die untenstehende Tabelle (ohne TR!). Sie können dazu die abgebildeten Figuren nutzen.

Berechnen Sie dazu zuerst die Strecke AC mit Hilfe des Pythagoras:



$$AC = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \dots$$

Tabelle der besonderen Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					



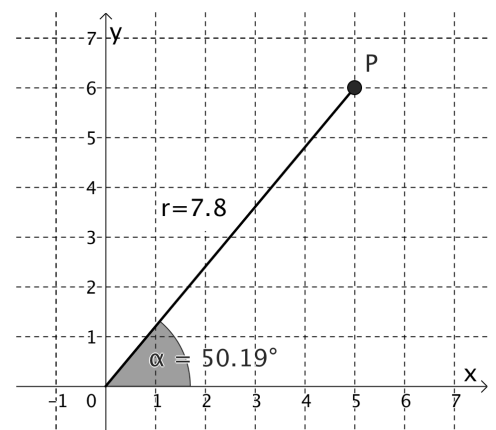
Polarkoordinaten

Die Position eines Punktes im Koordinatensystem wird normalerweise durch seine x- und seine y-Koordinate beschrieben (sog. *kartesische Koordinaten*). Die Lage eines Punktes kann aber auch durch die Entfernung vom Ursprung und den Winkel mit der x-Achse angegeben werden. Man nennt dies die *Polarkoordinaten* des Punktes.

Der Punkt P(5;6) z.B. hat die Polarkoordinaten P(7.8;50.2)

Welche Polarkoordinaten haben die Punkte

- Q(1/2)
- R(-2/1.5)



Anhang 2 Horizonterweiterung (der kroatische Kapitän)

Wie weit sehen wir?

Ein Beispiel für unverantwortliches Lernen

Hans Walser

0 Anlass

Beitrag Anneser 2005 in PM.

1 Der Leuchtturm

In vielen Büchern ist folgende Aufgabe zu finden: „Wie weit kann man von einem Leuchtturm mit der Höhe h aufs Meer hinaus schauen?“ Mit dem Leuchtturm ist der Alltagsbezug hergestellt. Im wirklichen Alltag sind zwar die meisten Leuchttürme als Folge von RADAR und GPS außer Betrieb, aber im schulischen Alltag leben sie unbeirrt weiter. Natürlich lässt sich die Aufgabe anders verkleiden, etwa indem der Leuchtturm durch die Kommandobrücke des kroatischen Containerfrachters *Cast Muskox* ersetzt wird oder simpel durch eine Person am Meeresstrand.

2 Die Formel

Nach mehreren Arbeitsphasen und unter flankierenden Maßnahmen der Lehrperson finden Schülerinnen und Schüler die im Lehrplan vorgesehene Formel:

$$d_1 = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}$$

Dabei ist h die Höhe über Seespiegel und R der Radius der Erdkugel, dessen Erarbeitung aber nicht Teil des selbstverantwortlichen Lernens ist. Wer es trotzdem wissen möchte: Der Meter ist so definiert, dass ein Viertelsbogen vom Äquator zum Pol 10.000.000 m misst. Daraus ergibt sich:

$$R = \frac{40.000.000}{2\pi} \text{ m} = 6.366.197 \text{ m}$$

3 Examples, examples, examples

3.1 Men's horizon

Für einen Mann mit der Augenhöhe $h = 1,7$ m erhalten wir durch Einsetzen in die Formel etwa 4653 m.

3.2 Dog's horizon

Für einen Schoßhund mit der Augenhöhe 0,17 m erhalten wir etwa 1469 m. Das ist etwa ein Drittel vom men's horizon, ob-

wohl die Augenhöhe nur ein Zehntel ist. Damit ist bewiesen, dass die Hunde besser sehen als die Männer. Nachdem diese beiden Beispiele männlicher Natur waren, muss wegen der political correctness nun unbedingt etwas Weibliches her.

3.3 Der Horizont einer Schlange

Für die Augenhöhe 0,017 m einer Schlange erhalten wir etwa 465 m. Die Schlangen sind noch scharfsichtiger.

4 Die kroatische Formel

Auf der Kommandobrücke des kroatischen Containerfrachters *Cast Muskox* hat mir der first Mate die Formel

$$d_3 = \sqrt{2Rh}$$

mitgeteilt.

Der geneigte Leser merkt zweierlei:

Erstens: Wir sind jetzt in der Du-Phase des Lernens.

Zweitens: Die kroatische Formel ist einfacher.

Stimmt sie aber?

5 Rechnungen

Aus

$$d_1 = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}$$

erhalten wir zunächst

$$d_2 = \sqrt{R^2 + 2Rh + h^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}$$

also schon fast die kroatische Formel.

Und nun kommt der schmutzige Trick von Newton: Da h im Vergleich zu R sehr klein ist, ist h^2 noch kleiner und kann daher gestrost weggelassen werden. Damit ergibt sich die kroatische Formel.

Den Ausdruck „schmutziger Trick von Newton“ habe ich von einer Studentin übernommen. Es ist, um ehrlich zu sein, der einzige echte Schülerbezug in meinen Überlegungen. Immerhin basiert die ganze Differenzialrechnung auf diesem schmutzigen Trick. Die kroatische Formel ist also eine Näherung. Wie gut ist sie?

6 Vergleiche

Wir setzen die Daten für die Schlange in die folgenden drei Formeln ein und erhalten, diesmal mit allem, was der Taschenrechner hergibt:

$$d_1 = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = 464,6504062$$

$$d_2 = \sqrt{2Rh + h^2} = 465,2426495$$

$$d_3 = \sqrt{2Rh} = 465,2426492$$

Die Ergebnisse sind verwirrend. Die beiden Werte d_1 und d_2 sind ja exakt und sollten daher dasselbe ergeben. Tatsächlich unterscheiden sie sich schon in der ersten Dezimalen. Dafür stimmen der exakte Wert d_2 und der approximative Wert d_3 in mehreren Dezimalen überein. Was ist da los? Sitzt die Schlange nun im Taschenrechner? Tatsächlich tut sie das, und zwar bei der Formel für d_1 . Wir haben unter der Wurzel die Differenz zweier annähernd gleich großer Zahlen. Das führt zum Effekt der so genannten Auslöschung, wodurch die Genauigkeit beeinträchtigt wird.

7 Eine Nutzenanwendung

Die Nutzenanwendung unseres Beispiels ist folgende: Wenn der Mann mit der Augenhöhe 1,7 m am Strand zuguckt, wie die Sonne am Horizont auftaucht, weiß er nun, dass er 4653 m von der Sonne entfernt ist.



Die Sonne ist 4653 m weit weg

Literatur

Anneser, Franz (2005). Wie weit ist es bis zum Horizont? Ein Beispiel für selbstverantwortliches Arbeiten. PM 47 (Feb. 2005) 9–12.

Hans Walser,
Universität Basel und
Pädagogische Hochschule Basel
hwalser@bluewin.ch

Anhang 3 person in front of a mirror

A person 1.80 m tall stands in front of a plane mirror. What is the minimum height of the mirror, and how high must its lower edge be above the floor for the person to be able to see his/her whole body? Person's eyes are 6.0 cm below the top of the head.

Solution

The mirror must be at least half as tall as the person standing in front of it. Since the person is 180 cm tall, the vertical dimension of the mirror must be at least 90 cm. The lower edge of the mirror must be at a height that is half the distance between his feet and eyes. Since the eyes are located 6 cm from the top of his head which means it is at a height of 174 cm from his feet, the lower edge of the mirror must be 87 cm from the ground.

Explanation

Understanding the solution requires an intermediate result using the **law-of-reflection**. When a ray of light is incident on a plane reflecting surface, the incident ray and the reflected ray will lie on the same plane. One can define the angles of incidence and reflection as follows:

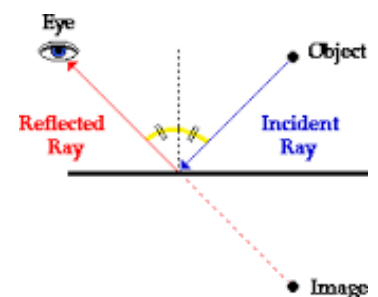
Angle of incidence = Angle between the incident ray and the normal to the reflecting surface at the point of incidence.

Angle of reflection = Angle between the reflected ray and the normal to the reflecting surface at the point of incidence.

The law of reflection states that the angle of reflection is the same as the angle of incidence.

A Useful Result

Consider a situation where a light ray from an object gets reflected by a mirror and enters an eye, as illustrated in the figure below. If the object and the eye are at the same distance from the mirror then the law of reflection implies that the point of incidence lie exactly midway between the object and the eye.



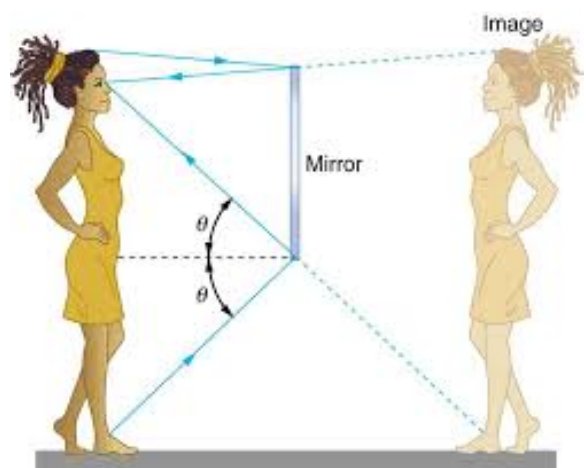
Applying This Result To Our Problem

Now let us apply the above result to our problem in which a 180 cm tall person stands in front of a mirror. The top of her head, her eyes and her feet, all lie along the same vertical line. The two objects we are going to consider are the 'top of her head' and 'her feet'. These two objects lie at the same distance from the mirror as her eyes.

The point of incidence of the ray from the 'top of her head' must lie at the midpoint between her eyes and the top of her head. Since the eyes are 6 cm below the top of her head, the point of incidence of the ray must be $180 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 177 \text{ cm}$ from the ground. This marks the upper edge of the mirror.

The point of incidence of the ray from her feet must lie at the midpoint between her eyes and her feet. Since the eyes are 174 cm from her feet, the point of incidence of this ray must be $174 \text{ cm} / 2 = 87 \text{ cm}$. This marks the lower edge of the mirror.

So the lower edge of the mirror must be 87 cm from the ground and the vertical dimension of the mirror must be $177 \text{ cm} - 87 \text{ cm} = 90 \text{ cm}$, which is half the height of the person.



Anhang 4 Leichtathletik und Musik

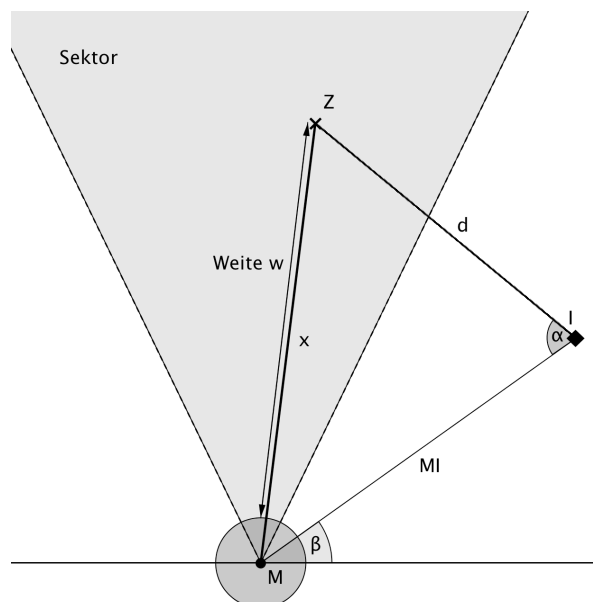
Laser Triangulationsprinzip beim Werfen

Beim Diskuswerfen wird ein Messinstrument vor Beginn des Wettkampfes an einem festen Ort I aufgestellt. Dann wird der Mittelpunkt M des Wurfkreises und mit Hilfe von Winkel- und Laserdistanzmessung der Winkel β und der Abstand MI bestimmt.

Schon kann der Wettkampf beginnen: Der Diskus fliegt durch die Luft und geht im markierten Sektor nieder. Bei der Aufschlagsstelle steckt der Kampfrichter die Zielmarke Z in den Boden.

Die Person beim Messinstrument richtet das Fernrohr des Messinstrumentes grob aus Richtung Aufschlagsstelle und drückt auf die Starttaste. Nun sucht die Automatik des Messinstrumentes den genauen Ort der Zielmarke, löst die millimetergenaue Laserdistanz-messung der Strecke d zwischen Instrument und Zielmarke aus und bestimmt den Horizontalwinkel α zwischen Wurfkreismittelpunkt und Ziel.

Die Software berechnet daraus mit dem **Kosinussatz** die Distanz x, zieht den Radius r des Wurfkreises ab und rundet auf Zentimeter. Wenige Sekunden nach dem Druck der Starttaste erscheint die gültige Weite w auf den Bildschirmen im Stadion und überall auf der Welt.



Stimmgabel

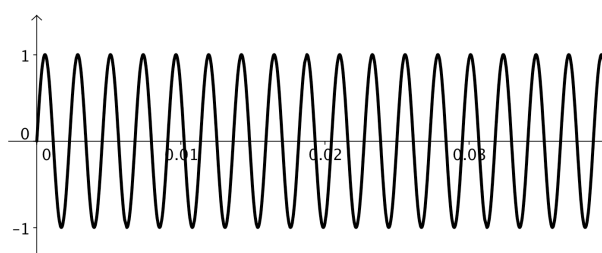
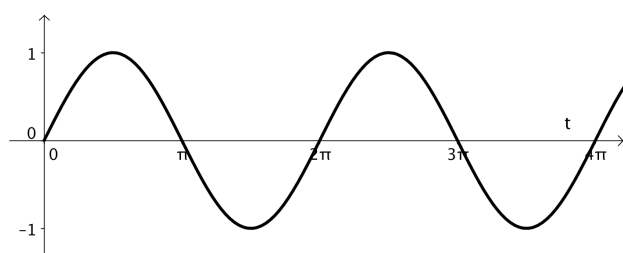
MusikerInnen benutzen manchmal eine Stimmgabel um ihre Instrumente genau zu stimmen. Eine Stimmgabel kann so hergestellt werden, das sie einen bestimmten Ton erzeugt (je grösser die Gabel, umso tiefer der Ton).



Die Standardstimmgabel ist so gebaut, dass sie einen A-Ton mit einer Frequenz* von 440 Hz erzeugt, d.h. die Gabel führt in einer Sekunde 440 Schwingungen durch.

In der Abbildung ist diese Schwingung gegenüber der uns schon bekannten normalen Schwingung aufgetragen.

* Frequenz = Anzahl der „Schwingungen“ (Perioden) in einer Sekunde; $y = \sin(2\pi \cdot t)$ hat die Frequenz 1; $y = \sin t$ hat die Frequenz $\frac{1}{2\pi}$.



YOU MAY BE RIGHT, PYTHAGORAS,
BUT EVERYBODY'S GOING TO LAUGH
IF YOU CALL IT A "HYPOTÉNUSE."

