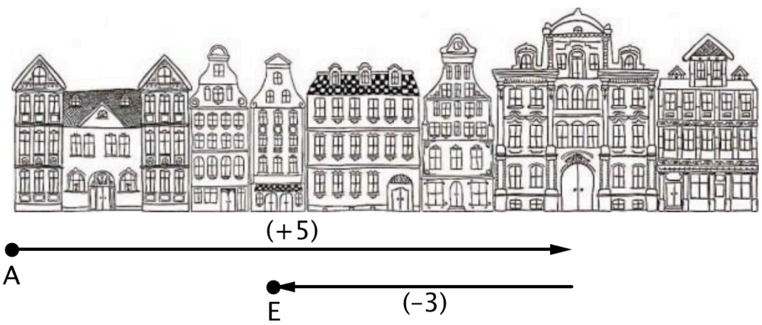
Datum Name

Vektoren



Was ist ein Vektor?
Addition, skalare Multiplikation
Betrag
Skalarprodukt

Hängen Algebra und Geometrie zusammen?

Lässt sich die Algebra „geometrisieren"?

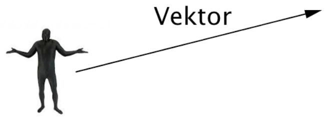
Lässt sich die Geometrie „algebraisieren"?

„Jede geometrische Figur kann in eine algebraische Gleichung umgewandelt werden und jede algebraische Gleichung in eine geometrische Form."

„Für mich sind alle Dinge Mathematik."

René Descartes (1596-1650),
„Erfinder" des kartesischen Koordinatensystems

Inhalt



0 Was *ist* ein Vektor?

... ein sehr allgemeiner Begriff...

... ein Vektor ist ein **n-dimensionales Zahlentupel („Zahlenturm“)**.

„vehere“ (latein) = tragen, fahren, ziehen, schleppen, befördern

... ein Vektor ist ein **Vehikel**.

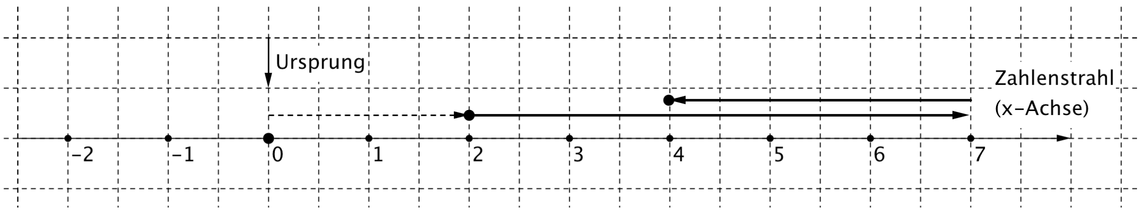
1 -dimensional

1-dimensionale Reise; Vektor = einer, der „trägt“

Eine bekannte Rechnung anders sehen

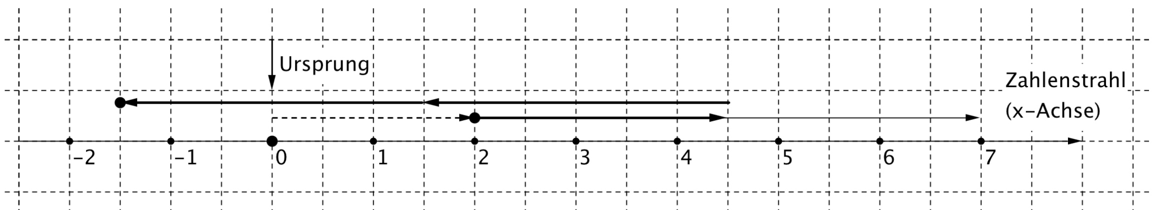
$$2 + 5 - 3 = 2 + 5 + (-3) =$$

Veranschaulichung (*Geometrisierung*):



- Eine Rechnung ist eine „Bewegung“. Eine „Bewegung“ symbolisieren wir durch einen **Pfeil** (**Vektor**).
- **Ausgangs-„punkt“** 2 (Problem bei der Darstellung: „Punkt“ oder „Pfeil“?)
- Vektoren addieren heisst Pfeile **aneinanderhängen**
  (Subtrahieren entspricht addieren eines „negativen“ Pfeils. Negativ = entgegengesetzte Richtung)
- Welche „Länge“ haben die Pfeile (Vektoren)? $|5| = 5$; $|-3| = 3$. Betragstriche...
  Statt „Länge“ sagen wir auch **Betrag**.
- Wir können Pfeile auch verlängern oder verkürzen, kurz: **vervielfachen**:

$$\mathbf{2} + \mathit{0.5}\cdot\mathbf{5} + \mathit{2}\cdot\mathbf{(-3)}$$



Ein *eindimensionaler* Vektor ist ein Zahlenturm, aber ein kleiner Turm: er besteht nur aus *einer* Zahl.
Um aber anzudeuten, dass es ein „Turm“ ist, schreiben wir ihn mit Klammern:

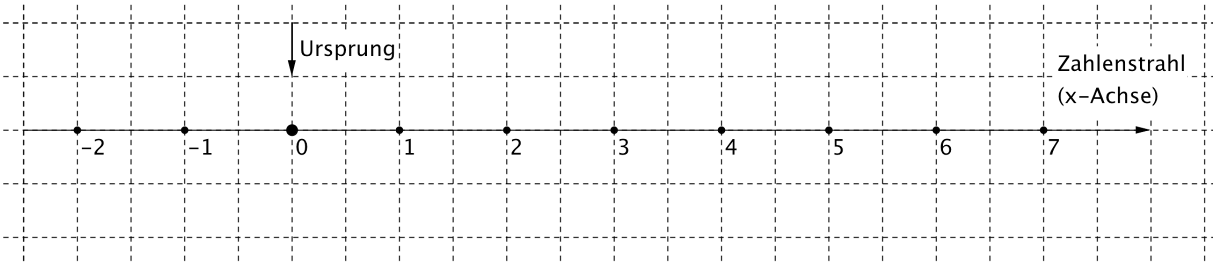
$$\mathbf{(2)} + \mathit{0.5}\cdot\mathbf{(+5)} + \mathit{2}\cdot\mathbf{(-3)}$$

Beispiel 1 **Darstellung mit Hilfe von Pfeilen (Vektoren)**

a) Die folgende Rechnung („Reise“, „Einkaufsbummel“) soll geometrisch dargestellt werden:

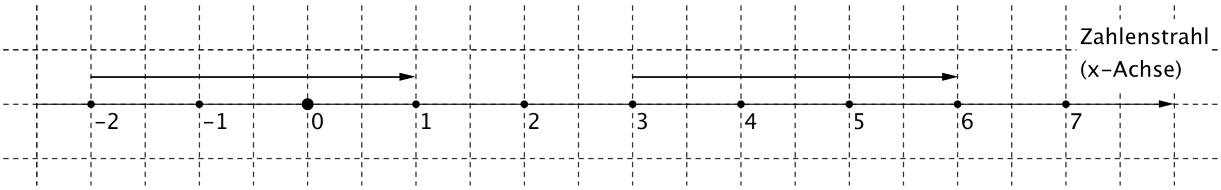
(3) + **(–4)** + **(+5)** + **(+2)**

- Zeichnen Sie den „Ausgangspunkt“ ein und verwenden Sie für die „Bewegungen“ Pfeile (Vektoren).



- Bestimmen Sie die Beträge der Pfeile (Vektoren).

b) Nicht gleich oder doch?



Eingezeichnet sind „zwei“ Pfeile (Vektoren). Ist es derselbe Pfeil (Vektor)?
Kreuzen Sie die Ihrer Meinung nach richtige Antwort an. Begründung!

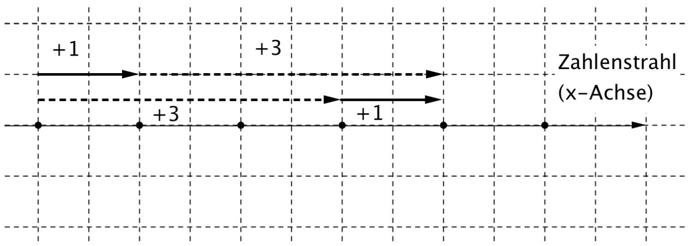
❒ Ein Vektor ist einfach **(+3)**. Er hat keinen „festen“ Anfangspunkt. Ich darf ihn verschieben.

❒ Der Vektor ist einfach **(+3)**. Es ist aber wichtig, wo er „beginnt“.

c) Addition von Vektoren

Es spielt es keine Rolle, mit welchem Pfeil (Vektor) ich bei einer Reise (Rechnung) „beginne“.
Der Effekt (Resultat) bleibt gleich.
In der Zeichnung „sehen“ wir, dass gilt:

(+1) + **(+3)** = **(+3)** + **(1)**



- Stellen Sie ebenso dar, dass offensichtlich gilt:

  (–2) + **(+4)** = **(+4)** + **(–2)**

- Warum sind auf der x-Achse keine Zahlen angegeben?

- Beim Addieren von Vektoren ist es wie bei den Zahlen. Die Reihenfolge spielt keine Rolle:

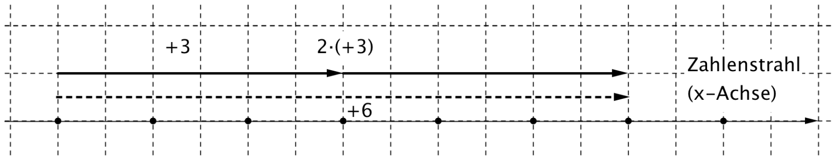
  A + B = B + A.

  Dieses Gesetz heisst

  ❒ Kommutativgesetz ❒ Distributivgesetz

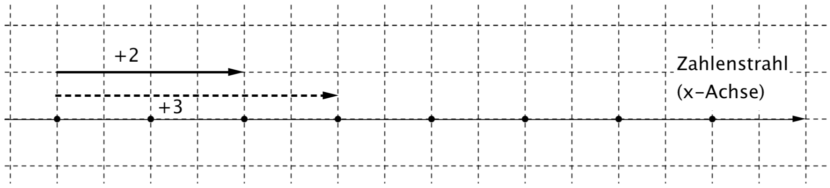
d) Vielfache

Pfeile (Vektoren) kann man „verlängern“ oder „verkürzen. Kurz: man kann „Vielfache“ von Vektoren bilden.
Wie geht das?
Man *multipliziert* den Vektor mit der gewünschten Zahl.

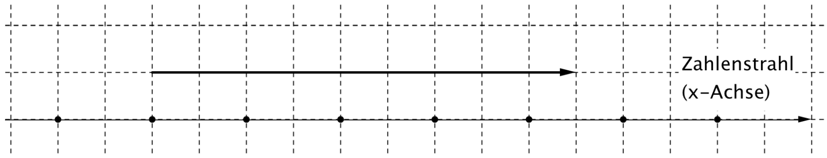


Der Pfeil (Vektor) ***(+3)*** *wird „verdoppelt“: 2·****(+3)*** *=* ***(+6)****.*

- Die beiden Vektoren **(+2)** und **(+3)** sind eingezeichnet.
  Zeichnen Sie ein: 3·**(+2)** + (–1)·**(+3)**

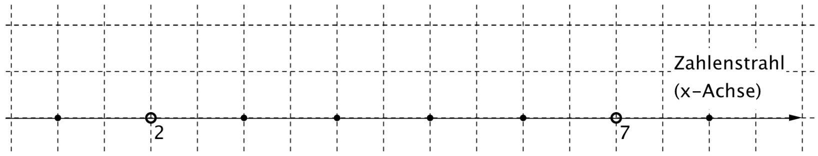


- Wird ein Vektor mit der Zahl (–1) multipliziert, dann erhält man seinen „Gegenvektor“.
  Eingezeichnet ist ein Vektor.
  Zeichnen Sie den Gegenvektor ein. Worin unterscheiden sich Gegenvektor und Vektor? Worin nicht?



e) Vektor von „Punkt“ zu „Punkt“

- Eingezeichnet sind die beiden eindimensionalen „Punkte“ (2) und (7).
  Zeichnen Sie den Pfeil (Vektor) ein, der einen von (2) nach (7) „trägt“. Wie lautet dieser Vektor?



- Wie lautet der Vektor der einen vom „Punkt“ (6) zum „Punkt“ (–4) trägt?

- Wie lautet der Vektor der einen vom „Punkt“ A zum „Punkt“ B trägt?

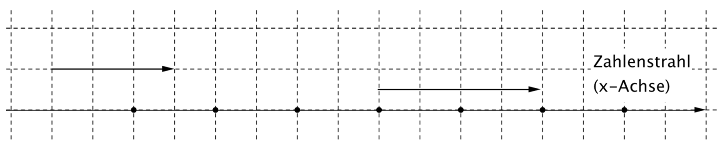
f) Falsch oder richtig?

Kreuzen Sie die Ihrer Meinung nach richtigen Antworten an. Begründe!

❒ Vektoren stelle ich mir als Pfeile vor. Ich addiere sie, indem ich sie „aneinanderhänge“.

❒ Der Vektor (+2) heisst einfach: „Ich reise um zwei nach rechts.“ Wo ich ihn einzeichne ist eigentlich egal.

❒ Jemand sagt:
„Man kann diese Vektoren *nicht* addieren, weil sie nicht aneinandergehängt sind.“

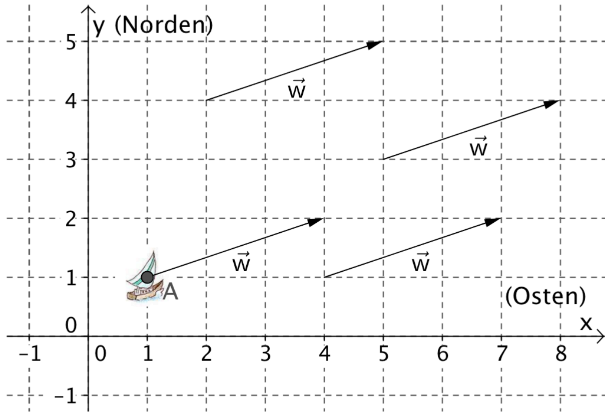


❒ Der Betrag eines Vektors ist stets positiv. Er gibt die Länge an.

❒ Die folgenden Rechnungen machen – in der Art ihres Aufbaus – Sinn:
„Punkt“ + Pfeil (Vektor) = „Punkt“;   Pfeil (Vektor) + Pfeil (Vektor) =Pfeil (Vektor)

2 -dimensional

2-dimensionale Reise; Vektor = einer, der „trägt“



Wir wissen bereits
Es spielt keine Rolle, wo wir den Vektor einzeichnen – der Wind ist „frei“.

Schreibweise & Grundregel

Beispiel 2 Schreibweise

Ein Schiff wird vom Wind weggetragen („weggezogen“).

a) Wo ist das Schiff am Anfang?
Wie lässt sich der Wind beschreiben?

b) Stellen Sie den gesamten Vorgang mit Hilfe einer sinnvollen Notation dar und sagen Sie, wo die Reise endet.

Beachte

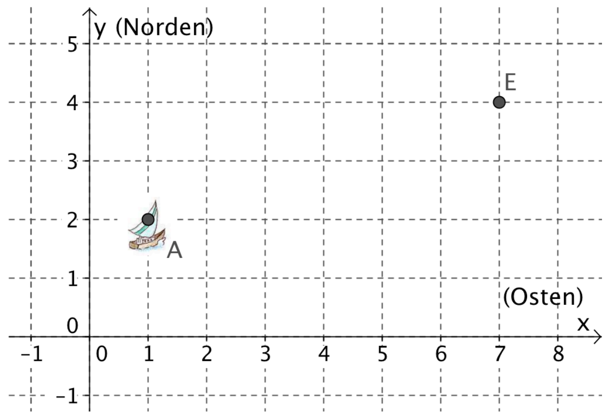
- Ein Vektor ist ein Zahlen*turm*.
  Anders gesagt: Ein Vektor ist eine verallgemeinerte (hier: 2-dimensionale) Zahl.
- Die einzelnen Einträge heissen **x-** bzw. **y-Komponente**.
- Ein Vektor besitzt eine **Richtung** und einen **Betrag** (Länge).

Beispiel 3 Grundregel (Vektor zwischen zwei Punkten)

Ein Schiff startet seine Reise im Punkt A und beendet sie im Punkt E.

a) Wie lautet der entsprechende Vektor?

b) Geben Sie eine allgemeine Regel an, wie man den Vektor zwischen zwei Punkten bestimmen kann.



Wir wissen bereits
... wie das geht. Es ist wie im eindimensionalen Fall...

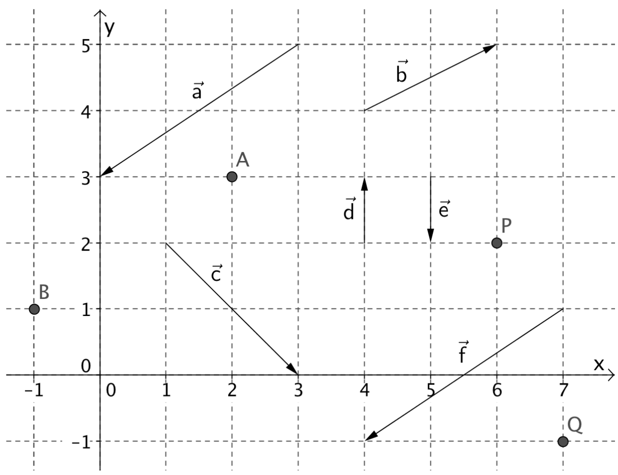
Beispiel 4 kurze Übung

a) Geben Sie die Komponenten der eingezeichneten Vektoren an.

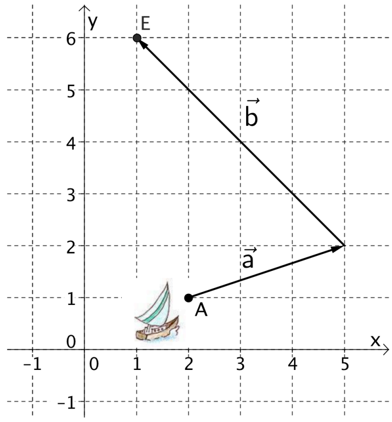
b) Wie lautet

- der Vektor $\overrightarrow{AB}$?
- der Vektor $\overrightarrow{BA}$?
- der Vektor $\overrightarrow{PQ}$?

c) Gilt: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$?



Addition & Vervielfachung (skalare Multiplikation)

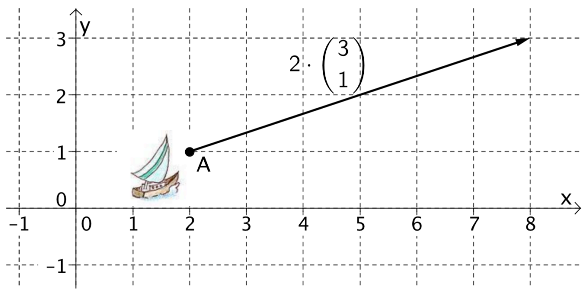


Ein Schiff im Punkt A(2/1) wird zuerst durch einen Windstoss $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dann durch einen Windstoss $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ fort bewegt.

In welchem Punkt E endet die kurze Reise?

$$E = A + \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3-4 \\ 1+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits
... wie das geht. Es ist wie im eindimensionalen Fall...
Pfeile (Vektoren) lassen sich aneinanderhängen...



Ein Windstoss in die Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ kann auch zweimal so stark sein. Dann gilt entsprechend: $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der Pfeil wird „gestreckt“.

Ist der Faktor negativ, so „kehrt“ sich der Pfeil um.

„Gleich gerichtete“ Vektoren – also solche, welche sich nur durch einen Faktor unterscheiden – heissen **kollinear.**

Wir wissen bereits
... wie das geht. Es ist wie im eindimensionalen Fall...
Pfeile (Vektoren) lassen sich vervielfachen ...

Beispiel 5 Reise – Schreibweise beachten (!)

Ein Segelschiff befindet sich am Anfang im Punkt A(2/1). Der Wind bläst zuerst mit $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

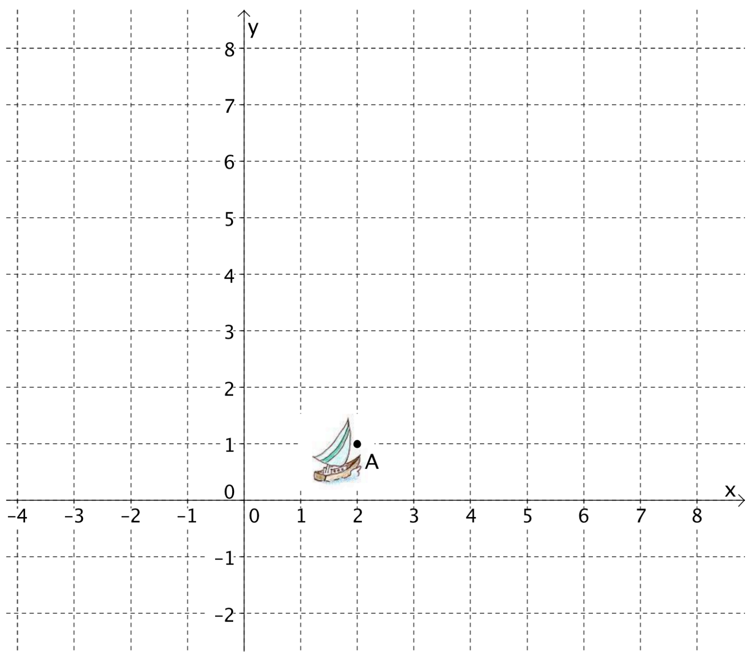
Dann dreht der Wind ständig. Er lässt sich nacheinander beschreiben mit $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösen Sie folgende Aufgaben

a) *zeichnerisch* direkt ins Koordinatensystem.

b) *rechnerisch*. Korrekte Schreibweise beachten!

- In welchem Ort E befindet sich das Segelschiff am Ende?
- Wie weit ist das Schiff vom Ausgangsort entfernt? (1 Einheit = 1 km)
- Ein zweites Segelschiff befindet sich anfangs im Punkt B(–3/2). Wo endet *seine* Reise?
- Das erste Segelschiff wird in E nochmals von zwei Windstössen erfasst, wobei der erste doppelt so stark ist wie $\vec{w}_2$ und der zweite halb so stark wie $\vec{w}_1$ in entgegengesetzter Richtung. Wo befindet es sich jetzt?

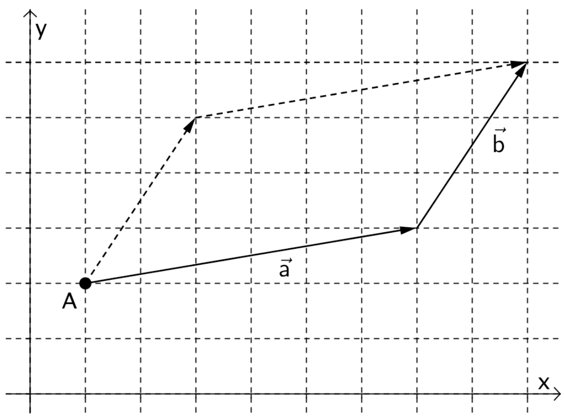


Wir halten fest:

- **Addition** $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$
- **Skalare Multiplikation** $t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot a_x \\ t \cdot a_y \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ (t = Skalar = einzelne Zahl)

Diese Operationen werden *komponentenweise* ausgeführt und sind völlig natürlich.

Einschub: Kräfteparallelogramm



Abgebildet sehen Sie ein sogenanntes *Kräfteparallelogramm*.

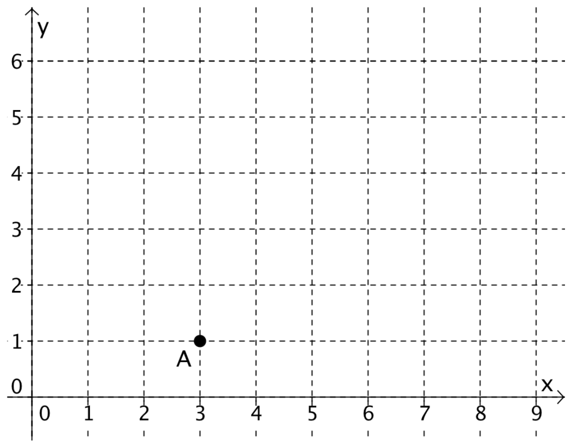
a) Was soll damit veranschaulicht werden? Erklären Sie!

Hinweis *... vielleicht mit einem Schiff und zwei Winden.*

b) Der „Gesamteffekt" der beiden Vektoren ist

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

und heisst die *„Resultierende".* Zeichnen Sie diesen Vektor ein!



c) Zeichnen Sie selber ein Kräfteparallelogramm mit den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. „Starten" Sie im Punkt A.

d) Sie haben in c) ein Parallelogramm gezeichnet. Beschriften Sie die restlichen Ecken mit B, C und D.
Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ lässt sich offensichtlich mit Hilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken, wie folgt:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

- Drücken Sie den Vektor $\overrightarrow{CA}$ mit Hilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus:

  $\overrightarrow{CA} =$

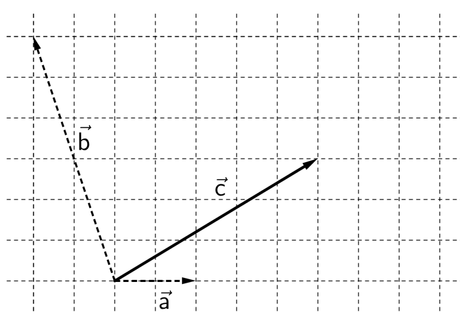
- Die Diagonalen des Parallelogramms schneiden sich in einem Punkt M. Drücken Sie folgende Vektoren mit Hilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ – bzw. Vielfachen davon – aus:

  $\overrightarrow{AM} =$ $\overrightarrow{DM} =$

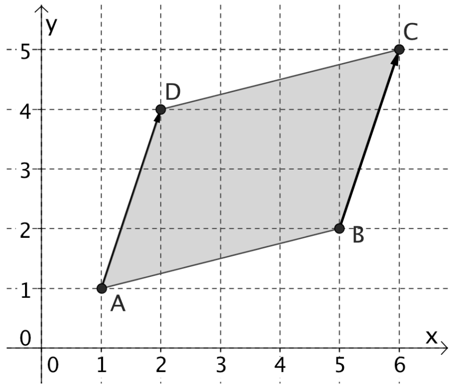
e) Vgl. nebenstehende Abbildung.
Lösen Sie zeichnerisch und rechnerisch! Es soll gelten:

$$\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

Bestimmen Sie t und s.



Beispiel 6 Parallelogramm



Von einem Parallelogramm ABCD kennt man die Ecken A(1/1), B(5/2) und D(2/4). Wie lautet die Ecke C?

Wir rechnen: $C = B + \overrightarrow{BC}$. Wegen $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ folgt:

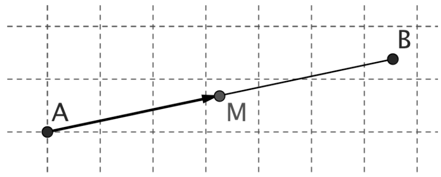
$$C = B + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{AD} = B + (D - A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Von einem Parallelogramm ABCD sind die Eckpunkte gegeben. Berechnen Sie den vierten. Machen Sie dazu evt. eine Skizze.

a) A(–2/–1), B(4/–2), C(2/3)

b) A(2/3), C(3/–1), D(5/1)

Beispiel 7 Mittelpunkt einer Strecke



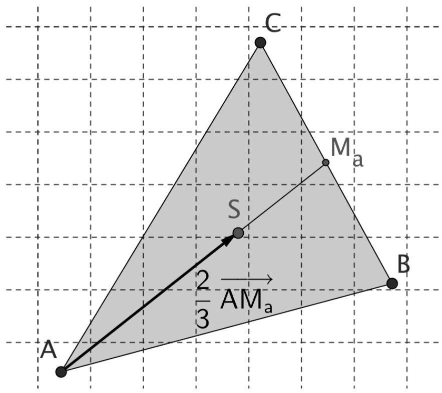
Gegeben sind die Punkte A und B. Für den Mittelpunkt M gilt:

$$M = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \ldots$$

a) Berechnen Sie den **Mittelpunkt** der Punkte A(–2/10) und B(4/0).

b) Zeigen Sie, dass für den Mittelpunkt zweier Punkte A und B gilt:

$$M = \frac{1}{2}(A + B).$$



c) Gegeben sind die Punkte A, B und C.
Für den **Schwerpunkt** S gilt:

$$S = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_a} = A + \frac{2}{3}(M_a - A) = \ldots$$

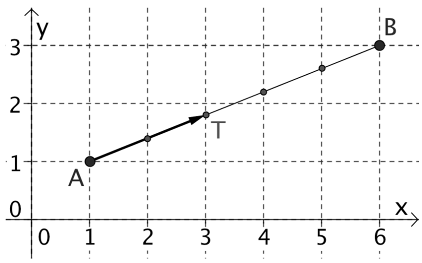
Zeigen Sie, dass für den Schwerpunkt dreier Punkte A, B und C gilt:

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

Zusatzfrage

Was ist $P = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$ *?*

Beispiel 8 Teilungsverhältnisse



Sei A(1/1) und B(6/3). Wo liegt der Punkt T, der die Strecke AB im Verhältnis 2:3 teilt?

Wir rechnen: $T = A + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.8 \end{pmatrix}$

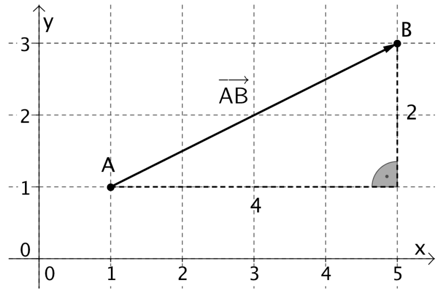
a) Gegeben sind die Punkte A(–2/4) und B(4/16). Die Strecke AB wird im Verhältnis 1:2 geteilt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Teilungspunktes T.

b) Gegeben sind die Punkte A und B. T soll die Strecke im Verhältnis r : s teilen. T = ?

Betrag

Den Betrag (Länge) eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnen wir mit dem **Pythagoras** und setzen – wie im 1-dimensionalen Fall – Betragsstriche $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat den Betrag: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.5$



Wir wissen bereits
... wie das geht.
Es ist ***ähnlich*** wie im eindimensionalen Fall...

Offensichtlich gilt allgemein:

$$\textbf{Der Vektor } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \textbf{ hat den Betrag } \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,.$$

Beispiel 9 **Betrag**

a) Welchen Betrag besitzt der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$?

b) Es sei $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix}$. Berechnen Sie y so, dass gilt: $\left|\vec{b}\right| = 5$.

c) Es sei A(2/5) und B(–1/3). Berechnen Sie den Abstand von A und B. Berechnen Sie zuerst $\overrightarrow{AB}$.

d) Die Punkte A(–2/2) und B(5/0) bilden die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Spitze C(2/y). y = ?

Beispiel 10 **kollineare Vektoren**

a) Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den zu $\vec{a}$ kollinearen Vektor

- $\vec{b} = 3 \cdot \vec{a}$
- $\vec{c} = -1.5 \cdot \vec{a}$

b) Gegeben sei der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Geben Sie einen zu $\vec{a}$ kollinearen Vektor an mit

- dem Betrag 10
- dem Betrag 1 (Ein Vektor mit Länge 1 heisst **Einheitsvektor**.)
- dem Betrag L

c) Ein Schiff befindet sich im Punkt A(–2/1) und fährt in *Richtung* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Wo ist es

- 35 km
- L km

vom Ausgangspunkt entfernt? (1 Einheit = 1 km)

d) Gegeben ist ein Vektor $\vec{a}$. Wie lautet der „zugehörige“ Einheitsvektor?

Skalarprodukt

Bisher haben wir Vektoren addiert (bzw. mit einer Zahl vervielfacht und dann addiert).

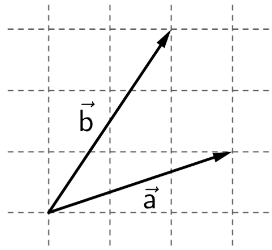
Kann man Vektoren auch miteinander multiplizieren? Dazu hat viele Möglichleiten... Eine davon ist:

Definition

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ ist wie folgt definiert („fest gelegt“):

$$\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_x} \\ \mathbf{a_y} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{b_x} \\ \mathbf{b_y} \end{pmatrix} = \mathbf{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}$$

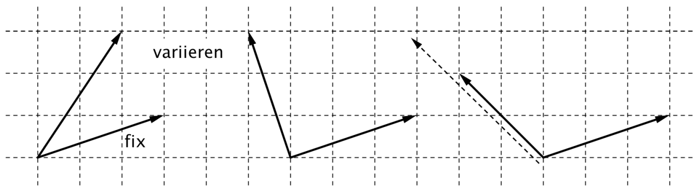
Beispiel 11 **Definition des Skalarproduktes „verstehen“**



a) Es ist: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie ihr Skalarprodukt. Erklären Sie die Namensgebung!

b) Das „Resultat“ des Skalarproduktes ist also ein Skalar (und kein Vektor!). Aber:
Was hat diese Zahl mit den beiden Vektoren zu tun?



Hinweis

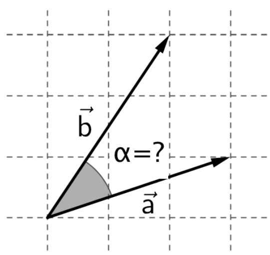
- *Zeichnen sie selber verschiedene Vektoren.*
  Gehen Sie systematisch vor.
  Variieren Sie den einen und lassen Sie den anderen „fix“.
  Was lässt sich variieren? Richtung und Länge!

- Im Unterschied zum „normalen“ Produkt zweier Zahlen kann das Skalarprodukt Null geben, auch wenn die beteiligten „Faktoren“ – also hier die Vektoren – beide von Null verschieden sind... Wann ist dies der Fall?

Merksatz...

Beispiel 12 **Formel für den Zwischenwinkel zweier Vektoren**

Das Skalarprodukt hat etwas mit dem Zwischenwinkel zu tun. Aber wie genau?



a) Berechnen Sie den Zwischenwinkel der abgebildeten Vektoren.

Hinweis *„Ergänzen“ Sie zu einem Dreieck. Wenden Sie dann den **Kosinussatz** an.*

b) Im Formelbüchlein steht die Formel für den Zwischenwinkel zweier Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}| \cdot |\vec{\mathbf{b}}|}.$$

- Lösen Sie die Aufgabe **a)** noch einmal mit der Formel. Stimmt es?

- Wir wussten bereits, dass das Skalarprodukt etwas mit dem Zwischenwinkel zu tun hat. Warum teilt man durch das Produkt der Beträge?

- Leiten Sie die obige Formel her mit Hilfe des Kosinussatzes!

Beispiel 13 Winkel berechnen

a) Welchen Winkel schliessen die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein?

b) Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Geben Sie sich selber einen weiteren Vektor vor.

Zeichnen Sie die beiden Vektoren. Berechnen Sie dann den Zwischenwinkel der beiden Vektoren.

Beispiel 14 senkrecht

a) Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Geben Sie einen zu $\vec{a}$ senkrecht stehenden Vektor an.

b) Gegeben ist ein Vektor $\vec{a}$.

Geben Sie eine Vorgehensweise an, wie man möglichst einfach einen senkrecht stehenden Vektor finden kann.

Beispiel 15 kollinear & senkrecht

Gegeben Sie ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Geben Sie einen zum Vektor $\vec{a}$

a) kollinearen Vektor an. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

b) kollinearen Vektor mit Betrag 15 an. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

c) senkrecht stehenden Vektor an. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

d) senkrecht stehenden Vektor mit Betrag 1 an. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Beispiel 16 Punkt mit rechtem Winkel

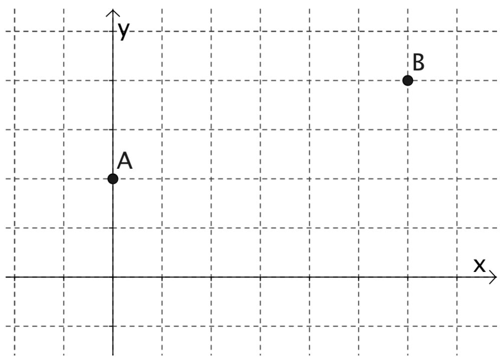
Rechnen! Zeichnen nur als Kontrolle.

a) Gegeben sind die Punkte A(0/2) und B(6/4).

- Berechnen Sie den Punkt P auf der x-Achse, für den gilt:
  <APB = 90°.

  Hinweis *Zeichnen Sie zuerst den Punkt P qualitativ in nebenstehender Skizze ein! Wie viele Lösungen gibt es?*

- Die Punkte A, B und P sind Eckepunkte eines Rechtecks.
  Wie lauten die Koordinaten der vierten Ecke?



b) Gegeben sind die Punkte A(1/–2) und B(4/4). Berechnen Sie den Punkt P auf der x-Achse, für den gilt:
<APB = 90°.

Hinweis *Machen Sie zuerst eine qualitative Skizze. Wie viele Lösungen gibt es?*

3 Zusammenfassung

Setzen Sie die folgenden Begriffe in den untenstehenden Lückentext ein.

Betrag, kollinear, Skalarproduktes, Komponenten, Aneinanderhängen, Skalar, senkrecht, Zahlenturm, Pfeil

Ein Vektor ist ein ____ (n-dimensionales Zahlentupel).

Die einzelnen Einträge heissen ____

Ein Vektor wird symbolisiert durch einen ________________________

Mit Vektoren kann man rechnen (wie mit Zahlen):

Rechnerisch erfolgt die Addition von Vektoren ganz einfach komponentenweise und „zeichnerisch“ durch

____ der Pfeile

Vektoren kann man beliebig verlängern und verkürzen. Dazu werden die Vektoren mit einem _______________ multipliziert.
Vektoren, die skalare Vielfache voneinander sind und damit „gleichgerichtet“, heissen ______________________ .

Die Länge eines Vektors heisst __________________________ und wird mit dem Satz des Pythagoras bestimmt.

Zwischenwinkel lassen sich mit Hilfe des ____ berechnen.

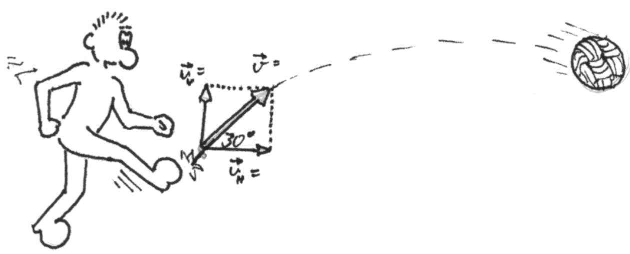
Insbesondere gilt: zwei Vektoren stehen genau dann _________________________ aufeinander, wenn das Skalarprodukt Null ist.

Der grosse **Vorteil von Vektoren** besteht darin, dass sich „Regeln“ und „Ideen“, welche mit ihrer Hilfe formuliert werden können, problemlos auf „höhere“ Dimensionen übertragen lassen.
Sie werden bald selber sehen, dass Strategien, die wir uns zuerst im 1 dimensionalen bzw. 2 dimensionalen „Raum“ aneignen, problemlos auf 3 dimensionale Fragestellungen übertragen werden können.

Bei einem n-dimensionalen Vektor werden n Zahlen zu einem neuen *Denkobjekt* zusammengefasst.
Man kann deshalb Vektoren auch als *verallgemeinerte Zahlen* auffassen.

Vektoren lasse sich sowohl algebraisch (als „Zahlenturm“ bzw. „Variablenturm“), wie auch geometrisch (als Pfeile mit Richtung und Betrag) deuten.
Sie schlagen eine Brücke zwischen der Algebra und der Geometrie.

Vektoren spielen aber nicht nur in der Mathematik eine Rolle, sondern auch in der Physik und in vielen anderen Wissenschaften, etwa der Wirtschaft.



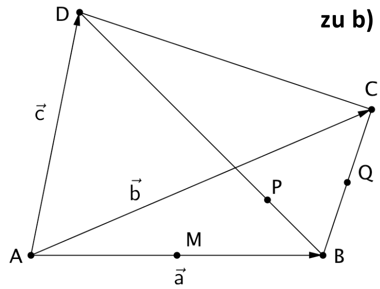
Grundaufgabe 1 Addition & skalare Multiplikation von Vektoren

a) Gegeben sind die Punkte A(1/2) und B(7/0). Berechnen Sie

- den Vektor $\overrightarrow{AB}$.
- den Mittelpunkt der Strecke AB

b) In der Figur ist M der Mittelpunkt der Strecke AB. P teilt die Strecke BD im Verhältnis 1:4. Q halbiert die Strecke BC.
Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{PQ}$ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

zu b)



c) Von einem Parallelogramm sind die Ecken A(1/1) und B(3/–2) sowie der Diagonalschnittpunkt M(5/2) gegeben. Berechnen Sie die Ecken C und D.

d) Was sind kollineare Vektoren?

- Machen Sie ein Beispiel.
- Jemand sagt: „Kollineare Vektoren darf man kürzen.“ Was sagen Sie?

Grundaufgabe 2 Betrag

a) Es sei $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie x so, dass gilt: $|\vec{b}| = 5$.

b) Es sei A(7/14) und B(–2/2).

- Berechnen Sie den Abstand von A und B. Berechnen Sie zuerst $\overrightarrow{AB}$.
- Geben Sie alle zu $\overrightarrow{AB}$ kollinearen Vektoren mit Betrag 10 an.

Grundaufgabe 3 Skalarprodukt

a) Geben Sie sich zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vor und berechnen Sie

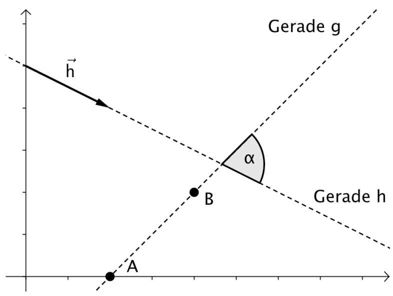
- das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren. Was sagt die Zahl über die Vektoren aus?
- den Zwischenwinkel der beiden Vektoren.

b) Bestimmen Sie die x-Komponente des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -3 \end{pmatrix}$ so, dass er senkrecht auf $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ steht.

c) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden g und h.

- Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(2/0) und B(4/2)
- Die Geraden h besitzt den „Richtungsvektor“ $\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c)



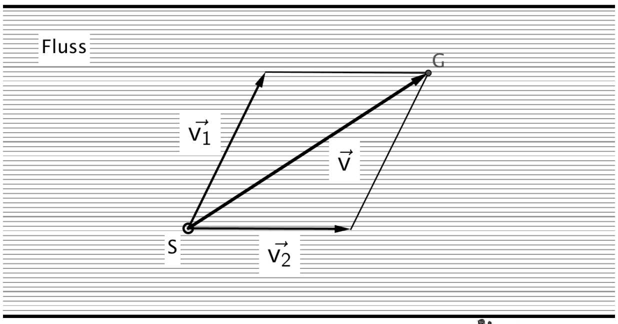
Anhang 1 Vektoren in verschiedenen Anwendungsgebieten

Vektoren als Geschwindigkeitsvektoren („Kraftvektoren“)

Die Geschwindigkeit eines Körpers lässt sich durch einen Pfeil und somit durch einen Vektor darstellen, wobei die Richtung des Pfeiles die Richtung der Geschwindigkeit (Bewegung) angibt und die Länge des Pfeiles den Betrag der Geschwindigkeit.

Ein Schwimmer will einen Fluss überqueren.
$\overrightarrow{v_1}$ bedeutet die „Eigengeschwindigkeit“ des Schwimmers, also jene Geschwindigkeit, mit der er sich bei stillstehendem Wasser bewegen würde.
$\overrightarrow{v_2}$ bedeutet die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses

Die beiden Geschwindigkeiten überlagern sich:
der Schwimmer wird „abgetrieben“.
Die resultierende Geschwindigkeit ist $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.



Aufgabe 1 Flussüberquerung

Das Wasser in einem Fluss bewegt sich mit 0.75 m/s. Der Schwimmer, der den Fluss überqueren will, legt 1 m/s zurück. Formulieren Sie eine mögliche Fragestellung und beantworten Sie sie und zwar

- *zeichnerisch* und
- *rechnerisch*.

Aufgabe 2 Flugzeug

Durch den in der Höhe kräftigen Wind wird die Richtung eines Flugzeugs abgelenkt. Als Folge entspricht die Eigenrichtung des Flugzeugs (die Richtung des Rumpfes) meist nicht der Flugrichtung.

In einer Höhe von 1500 m über Boden bewegt sich die Luft mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h parallel zum Boden Richtung Nordwest. Ein Flugzeug fliegt parallel zum Boden in dieser Höhe. Als Kurswinkel wird der Winkel zwischen Nordrichtung und Flugrichtung bezeichnet.
Lösen Sie die Aufgaben zeichnerisch mit 10 km/h ≅ 1 cm und rechnerisch.

a) Die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs beträgt 150 km/h.

- Bestimmen Sie den Kurswinkel und die resultierende Fluggeschwindigkeit, wenn der Rumpf Richtung Norden zeigt.
- Bei welcher Eigenrichtung beträgt der Kurswinkel 0°?

b) Bestimmen Sie die minimale Eigengeschwindigkeit, die nötig ist, damit das Flugzeug nach Norden fliegen kann.

Vektoren als „Datensatz“

Wir wissen: Vektoren sind „mehrdimensionale Zahlen“ ...

ALLES, was in Tabellenform vorliegt, lässt sich als „Vektor“ auffassen.

Aufgabe 3 Ski & Snowboard

Eine Firma verkauft Skis und Snowboards und lagert sie an zwei Standorten A und B. Die Tabelle zeigt den Lagerbestand.

Der Vektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} 650 \\ 400 \end{pmatrix}$ gibt den Lagerbestand des Standortes A an.

Standort	*A*	*B*
Ski	650	350
Board	400	220

a) Wie lautet der Vektor $\vec{B}$? Berechnen Sie Interpretieren den Summenvektor $\vec{A} + \vec{B}$.

b) Ein Paar Ski kosten 320 Fr. und ein Snowboard kostet 290 Fr.

- Wie lautet der Preisvekor $\vec{P}$?
- Bilden Sie das Skalarprodukt $\vec{A} \bullet \vec{P}$. Berechnen und interpretieren Sie es.

  (Wäre auch ein anderes „Produkt“ von Vektoren sinnvoll in diesem Zusammenhang?)

Aufgabe 4 Zeugnisnoten

a) Bei der Berechnung einer Zeugnisnote gewichtet ein Lehrer die erste und die dritte Prüfung doppelt. Die zweite, vierte und fünfte zählen einfach.
Zu diesem Zweck definiert er einen

Gewichtsvektor $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5.5 \\ 4.5 \\ 5 \end{pmatrix}$ der Prüfungsnoten einer Schülerin.

Es handelt sich um 5-dimensionale Vektoren, aber das ist kein Problem. Auch mit solchen Vektoren kann man rechnen und z.B. das Skalarprodukt bilden.

Welche Bedeutung hat die Formel $\frac{1}{7}(\vec{g} \bullet \vec{n})$?

b) Verallgemeinern Sie die Aufgabenstellung in a).

Anhang 2   Ergänzungen zum Skalarprodukt

Aufgabe 1   Rechenregeln

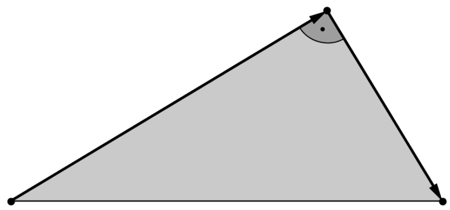
a) Was erhält man, wenn man das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst bildet?

b) Ist das Skalarprodukt kommutativ? Ist es distributiv?

Aufgabe 2   Beweis des Pythagoras

Beweisen sie den Satz des Pythagoras mit Hilfe des Skalarproduktes.

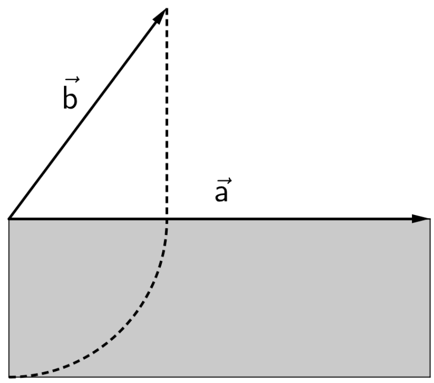
Hinweis *Führen Sie dazu Vektoren ein, etwa wie in der Abbildung.*



Aufgabe 3   Skalarprodukt und Fläche

Denkt man bei Zahlen an ein Produkt, dann kommt einem – als geometrische Interpretation – spontan ein Rechteck in den Sinn.
Hat das Skalarprodukt auch eine geometrische Interpretation?
Vielleicht auch in Form einer Fläche?

Hinweis *Abbildung!*



Aufgabe 4   Skalarprodukt im 1-dimensionalen

a) Viele Konzepte im Zusammenhang mit Vektoren haben wir vom 1-dimensionalen ins 2-dimensionale übertragen.
Das Skalarprodukt allerdings haben wir erst im „2-dimenionalen" kennengelernt...
Warum? Berechnen Sie einmal ein Skalarprodukt im 1-dimensionalen Fall. Geht das überhaupt?

b) Manchmal wird durcheinandergebracht:

- Multiplikation mit einem Skalar   und
- Skalarprodukt

Erklären Sie den (grossen) Unterschied.

Anhang 3 Ergänzung zum Schwerpunkt

Aufgabe 1

a) Gegeben: A(–4/–3), B(7/–1) und C(3/7). Zeichnen Sie das Dreieck ABC ein und bestimmen Sie *zeichnerisch* den Schwerpunkt S.

b) Überprüfen Sie Ihr Resultat in a), indem Sie den Schwerpunkt *rechnerisch* bestimmen.

c) Bestimmen Sie die Vektorsumme:

$$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}$$

- zeichnerisch
- rechnerisch

Haben Sie für dieses Resultat eine Erklärung?