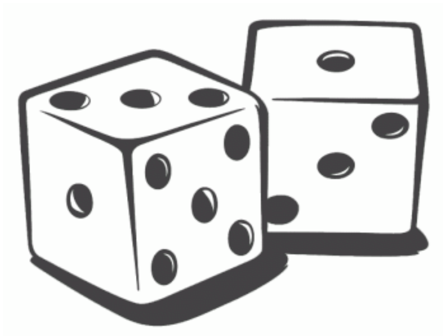
Datum Name



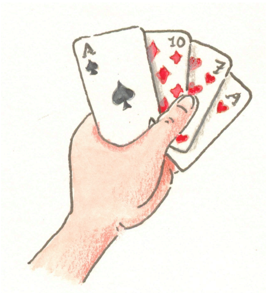
Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm & Pfadregeln,
bedingte Wahrscheinlichkeit,
Mammutbäume (Formel von Bernoulli)

Simea und Viola gehen täglich von Montag bis Freitag in die Schule. Um fit zu bleiben, wählt Simea am Sonntagabend zufällig jeweils 3 Tage aus, an denen sie mit dem Fahrrad statt mit dem Bus zur Schule fährt.
Genauso hält es Viola: sie wählt jedoch zufällig 2 Tage aus, an denen sie mit dem Fahrrad statt mit dem Bus zur Schule fährt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag beide mit dem Fahrrad zur Schule fahren...

(Aufnahmeprüfung, 2019)

Inhalt



1 Einstieg

Eine Familie hat zwei Kinder. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für

- zwei Mädchen?
- zwei Jungen?
- „gemischt"?

Beispiel 1 **Schreibweise**

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei folgenden **Zufallsversuchen**?
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

a) beim Würfeln

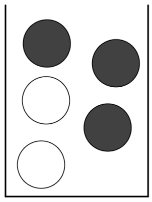
- eine „5" zu werfen?
- eine „Zahl kleiner als 5" zu werfen?

b) ... und

- beim Münzwurf „Kopf" zu werfen?
- beim Ziehen aus nebenstehender Urne „weiss" zu ziehen?

Beachte

Die „Urne" ist ein praktisches Modell für die Simulation von Zufallsversuchen: durch Variieren der Anzahl Kugeln können beliebige Wahrscheinlichkeiten erzeugt werden.



Basisformel (Formel von Laplace, 18 Jh.)

p(Ereignis E) = $\frac{\text{günstige Ergebnisse für E}}{\text{alle möglichen Ergebnisse}} = \frac{g}{m}$, sofern alle Ergebnisse *gleichwahrscheinlich* sind!

Beachte

Diese Definition ist „nicht ohne". Dazu drei Gedanken:

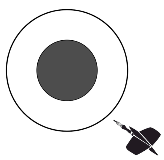
- Was „heisst" eigentlich $p(5) = \frac{1}{6}$? Und: was heisst es nicht?

  Das ist ein *theoretischer* Wert. Er lässt sich als *Prognose* verwenden. Man spricht von einer **Häufigkeitsinterpretation**:

  Hat E (zB. „5") die Wahrscheinlichkeit p (zB. $\frac{1}{6}$), dann tritt E (die „5") in N (zB. 100) Versuchen

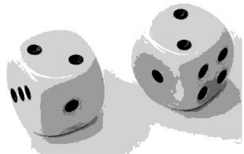
  *ungefähr** N·p-mal ($100\cdot\frac{1}{6} \approx 17$-mal) auf. * „besser" geht nicht: wir sind keine Hellseher!

- Was passiert, wenn g und m „unendlich" gross sind?
  Etwa: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Pfeil ins Schwarze zu treffen?



- Was „ist" eigentlich *gleichwahrscheinlich*? Vgl. dazu die nächste Seite!

Aufgepasst: was „ist“ gleichwahrscheinlich?



Pasch =
beide Würfel zeigen
dieselbe Augenzahl

Sie werfen mit *zwei* Würfeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen „Pasch“?
Was ist richtig an den folgenden Argumentationen, was ist falsch?

Argument 1
Möglich sind folgende Ausgänge:

(1/1)	(1/2)	(1/3)	(1/4)	(1/5)	(1/6)
	(2/2)	(2/3)	(2/4)	(2/5)	(2/6)
		(3/3)	(3/4)	(3/5)	(3/6)
			(4/4)	(4/5)	(4/6)
				(5/5)	(5/6)
					(6/6)

Bei 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 möglichen Ausgängen kommt 6-mal ein Pasch vor. Also ist: p(Pasch) = $\frac{g}{m} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \approx 28\%$.

Argument 2
Möglich sind folgende Ausgänge:

(1/1)	(1/2)	(1/3)	(1/4)	(1/5)	(1/6)
(2/1)	(2/2)	(2/3)	(2/4)	(2/5)	(2/6)
(3/1)	(3/2)	(3/3)	(3/4)	(3/5)	(3/6)
(4/1)	(4/2)	(4/3)	(4/4)	(4/5)	(4/6)
(5/1)	(5/2)	(5/3)	(5/4)	(5/5)	(5/6)
(6/1)	(6/2)	(6/3)	(6/4)	(6/5)	(6/6)

Bei den 36 möglichen Ausgängen kommt 6-mal ein Pasch vor. Also ist: p(Pasch) = $\frac{g}{m} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 17\%$.

Argument 3
Beide Argumente 1 und 2 sind richtig! Es kommt drauf an, ob man die Würfel voneinander unterscheiden kann oder nicht. Haben sie z.B. die gleiche Farbe, ist Argument 1 richtig; haben sie eine verschiedene Farbe, dann ist Argument 2 richtig.

Argument 4
Beim Werfen mit zwei Würfeln gibt es prinzipiell nur zwei mögliche Ausgänge: Entweder zeigen beide Würfel dieselbe Augenzahl (Pasch), oder die beiden Augenzahlen sind verschieden. Also ist: p(Pasch) = $\frac{g}{m} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Argument 5
Beim Werfen mit zwei Würfeln gibt es prinzipiell nur drei mögliche Ausgänge: „keine 6“, „eine 6“, „zwei 6“.

Daher ist p(6-er Pasch) = $\frac{g}{m} = \frac{1}{3}$.

Da dies für bei allen anderen Paschs genau gleich ist, folgt schliesslich: p(Pasch) = $\frac{g}{m} = \frac{1}{3} \approx 33\%$.

Argument 6

Es wurde 20-mal mit zwei Würfeln geworfen und dabei 5-mal einen Pasch erzielt. Also ist: p(Pasch) = $\frac{g}{m} = \frac{5}{20} = 25\%$.

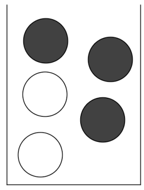
Argument 7

Es wurde 100-mal mit zwei Würfeln geworfen und dabei 19-mal einen Pasch erzielt. Also ist: p(Pasch) = $\frac{g}{m} = \frac{19}{100} = 19\%$.

Argument 8
Statt zwei Würfel zusammen, könnte man die Würfel auch nacheinander werfen. Der erste Würfel kann eine beliebige Augenzahl zeigen, der zweite Wurf muss aber bei einem Pasch mit dem ersten übereinstimmen, d.h. genau eines von sechs möglichen Ergebnissen ist günstig. Also ist: p(Pasch) = $\frac{g}{m} = \frac{1}{6} \approx 17\%$.

2 Wahrscheinlichkeit

Mehrstufige Zufallsversuche, Baumdiagramm & Pfadregeln



Die Urne ist DAS Modell in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Warum?

Beispiel 2 **Kugeln ziehen, Bäume zeichnen**

a) Aus der abgebildeten Urne (!) wird zweimal eine Kugel gezogen.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zweimal „weiss“ gezogen wird?

Beachte *Beim Ziehen ohne ZL ändern sich die Wahrscheinlichkeiten auf der 2.Stufe.*

b) Mündliche Maturaufgabe:
Federer spielt gegen Bucher Tennis auf zwei Gewinnsätze.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Federer gewinnt?

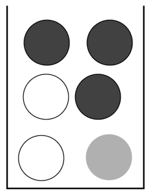
Beachte *Pfade können unterschiedlich lang sein.*

Beispiel 3 **Zwei einfache Beispiele**

a) 2-mal Würfeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen 6-er Pasch?

Beachte *Pfade sinnvoll zusammenfassen. Stellen Sie sich vor, Sie würfeln 4-mal...*

b) 2-mal ziehen aus der Urne.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit zweimal dieselbe Farbe zu ziehen.



Beispiel 4 **Zwei schwierigere Beispiele**

a) 3-mal würfeln. Jemand sagt: ich wette, dass dabei mindestens 1-mal eine „6“ kommt. Wetten Sie?

b) Ein Schütze schiesst 2-mal. In 30% aller Fälle landet er einen „Doppeltreffer“.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen „Doppelnuller“?

Läuft ein Zufallsversuch in „mehreren“ Schritten ab, so spricht man von einem **mehrstufigen Zufallsversuch**.
Ein zentrales Werkzeug für die Analyse eines solchen Zufallsversuchs ist das **Baumdiagramm**.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten geschieht mit Hilfe der sogenannten **Pfadregeln**:

- **multipliziere längs** (eines Pfades bzw. eines Astes)
- **addiere quer** *Warum gelten diese Regeln?*

Wichtig ist die Unterscheidung, ob es sich bei einem mehrstufigen Zufallsversuch um ein „Ziehen“

- **mit Zurücklegen** oder
- **ohne Zurücklegen** handelt. *Warum ist das wichtig?*

Beispiel 5 Würfeln

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim dreimaligen Werfen eines Würfels

a) dreimal die „6“ kommt

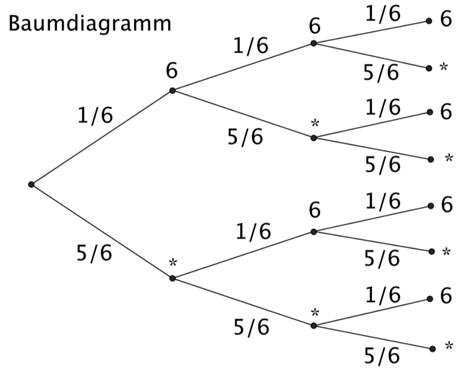
b) genau zweimal die „6“ kommt?

c) nie eine „6“ kommt?

d) nicht dreimal eine „6“ kommt

e) mindestens einmal eine „6“ kommt?*****

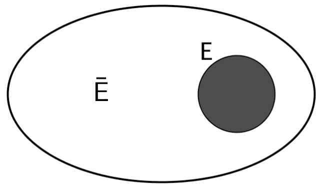
Merke mindestens einmal = nicht keinmal = Gegenereignis von keinmal



***** Sehr nützlich, oft sogar *notwendig*, ist die folgende

Formel für das Gegenereignis

$$p(\bar{E}) = 1 - p(E)$$



Warum gilt diese Formel?
Es ist: $p(E) + p(\bar{E}) = 1$!

Beispiel 6 mindestens

Herr B aus Z spielt Basketball. Er trifft beim Freiwurf mit einer Quote von 20%. Er wirft 10-mal.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

a) mindestens einmal trifft?

b) mindestens zweimal trifft?

Beispiel 7 Hannelore und SVP

a) Hannelore muss sich im Dunkel ankleiden und wühlt in einer Schublade mit 16 Socken; k Socken sind rot, der Rest ist grün. Für welches k beträgt die Chance für gleichfarbige Socken genau 50%?

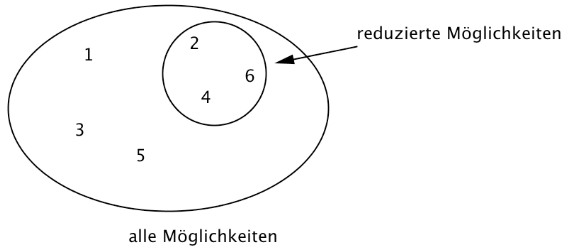
b) Der SVP-Wähleranteil liegt bei rund 30%. Sie befragen 2 Personen nach ihrer politischen Ausrichtung.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide mit der SVP sympathisieren?
Entspricht dieser „mehrstufige“ Vorgang einem Ziehen mit *oder* einem Ziehen ohne Zurücklegen?

Zusatz Geburtstagsparadoxon

23 Personen (also etwa die Grösse einer Klasse!)...
Würden Sie darauf wetten, dass mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ein Würfel wird geworfen...
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 6 fällt, *wenn wir bereits wissen, dass eine gerade Zahl geworfen wurde*?



Bedingte Wahrscheinlichkeit, Schreibweise

p(A/B) = Wahrscheinlichkeit für A, wenn wir *bereits wissen*, dass B eingetreten ist bzw.
Wahrscheinlichkeit für A unter der *Bedingung* B

Die bedingte Wahrscheinlichkeit p(A/B) können wir auffassen als **relative Wahrscheinlichkeit** von A bezüglich der reduzierten Möglichkeiten, die B noch zulässt.

Beispiel 8 **Geschlecht und Rauchen**

Eine Umfrage an der KST ergab:
- der Frauenanteil beträgt 70%.
- bei den Frauen rauchen 20%, bei den Männern 50%.

a) Stellen Sie diese Information dar:
- in einem Baumdiagramm
- in einer Vierfeldertafel (Annahme: 1000 SuS)

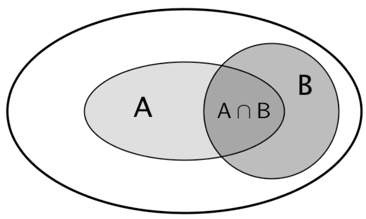
b) Eine Person ging eben (zufällig!) um die Ecke. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- es ein Mann war?
- es eine Nichtraucherin war?
- die Person raucht, wenn man weiss, dass es eine Frau war? (Parfümgeruch)
- es eine Frau ist, wenn man weiss, dass die Person raucht? (Rauchgeruch)

Beachte

Die Strategie beim Lösen solcher Aufgaben:
- *entweder: denjenigen Baum zeichnen, der „möglich“ ist und dann „Formel“ (vgl. unten) anwenden*
- *oder: Vierfelderdiagramm aufstellen und mit „1000“ rechnen.*

Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$



Begründung

Wir wissen:
Die bedingte Wahrscheinlichkeit p(A/B) können wir auffassen als **relative Wahrscheinlichkeit** von A bezüglich der reduzierten Möglichkeiten, die B noch zulässt ...

... also ist:

$$p(A/B) = \frac{\text{Ergebnisse in } A\cap B}{\text{Ergenbisse in B}} = \frac{\frac{\text{Ergebnisse in } A\cap B}{\text{alle Ergebnisse}}}{\frac{\text{Ergenbisse in B}}{\text{alle Ergebnisse}}} = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \quad \text{(Klar?!)}$$

Bemerkung

Alle Wahrscheinlichkeiten auf der 2.Stufe (eines Baumdiagramms) sind bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel 9 Zwei einfache Beispiele

a) 30% an der KST sind blond und <u>*von diesen*</u> 60% blauäugig. Von den Dunkelhaarigen sind es bloss 10%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- eine Person dunkle Haare und blaue Augen hat?
- eine dunkelhaarige Person blaue Augen hat?
- eine blauäugige Person dunkle Haare hat?

Beachte

- *Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Sprache: das ist eine heikle Angelegenheit (vgl. Anhang 1!).*
- *Typisch: der Zähler kommt als Summand im Nenner vor!*

b) 85% aller einkommenden Mails sind Spam. Der Spam-Filter gibt ein Spam-Mail mit 90% Wahrscheinlichkeit in die Spam-Box, ein gutes Mail mit 99% Wahrscheinlichkeit in die Mail-Box. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mail

- in der Spam-Box ein gutes Mail?
- in der Mail-Box trotzdem Spam?

Beispiel 10 Zwei schwierigere Beispiele

a) Seltene Krankheit
Gefährliches Virus in der Bevölkerung: Neuste Schätzungen gehen davon aus, dass 1% der Bevölkerung infiziert sind. Mit einem Test lässt sich das Virus nachweisen.
Die *Sensitivität* (erkennt Kranke „richtig“) des Tests beträgt 95%, die *Spezifität* (erkennt Gesunde „richtig“) beträgt 94%. SIE unterziehen sich dem Test und erhalten die Mitteilung „infiziert“.

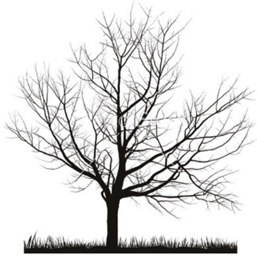
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind SIE tatsächlich infiziert?
- Was überrascht beim Ergebnis? Warum? ***Hinweis*** *Vierfeldertafel mit 10'000*

Beachte

- *Manchmal hört man den Satz: „Bei seltenen Ereignissen sind die meisten Alarme falsche Alarme.“ Jetzt wissen Sie, warum!*
- *Vgl. mit dem Beispiel 9b). Sehen Sie die Ähnlichkeit?*

b) STADI vs ENGE
Eine Umfrage an der KS Stadelhofen ergab, dass sich 10% einen Wechsel an die Kanti Enge vorstellen könnten. Zudem ergab die Umfrage, dass 80% mit Ihren Lehrern zufrieden sind; von diesen wäre es für 5% trotzdem vorstellbar an die Kanti Enge zu wechseln. Sie treffen Hannelore, die sich vorstellen könnte an die Kanti Enge zu wechseln.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie mit ihren Lehrern unzufrieden?

Mammutbäume



... sind sehr grosse Bäume. Sie zu zeichnen wäre schwierig. Es ist besser zu *denken* ...

Beispiel 11 Standard

Sie werfen 5-mal einen Würfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die „6“ genau 2-mal auf?

Mammutbäume mit Zurücklegen

Formel von Bernoulli (Binomialer Baum)

Die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p genau k Erfolge zu erzielen, ist:

$$P(\text{genau k Erfolge in n Versuchen}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Beachte

- *Bei der Formel von Bernoulli handelt sich um ein Ziehen mit Zurücklegen: die Erfolgswahrscheinlichkeit p bleibt in jedem Versuch unverändert.*
- *Das Herleiten/Begründen dieser Formel ist Pflicht!*

Beispiel 12 Zwei einfache Beispiele

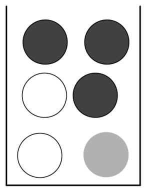
a) Es wird 8-mal gewürfelt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei genau 5 Würfen eine Zahl kleiner als 3 erscheint?

b) Ca. 12% der Bevölkerung sind Linkshänder. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 20 SuS genau 2 Linkshänder sind?

Beispiel 13 Zwei schwierigere Beispiele

a) Es wird 8-mal gewürfelt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 3-mal eine „6“ auftritt?

b) Polynomialer Baum
Eine Urne beinhaltet: 3 schwarze, 2 weisse und 1 rosarote Kugel.
Es wird 10-mal eine Kugel gezogen mit ZL.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 5-mal eine schwarze, 3-mal eine weisse und 2-mal eine rosarote Kugel gezogen wird?



Beispiel 14 Evergreen: Die„mindestens Aufgabe“ (Bestimmung der Anzahl Versuche)

Wie oft muss einen Würfel (mindestens) werfen, dass mit (mindestens) 95% mindestens einmal die „6“ kommt?

Lösung

in eine Gleichung übersetzen	*p(mindestens einmal „6“ bei n Würfen)*	*= 0.95*
Gegenereignis anwenden (zur Vereinfachung!)	*1 – p(nie „6“ bei n Würfen)*	*= 0.95*
Exponentialgleichung lösen	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$	*= 0.95*
(mit Logarithmus!)	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	*= 0.05*
	n	$= \log_{5/6} 0.05 \approx 16.43$

Ich muss dazu mindestens 17-mal werfen! (beachte: aufrunden!)

Beachte

die Aufgabe ist ein „Evergreen“ und kommt in jedem Buch vor und jeder Maturprüfung ☺.
Sie heisst auch die ***mindestens Aufgabe****.*
Immer, wenn Sie mindestens lesen, müssen Sie auch an das Prinzip Gegenereignis denken!

Mammutbäume ohne Zurücklegen

Beispiel 15 Lehrer & Jassen

a) Ein Lehrer gibt vor einer Prüfung einen Fragekatalog mit 50 Fragen heraus, von denen dann fünf Fragen an der Prüfung kommen. Sie bereiten sich auf 10 Fragen vor.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten Sie genau 2 vorbereitete Fragen?

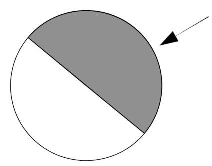
b) Jassen! Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau 2 Under in den Händen halten?

Lösung zu b)

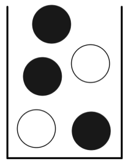
- *Die Wahrscheinlichkeit für einen „guten“ Pfad beträgt*
  $p(UU\bar{U}\bar{U}\bar{U}\bar{U}\bar{U}\bar{U}\bar{U}) = \frac{4}{36}\cdot\frac{3}{35}\cdot\frac{32}{34}\cdot\frac{31}{33}\cdot\frac{30}{32}\cdot\frac{29}{31}\cdot\frac{28}{30}\cdot\frac{27}{29}\cdot\frac{26}{28} = \frac{4\cdot 3\cdot 27\cdot 26}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33} = 0.006$
  Es gibt $\binom{9}{2}$ *verschiedene Pfade. Also gilt: p(genau 2 Under) =* $\binom{9}{2}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 27\cdot 26}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33} = 0.215$
- *Alternative rein über Kombinatorik: p(genau 2 Under) =* $\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{32}{7}}{\binom{36}{9}} = 0.215$

Zusatz Was jetzt?

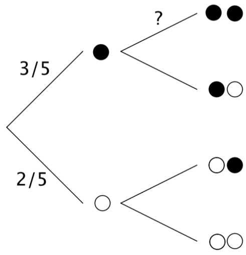
Das Glücksrad wir gedreht: Wer zuerst „auf weiss dreht“, gewinnt...
Sie spielen gegen einen Gegner.
Wollen Sie beginnen? Oder spielt das keine Rolle?



3 Zusammenfassung



Warum spielt die „Urne“ eine so wichtige Rolle?



Zusammenfassung

Ergänzen Sie den Lückentext!

Baumdiagramm ; $n \cdot p$; $p = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$; $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$; *ohne* ; *Pfadregeln l* ; $p = \dfrac{g}{m}$

Ein **Zufallsversuch** ist ein „Vorgang“ bzw. ein Experiment, bei dem der Ausgang vom Zufall abhängt.
Sind alle Ausgänge gleichwahrscheinlich, dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit mit der „**Formel von Laplace**“ bestimmen:

____

Eine Wahrscheinlichkeit p ist ein theoretischer Wert. Er lässt sich als *Prognose* verwenden.
Es gilt die **Häufigkeitsinterpretation**: Hat ein Ergebnis E die Wahrscheinlichkeit p, dann kann man erwarten, dass bei n Versuchen dieses Ergebnis ungefähr

_________ auftritt.

Bei **mehrstufigen Zufallsversuchen** werden Zufallsversuche nacheinander bzw. miteinander ausgeführt.

Ein _______________________________________ erleichtert einem den Überblick.

Das Berechnen der Wahrscheinlichkeiten erfolgt mit Hilfe der _______________________________________.

Wird derselbe Versuch mehrmals nacheinander ausgeführt, muss überlegt werden, ob es sich um ein

- Ziehen **mit Zurücklegen** oder um ein
- Ziehen **ohne Zurücklegen** handelt.

Beim Ziehen ______________ Zurücklegen verändern sich die Wahrscheinlichkeiten auf den folgenden Stufen.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen wir mit Hilfe der Formel

____

bzw. mit Hilfe eines Vierfelderdiagramms.
Bei mehrstufigen Zufallsversuchen sind alle Wahrscheinlichkeiten auf der 2.Stufe bedingte Wahrscheinlichkeiten (nämlich unter der Bedingung „1. Stufe“).

Bei sehr vielen Wiederholungen eines Zufallsversuchs (Mammutbaum) spielt die **Formel von Bernoulli** eine wichtige Rolle.
Die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p genau k Erfolge zu erzielen, ist:

____

„Mindestens“-Aufgaben löst man mit Hilfe des Gegenereignisses (mindestens 1-mal = *nicht* keinmal).

Und zum Schluss:
Die Wahrscheinlichkeits*rechnung* befasst sich *nicht* damit, wie einzelne Wahrscheinlichkeiten *zustande kommen*, sondern nur, wie man mit diesen Wahrscheinlichkeiten *rechnet*.

Grundaufgabe 1 Ziehen mit / ohne Zurücklegen

Ziehen aus einer Urne. Machen sie ein Beispiel. Unterscheiden Sie zwischen mit / ohne Zurücklegen.

Grundaufgabe 2 bedingte Wahrscheinlichkeit

Was ist das? Machen sie ein Beispiel!

Grundaufgabe 3 „Mammutbäume“

a) Sie werfen einen Würfel n-mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass k-mal die „6“ kommt?

b) Was versteht man unter der „mindestens-Aufgabe“? Machen sie ein Beispiel!

Hausaufgaben machen oder nicht ... ein Schulmorgen in Ihrer Klasse!

a) Im Deutsch müssen stets zwei von Ihnen Auskunft über die Lektüre geben.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei

- Sie und Ihre beste Kollegin drankommen?
- Ihre beste Kollegin, aber nicht Sie drankommen (Glück gehabt!)?

b) In Geographie machen 20% die Hausaufgaben. Wie viele muss der Geographielehrer mindestens aufrufen, bis es mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit jemanden darunter hat, der sich vorbereitet hat?

c) Die Aufgabe im Französisch war Vokabeln lernen. Und jetzt gibt es ein Blitzex!
Wenn man die Vokabeln gelernt hat, schneidet man in 90% aller Fälle in einem solchen Blitzex gut ab. Andererseits kommt es in 5% aller Fälle vor, dass man gut abschneidet, auch wenn man die Vokabeln nicht gelernt hat. Im Französisch lernen jeweils 75% der Klasse die Vokabeln.
Die Lehrerin macht sich zu Hause an die Korrektur und zieht das erste Blitzex aus dem Stapel.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ergebnis gut?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hatte sich dieser Studierende auch gut vorbereitet?

d) Anstatt in die verdiente Pause geht's ab in die Aula, wo der Rektorin ein Feedback über Hausaufgabendisziplin bei den 4. Klassen machen will ...
Ihrem Einwand – bei ehrlicher Antwort vielleicht negative Konsequenzen tragen zu müssen – begegnet sie wie folgt: jede Schülerin und jeder Schüler soll vor der Antwort verdeckt würfeln. Falls die Augenzahl „6“ fällt, muss die Frage – *„Machen Sie die Hausaufgaben regelmässig?“* - mit „JA“ beantwortet werden; falls die „1“ oder die „2“ fällt, muss mit „NEIN“ und bei den übrigen Augen-zahlen soll wahrheitsgetreu geantwortet werden. Als Resultat ergeben sich 45% „JA“-Antworten.
Wie viel Prozent aller Studierenden der 4. Klassen machen demnach regelmässig Hausaufgaben?

Anhang 1 Problematik: (Bedingte) Wahrscheinlichkeiten und Sprache

Geben Sie die jeweilige Wahrscheinlichkeit an: p(A), p(A ∩ B), p(A/B) etc.

Sprache 1

Es gibt: Männer M, Frauen F, Raucher R und Nichtraucher $\bar{R}$
Die Wahrscheinlichkeit, dass

- es ein Mann ist und nicht raucht: ________________________
- es ein Frau ist unter der Bedingung, dass sie raucht: ________________________
- es eine Nichtraucherin ist: ________________________
- die Person, die raucht, ein Mann ist: ________________________
- es eine Frau ist , die raucht: ________________________

Sprache 2

Es gibt: Hersteller A, Hersteller B, Hersteller C, Lieferung in Ordnung L, Lieferung defekt $\bar{L}$
Die Wahrscheinlichkeit, dass

- die Lieferung in Ordnung ist und vom Hersteller A ist: ________________________
- eine Lieferung defekt ist, wenn man weiss, dass sie von A: ________________________
- eine Lieferung vom Hersteller C ist: ________________________
- eine defekte Lieferung vom Hersteller B stammt: ________________________

Sprache 3

Es gibt: Urne U1, Urne U2, rote Kugeln r und weisse Kugeln w
Die Wahrscheinlichkeit, dass

- es eine rote Kugel ist: ________________________
- die Kugel aus U2 ist, wenn sie weiss ist: ________________________
- die weisse Kugel aus U2 stammt: ________________________
- eine weisse Kugel aus U1 gezogen wird: ________________________

Sprache 4

Es gibt: Schweizer S, Ausländer A, Gewaltbereite G, Friedliche F
Die Wahrscheinlichkeit, dass

- die Person gewaltbereit und Schweizer ist: ________________________
- es ein Ausländer ist, wenn er gewaltbereit ist: ________________________
- es sich um einen friedlichen Ausländer handelt: ________________________
- ein Schweizer, der friedlich ist: ________________________

Anhang 2 Heikle Fragen

Haben Sie schon einmal ... (gespickt, gekifft) ? Wie viele Personen in Ihrer Klasse haben schon einmal ...

> Die **Randomized-Response-Technik** (dt. Randomisierte-Antwort-Technik) ist eine Methode der Psychologie und der Sozialwissenschaften, bestimmte Verfälschungen von Interviewantworten zu *verringern*. Bei manchen Befragungsthemen können ehrliche Antworten für die befragte Person peinlich sein, oder durch den Effekt der sozialen Erwünschtheit verfälscht werden.
> Dann bietet die Randomized-Response-Technik eine Möglichkeit, durch Anonymisierung das wahre Ergebnis der Befragung zu schätzen. Bevor die „sensitive Frage“ beantwortet wird, entscheidet ein Zufallsgenerator, ob die befragte Person ehrlich antworten soll oder mit “Ja”. Der Interviewer weiß nicht, was der Zufallsgenerator entschieden hat, wodurch die “Ja”-Antwort, also das Eingeständnis der peinlichen Eigenschaft, geschützt wird.

Dazu

- Wie lässt sich eine RR–Technik in Ihrer Klasse durchführen?
- Garantiert sie eine Anonymisierung?
- Führen Sie eine Umfrage durch. Wie gross kann der Anteil „JA“-Sager werden?
- Warum handelt es sich bloss um einen Schätzwert?
- Ein Schüler sagt „JA“. Die RR–Technik schützt ihn insofern, als dass man nicht mit Sicherheit sagen kann, ob er kifft oder nicht... Aber wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn er „JA“ sagt, schon einmal gekifft hat? Und: was heisst das jetzt?

Anhang 3 Geschwisterproblem

Eine Familie hat zwei Kinder. So weit, so gut.

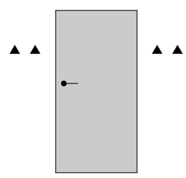
Kinder 1

Was ist wahrscheinlicher?
- Die Familie hat zwei Mädchen.
- Die Familie hat ein Mädchen und ein Knabe.

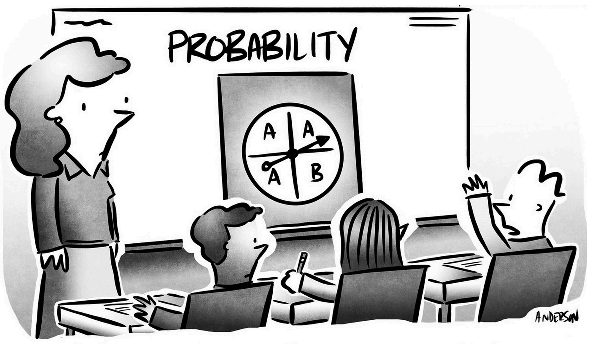
Kinder 2

Sie sitzen in der Stube und es kommt ein Kind herein.
- Es ist ein Mädchen und das Ältere der beiden Kinder.
  Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind auch ein Mädchen ist?
- Es ist ein Mädchen.
  Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind auch ein Mädchen ist?

Kinder 3



Links und rechts von einer Tür sind zwei Kleiderhaken angebracht. Die zwei Kinder hängen ihre Jacken zufällig (aber an verschiedenen) Haken auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich die beiden Jacken auf verschiedenen Seiten der Tür?



"I know mathematically that A is more likely,
but I gotta say, I feel like B wants it more."