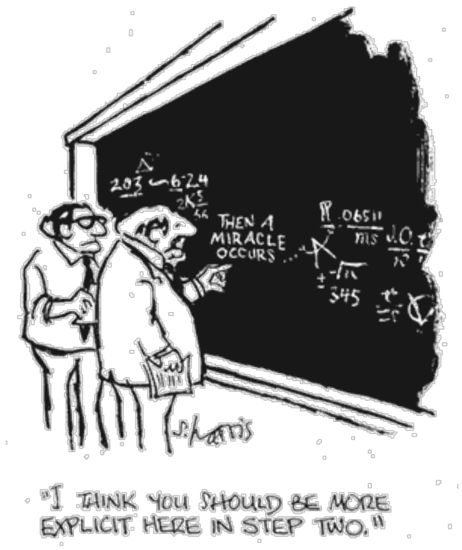
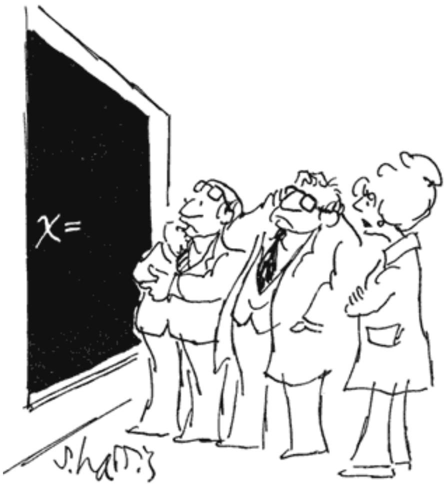
Datum Name



Beweisen

Direkter Beweis
Indirekter Beweis
Vollständige Induktion

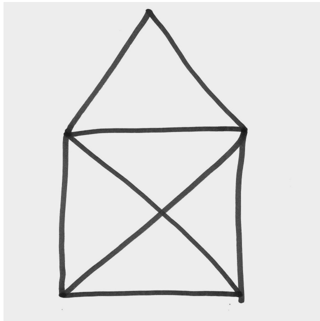

x =
S.Harris

Inhalt

„Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist,
wird nie ein vollkommener Mathematiker sein."
Karl Weierstraß

Einstieg

Einstieg 1 Haus von Nikolaus



Abgebildet ist das Haus von Nikolaus.

a) Können Sie es in einem Strich zeichnen?

b) Kann man von einer *beliebigen* Ecke aus starten?

c) Kann man es auch so zeichnen, dass man am Schluss wieder beim Ausgangspunkt ist?

Einstieg 2 1 = 2 ????

Es sei:

$$
\begin{aligned}
& & a &= b \\
&\Rightarrow & a^2 &= ab \\
&\Rightarrow & a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\
&\Rightarrow & (a+b)(a-b) &= b(a-b) \\
&\Rightarrow & a + b &= b \\
&\Rightarrow & a + a &= a \\
&\Rightarrow & 2a &= a \\
&\Rightarrow & 2 &= 1
\end{aligned}
$$

Hat es hier einen Fehler? Wenn ja, wo hat er sich versteckt?

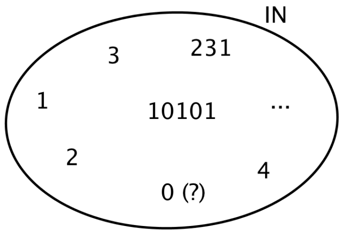
Einstieg 3 gerade Zahlen

Behauptung: Wenn n eine gerade Zahl ist, dann ist auch n^2 eine gerade Zahl!

Beweis: ... stimmt das überhaupt?
Und wenn ja, warum?

„Dass es mir – oder Allen – so scheint, daraus folgt nicht, dass es so ist.“
Ludwig Wittgenstein

Hinein in die Allgemeinheit... , sei n ∈ IN...



Sei n eine *beliebige* natürliche Zahl, also: sei n ∈ IN.

Aufgabe 1 Vorgänger, Nachfolger

Sei n eine *beliebige* natürliche Zahl, also: sei n ∈ IN. Beschreiben Sie mit Hilfe von n

a) den Vorgänger:

b) den Nachfolger:

c) die zwei Vorgänger von n + 4:

d) die drei Nachfolger von n – 5:

e) das Doppelte:

f) das Zehnfache des Vorgängers:

g) die Summe der beiden Nachfolger:

h) das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger:

Aufgabe 2 gerade, ungerade natürliche Zahl

Beschreiben Sie mit Hilfe von n ∈ IN

- eine gerade (natürliche) Zahl m:
- eine ungerade (natürliche) Zahl m:

a) die Summe zweier aufeinander folgender, ungerader Zahlen:

b) das Produkt einer geraden Zahl mit deren Nachfolger:

Aufgabe 3 Teilbarkeit, (Prim-)faktorzerlegung

Wann ist eine Zahl durch 3 teilbar? Wann ist eine durch 4 teilbar?

a) Geben Sie *eine* Faktorzerlegung an von

24 =

3330 =

b) Geben Sie *die* Primfaktorzerlegung an von

24 =

3330 =

c) Sei m durch 5 teilbar. Dann lässt sich m darstellen/schreiben als m =

d) Welche der folgenden Zahlen m ist durch 6 teilbar? (Sei n ∈ IN und k ∈ IN.)

m = 6n

m = 3n

m = 12k

m = 6n + 2·3k

Diskutieren Sie die Begründungen.

Hänsel, Gretel und die Hexe behaupten:

Die Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen ist durch 3 teilbar.

Hänsel begründet: $4 + 5 + 6 = 15$ *und 15 ist durch 3 teilbar!*

Gretel begründet: $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$

Die Hexe begründet: $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$

Beweise über Zahlen muss man allgemein unter Verwendung von Variablen beweisen.

Aber: Zahlenbeispiele geben einem ein Gefühl oder bringen ein Gegenbeispiel.

Gegenbeispiel = Beweis, dass etwas nicht so ist.

Aufgabe 4

Behauptung: *Die Summe dreier aufeinander folgenden, geraden Zahlen ist durch 6 teilbar.*

Machen Sie ein Zahlenbeispiel. *Beweisen* Sie dann die Behauptung.

Aufgabe 5

Behauptung: *Die Summe zweier aufeinander folgender Zahlen ist eine ungerade Zahl.*

Machen Sie ein Zahlenbeispiel. *Beweisen* Sie dann die Behauptung.

Aufgabe 6

Zeigen Sie allgemein, dass gilt:

a)

$1 \cdot 2 - 1 = 1^2$

$2 \cdot 3 - 2 = 2^2$

$3 \cdot 4 - 3 = 3^2$

etc.

b)

$1 \cdot 3 = 2^2 - 1$

$3 \cdot 5 = 4^2 - 1$

$5 \cdot 7 = 6^2 - 1$

etc.

Aufgabe 7

a) Bilden Sie das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl und geben Sie dann den Vorgänger an. Beweisen Sie, dass dieser Vorgänger durch 4 teilbar ist.

b) Bilden Sie das Produkt aus einer natürlichen Zahl und ihrer übernächsten Zahl. Geben Sie dann den Nachfolger dieser Zahl an und beweisen Sie, dass dieser Nachfolger eine Quadratzahl ist.

c) Ist der Nachfolger des Produktes zweier aufeinander folgender ungerader Zahlen eine Quadratzahl?

Aufgabe 8

Begründen oder widerlegen Sie.

a) *Die Summe von fünf aufeinander folgenden Zahlen ist durch 5 teilbar.*

b) *Die Summe von vier aufeinander folgenden Zahlen ist durch 4 teilbar.*

c*) Formulieren Sie eine Verallgemeinerung der Aussagen a) und b) mit Hilfe einer Variable k. Für welche k ist die sich ergebende Behauptung richtig?

Beweistechnik I, der direkte Beweis

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen direkt.

Aufgabe 9

a) *Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl ist gerade.*

b) *Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade.*

Aufgabe 10

a) *Der Term* $n^4 - 2n^3 + n^2$ *ist* $\forall n \in \mathbb{N}$ *durch 4 teilbar.*

b) *Der Term* $n^3 - n$ *ist* $\forall n \in \mathbb{N}$ *durch 6 teilbar.*

Tipp zu **b)**: Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 *und* durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 11

Wenn zwei Zahlen a und b durch n teilbar sind, dann ist auch a + b durch n teilbar.

Aufgabe 12

a) *Das Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen ist eine gerade Zahl.*

b) *Ist die Summe von vier natürlichen Zahlen ungerade, dann ist ihr Produkt gerade.*

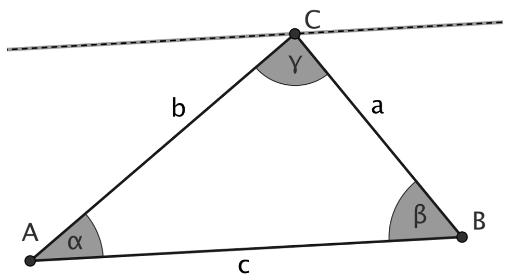
Aufgabe 13

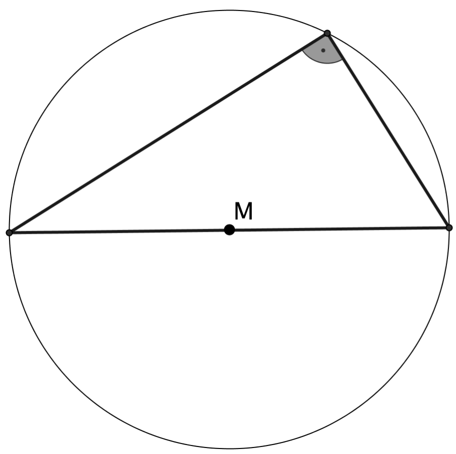
Sie kennen das Potenzgesetz: $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$.
Beweisen Sie es!

Aufgabe 14

Die Winkelsumme in einem (ebenen) Dreieck beträgt 180°.

Tipp: Betrachten Sie die Skizze nebenan.
Gestrichelt eingezeichnet ist eine Parallele zur Seite c durch den Punkt C.





Aufgabe 15

Betrachten Sie die Skizze nebenan.

Wie lautet der entsprechende Satz aus der Geometrie? Beweisen Sie ihn!

Tipp: Ziehen Sie eine „Hilfslinie" von M zur rechtwinkligen „Ecke".

Indirekter Beweis, was ist das?

Indirekt 1 Gerichtsverhandlung

„Ich werde Ihnen beweisen, dass mein Mandant unschuldig ist und nicht den Tresor der Kantonsschule Stadelhofen geknackt hat", beginnt der Anwalt des Angeklagten seine Argumentation. „Nehmen wir an, mein Mandant wäre schuldig. Dann hätte er um 21.55 Uhr den Alarm ausgelöst. Er hätte dann fluchtartig den Tatort verlassen und wäre mit seinem Auto vom Stadelhofen nach Oerlikon gefahren. Diese Strecke führt mitten durch die Stadt für die mit einer Mindestfahrzeit von 20 Minuten zu rechnen ist. Er hätte damit frühestens um 22.15 Uhr im Restaurant „Sternen Oerlikon" sein können. Dies steht aber im Widerspruch zur beeidigten Aussage des Wirtes, dass mein Mandant am fraglichen Tag um 22.00 in seinem Restaurant einen Coupe Dänemark gegessen hat. Damit komme ich zum Schluss, dass mein Mandant nicht der Täter gewesen sein kann, sondern unschuldig ist."

Nachdem der Anwalt seine Beweisführung beendet hat, unterhalten sich zwei aufmerksame Prozessbeobachter über das, was sie gehört haben.

„Irgendwie war das völlig unlogisch, was der Anwalt vorgetragen hat. Erst behauptet er, sein Mandant hätte den Alarm ausgelöst und am Ende kommt heraus, dass er es nicht gewesen sein kann." „Dass es unlogisch ist, stimmt so nicht" erwidert der andere, „es handelt sich um eine ganz geschickte Beweisstrategie."

Welcher der beiden Prozessbeobachter hat Recht?

Wie wurde argumentiert?

Der Anwalt verwendet eine bestimmte Argumentationsstrategie. In der Mathematik nennt man das einen **indirekten Beweis**. Dieser enthält folgende Beweisschritte

I. Ich formuliere die Behauptung
II. Ich nehme an, das Gegenteil der Behauptung wäre richtig.
III. Ich ziehe aus der Annahme richtige Folgerungen
IV. Ich führe die Folgerungen zu einem Widerspruch.
V. Ich ziehe die Schlussfolgerung, dass die Annahme dadurch widerlegt und die Behauptung bewiesen ist.

Lesen Sie den Text noch einmal durch und markieren Sie farbig:

- die Behauptung GRÜN
- die Annahme ROT
- die Folgerungen BLAU
- den Widerspruch ROT
- die Schlussfolgerung GRÜN

„Alles was lediglich wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch."
Rene Descartes

Indirekt 2 Schüler argumentiert indirekt

Situation:
Der Klassenlehrer beschuldigt einen Schüler, dass er es war, der vor dem Hauptgebäude eine Zigarette geraucht und dann achtlos zu Boden geworfen hat.

Der Schüler will mit der gleichen Beweisstrategie seine Unschuld zeigen. Seine Argumente stehen – ungeordnet – in den Kästchen unten.
Bringen Sie sie in die richtige Reihenfolge, indem Sie sie nummerieren.
Markieren Sie die 5 Schritte des indirekten Beweises wieder farbig, so wie auf Seite 7.

Nehmen wir mal an, ich wäre es gewesen...

Ich stehe aber nicht im Klassenbuch.

Also kann ich es auch nicht gewesen sein.

Das war ich nicht, sagt der Schüler.

Nach Geographie hatten wir aber Mathematik und zwar im Zeltweg. Selbst wenn ich vom Hauptgebäude zum Zeltweg renne, braucht es mindestens 5 Minuten.

Und der Herr Bucher, der war wie immer überpünktlich und trägt jeden ins Klassenbuch ein, der nach ihm kommt.

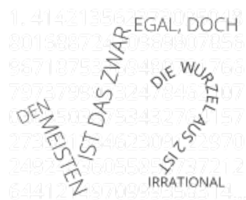
Wir hatten vorher Geographie und ich musste noch die Tafel putzen. Die Lehrerin hat gesehen, dass ich der Letzte war, der das Zimmer verlassen hat und zwar erst nach dem Klingeln zur Pause...

Indirekt 3 Ist $\sqrt{2}$ rational oder nicht?

Jetzt geht es darum zu beweisen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Dieser Beweis ist das Paradebeispiel eines indirekten Beweises!

Merken Sie sich diesen Beweis – bewundern Sie seine Eleganz!



Zum Nachdenken:
Die Irrationalität von 2 heisst nichts anderes, als dass man die Diagonale im Einheitsquadrat nie (!) genau wird messen können.

Beweistechnik II, der indirekte Beweis (Widerspruchsbeweis)

Diese Beweisart lässt sich z.B. dann einsetzen, wenn man beweisen will, dass es etwas nicht gibt.
Man nimmt dann das Gegenteil an, also Existenz (!), und führt diese Annahme zu einem Widerspruch.
Als Beispiel aus dem Alltag dient die Gerichtsverhandlung:
Der Verteidiger will beweisen, dass sein Mandant nicht schuldig ist. Dazu nimmt er an, er wäre es und leitet daraus einen Widerspruchsbeweis ab.

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen indirekt.

Aufgabe 16

Es gibt keine grösste natürliche Zahl.

Aufgabe 17

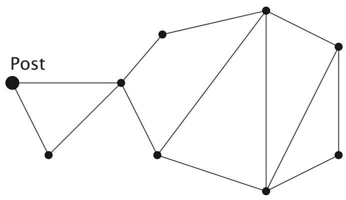
2 ist die einzige gerade Primzahl. (Oder: Es gibt keine gerade Primzahl ausser 2.)

Aufgabe 18

$\sqrt{3}$ *ist irrational (Oder:* $\sqrt{3}$ *ist nicht rational.)*

Aufgabe 19

Abgebildet ist das Strassennetz. Der Postbote möchte eine Route so planen, dass er keine Strasse zweimal ablaufen muss und zum Schluss wieder bei der Post ist. Beweisen Sie ihm: *Es gibt keine solche Route.*



Aufgabe 20

Wenn n^2 *eine gerade Zahl ist, dann ist n eine gerade Zahl.*

Aufgabe 21

Beweisen Sie das *Schubfachprinzip*! (Siehe nächste Seite)
auch: Taubenschlagprinzip (pigeon hole principle)

Das Gegenbeispiel

Das Gegenbeispiel ist eine besonders einfache Methode, wenn man zeigen will, dass eine Vermutung falsch ist.
Merke: *ein* Gegenbeispiel genügt, um eine (ganze) Vermutung zu Fall zu bringen!
Das Finden eines Gegenbeispiels ist eine *spezielle Form eines indirekten Beweises*. Inwiefern?

Aufgabe 22

Der Term $n^2 + n + 41$ liefert für viele Einsetzungen von n eine Primzahl.
Versuchen Sie es: setzen Sie n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, n = 5 etc. ein und überprüfen Sie!

Man könnte also vermuten: *Der Term* $n^2 + n + 41$ *liefert* $\forall n \in \mathbb{N}$ *eine Primzahl.*
Beweisen Sie aber, indem Sie ein Gegenbeispiel finden: *Diese Vermutung ist falsch.*

Das Schubfachprinzip (Taubenschlagprinzip = pigeon hole principle)

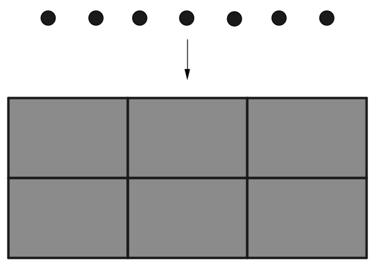
Betrachten wir zuerst die folgenden Aussagen:

- Wählen wir drei Felder eines Schachbrettes aus, so haben sicher zwei die gleiche Farbe.
- Von 11 natürlichen Zahlen enden mindestens zwei auf die gleiche Ziffer.
- Von 13 Personen haben mindestens zwei im gleichen Monat Geburtstag

Die Richtigkeit dieser Aussagen ist leicht einzusehen. Was steckt jedoch für eine Argumentation hinter diesen Aussagen?
Zum einen haben wir eine (endliche) Menge von Objekten (drei Schachfelder, 11 Zahlen, 13 Personen), denen wir eine (endliche) Menge von Eigenschaften zuweisen (2 Farben, 10 Ziffern, 12 Monate).
Existieren nun mehr Objekte als Eigenschaften und wird jedem Objekt eine Eigenschaft zugewiesen, so muss eine Eigenschaft mindestens von zwei Objekten angenommen werden!

Allgemein ist diese Aussage unter dem Namen **Schubfachprinzip** bekannt. Es lautet

Verteilt man z.B. 7 Perlen auf 6 Schubladen, dann gibt es sicher eine Schublade mit zwei oder mehr Perlen.



Oder allgemein:

Verteilt man n + 1 Perlen auf n Schubfächer, dann gibt es sicher ein Schubfächer mit zwei oder mehr Perlen.

Diese Aussage leuchtet unmittelbar ein. Trotzdem muss man sie beweisen. Dies geschieht *indirekt* (Aufgabe 21).

Das Schubfachprinzip wirkt vollkommen trivial und macht keinerlei Aufhebens von sich. Aber tatsächlich kann man mit ihm ganz verschiedene Aussagen beweisen.
Um das Schubfachprinzips zur Anwendung zu bringen, muss man entscheiden, *was die Schubfächer, und was die Perlen* sein sollen. Darin besteht die Kunst.

Beweisen Sie folgende Aussagen mit Hilfe des Schubfachprinzips.

Schubfach 1

a) *Von 4 Personen gibt es mindestens zwei, die sich denselben Ausgang des Spiels Italien – Schweiz wünschen.*
(Achtung: Welches sind die Schubfächer, welches die Perlen?)

b) *Es gibt mindestens zwei Schweizer, welche die gleiche Anzahl Haare auf dem Kopf haben.*

Schubfach 2

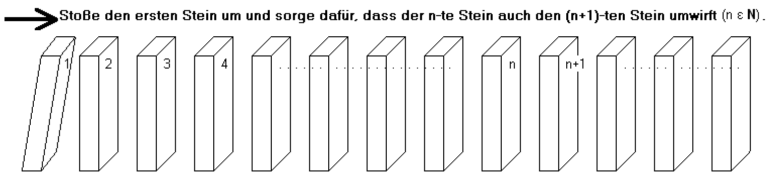
Wenn man 10 Punkte in ein Quadrat der Seitenlänge 3 einzeichnet, dann gibt es mindestens zwei, deren Abstand $\leq \sqrt{2}$ *ist.*

Tipp Unterteilen Sie das Quadrat in 9 Teilquadrate.

Schubfach 3

In einer Gruppe mit n Personen gibt es mindestens zwei, welche in dieser Gruppe die gleiche Anzahl Freunde besitzen.

Beweistechnik III,
die vollständige Induktion



Einstieg

Finden Sie eine „Formel“ für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Beweisen Sie diese!

Induktionsprinzip	**Dominoprinzip**
Ziel: Die Gültigkeit einer Behauptung soll für für *alle* natürlichen Zahlen bewiesen werden.	Ziel: *Alle* Steine einer Reihe von Dominosteinen soll zum Umfallen gebracht werden.
1. Verankerung (Induktionsanfang)	**1. Start**
Man zeigt, dass die Behauptung für die natürliche Zahl n = 1 stimmt.*	Der erste Stein wird umgestossen.
2. Vererbung (Induktionsschritt)	**2. Kettenreaktion**
Es wird angenommen, dass die Behauptung für eine feste natürliche Zahl n gilt. Es wird gezeigt, dass die Behauptung unter dieser Voraussetzung auch für die *nachfolgende* natürliche Zahl n + 1 gilt.	Jeder fallende Stein bewirkt das Umfallen seines direkten Nachfolgers. Er vererbt sozusagen seine Eigenschaft – umzufallen! – auf seinen Nachfolger in der Reihe
3. Schlussfolgerung	**3. Schlussfolgerung**
Aus dem Verbund von Verankerung *und* Vererbung folgt, dass die Behauptung tatsächlich für *alle* natürlichen Zahlen gilt.	Es entsteht eine vom ersten Stein ausgehende Kettenreaktion, die sich durch die gesamte Reihe fortpflanzt, ohne je zu stoppen.

Summenformeln

Aufgabe 23

Wie lautet die Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen?
Beweisen Sie diese Formel mit Hilfe der *vollständigen Induktion*.

Aufgabe 24

a) Zeigen Sie: $\forall n \in IN$ *gilt:* $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$.

b) Zeigen Sie: $\forall n \in IN$ *gilt:* $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Teilbarkeit

Aufgabe 25

a) Zeigen Sie: $\forall n \in IN$ *gilt:* $9^n - 1$ *ist durch 8 teilbar.*

b) Zeigen Sie: $\forall n \in IN$ *gilt:* $12^n - 7^n$ ist durch 5 teilbar.

Aufgabe 26 (Kommt Ihnen die folgende Behauptung bekannt vor?)

Zeigen Sie: *Der Term* $n^3 - n$ *ist* $\forall n \in IN$ *durch 6 teilbar.*

In der Mathematik gibt es keine Autoritäten.
Das einzige Argument für die Wahrheit ist der Beweis.

Zusammenfassung

Beweisstrategien

Direkter Beweis	Zeige, dass die Behauptung stimmt, indem du mit Hilfe der Voraussetzung oder bekannter Tatsachen Folgerungen ausführst.
Indirekter Beweis	Nimm an, dass die zu beweisende Behauptung nicht stimmt und zeige, dass sich dann ein Widerspruch ergibt. (Spezialfall: Finden eines Gegenbeispiels.)
Vollständige Induktion	Soll bewiesen werden, dass eine Behauptung für alle natürlichen Zahlen n stimmt, genügt es zu zeigen, dass sie 1. für n = 1 *und* 2. für jeden Nachfolger stimmt. Dazu nimmt man an, sie gelte für ein n und zeigt, dass sie dann auch für n + 1 stimmen muss.

Tipp

- Der indirekte Beweis lässt sich z.B. dann einsetzen, wenn man beweisen will, dass es etwas nicht gibt. Man nimmt dann das Gegenteil an, also Existenz (!), und führt diese Annahme zu einem Widerspruch.
- Die vollständige Induktion lässt sich z.B. dann einsetzen, wenn man beweisen will, dass etwas für alle natürlichen Zahlen, also $\forall\ n \in \mathbb{N}$, gilt.

Bemerkung

- Sie sollten zu jeder Beweisart zwei Beispiele kennen!
- Beweisen können nicht nur Genies! Man kann *beweisen lernen*, wie vieles andere auch.
- Ein Beweis muss zuerst einen selbst überzeugen; erst dann besteht die Möglichkeit, dass er auch andere überzeugen kann.
- Es gibt nicht *den* Beweis. Oft lassen sich Behauptungen auch auf verschiedene Arten beweisen, also auch mit verschiedenen Beweisstrategien.

Zu Beginn ist noch einmal zu jeder „Beweisstrategie" ein typisches Beispiel aufgeführt.

Bearbeiten Sie diese drei Beispiele zuerst, bevor Sie sich dann bei den folgenden Aufgaben selbst entscheiden müssen, welche Beweisstrategie angezeigt sein könnte!

Direkter Beweis

Von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den grössten Flächeninhalt.

Indirekter Beweis

$\sqrt{10}$ ist irrational. (Oder: $\sqrt{10}$ ist nicht rational.)

Vollständige Induktion

Für die Summe der ersten n Kubikzahlen gilt die Summenformel: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Weitere Beweise 1

- Benennen Sie das jeweilige Beweisprinzip.
- Achten Sie auf eine klare Struktur Ihrer Gedanken!
- Die Aufgaben müssen nicht in der angegeben Reihenfolge gelöst werden.
- Tipps zu den einzelnen Aufgaben finden Sie auf der nächsten Seite.

Summenformel

Für die Summe der ersten n geraden Zahlen gilt die Summenformel:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+ 1).$$

Teilbarkeit

Wenn a durch b teilbar ist und b durch c, dann ist a durch c teilbar.

Irrational

$\sqrt{15}$ ist irrational. (Oder: $\sqrt{15}$ ist nicht rational.)

Primzahlen

Es gibt unendliche viele Primzahlen. (Oder: es gibt keine grösste Primzahl.)

Tipp in 2 Schritten

1 Wir bezeichnen n beliebige natürliche Zahlen, die alle grösser als 1 sein sollen, mit

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n.$$

Dann ist die neu gebildete Zahl

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n + 1$$

durch keine einzige der Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ teilbar (warum?).

2 Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen und bezeichnen sie mit

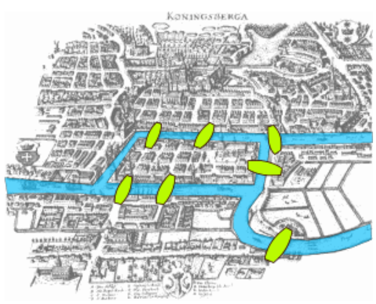
$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n.$$

Zeigen Sie nun, dass es mindestens eine weitere geben muss!

Figur

Zeichnet man 5 Punkte in ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1 gibt es deren zwei, deren Abstand höchstens $\frac{1}{2}$ beträgt.

Königsberger Brückenproblem



An Sonntagen gehörte es sich in Königsberg (heute: Kaliningrad, russische Enklave bei Litauen), dass man mit der Familie einen Spaziergang über die sieben Brücken der Stadt machte, die über den Fluss Pregel führten.

Ist das möglich, ohne eine Brücke zweimal zu überqueren?

Beachte

- Ein Beweis muss zuerst einen selbst überzeugen; erst dann besteht die Möglichkeit, dass er auch andere überzeugen kann.
- Es gibt nicht *den* Beweis. Oft lassen sich Behauptungen auch auf verschiedene Arten beweisen, also auch mit verschiedenen Beweisstrategien.
- Suchen Sie auch im Internet! Es ist voll von mathematischen Beweisen!

Tipps

Summenformel

- Vgl. Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen.
  Diese Formel haben wir auf drei (!) Arten bewiesen:
  mit vollständiger Induktion, mit dem „Gauss-trick", mit Hilfe einer Zeichnung

Teilbarkeit

- a ist durch b teilbar heisst, dass wir eine Zahl n finden so, dass gilt: $a = n \cdot b$
  Mit mathematischen Symbolen ausgedrückt: $b \mid a \Rightarrow \exists\, n \in \mathrm{IN}: a = nb$
- b ist durch c teilbar heisst ...

Irrational

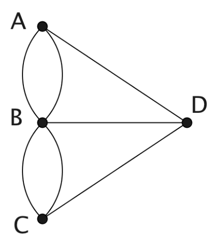
- Wir müssen zeigen, dass $\sqrt{15}$ <u>nicht</u> rational ist.
  Es bietet sich deshalb ein Widerspruchsbeweis an!

Primzahlen

- Wir müssen zeigen, dass es <u>keine</u> grösste Primzahl gibt.
  Es bietet sich deshalb ein Widerspruchsbeweis an!
- Wir bilden die Zahl: $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$
  und wissen, dass sich auch diese Zahl in Primfaktoren zerlegen lässt ...

Figur

- Taubenschlagprinzip (pigeon hole principle)



Königsberger Brückenproblem

- Hier ist es wichtig, dass man das Problem angemessen darstellt.
  Sie sehen rechts abgebildet eine „praktische" Darstellung insofern, als dass sie das *Wesentliche* wiedergibt. Die „Punkte" entsprechen den Stadtteilen, die „Linien" den Brücken. (Wie beim Haus von Nikolaus!)
- *Der Schweizer Mathematiker Euler nahm sich 1736 dieser Frage an und beantwortete sie mit einem Beweis. Er begründete damit einen neuen Zweig der Mathematik – die* ***Graphentheorie****.*

Weitere Beweise 2

- Benennen Sie das jeweilige Beweisprinzip.
- Achten Sie auf eine klare Struktur Ihrer Gedanken!
- Die Aufgaben müssen nicht in der angegeben Reihenfolge gelöst werden.
- Tipps zu den einzelnen Aufgaben finden Sie auf der nächsten Seite.

Summenformel

Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt die Summenformel:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Teilbarkeit

Zeigen Sie: $\forall\, n \in IN$ *gilt:* $n^3 + 5n$ *ist durch 6 teilbar*.

Irrational

$\log_2 3$ *ist irrational. (Oder:* $\log_2 3$ *ist nicht rational.)*

Primzahlen

a) *Die einzige Primzahl p, für die p + 1 eine Quadratzahl ist, ist p = 3.*

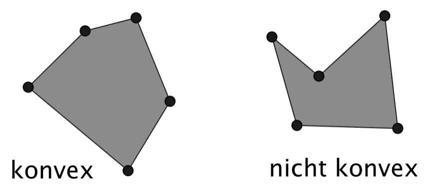
b) *Ist p eine Primzahl, dann ist der Term 2p + 1 nie eine Quadratzahl.*

Figur

a) *Die Innenwinkelsumme in einem n–Eck* beträgt* $(n-2)\cdot 180°$.

b) *Die Anzahl Diagonalen in einem n-Eck* beträgt* $\frac{n(n-3)}{2}$.

* Genauer: in einem *konvexen* (*= ohne Einbuchtung*) n-Eck.



Party

Bei einer Party begrüssen sich die Personen, indem sie miteinander anstossen. Zeigen Sie:
In jedem Augenblick gibt es mindestens zwei Personen, die mit der gleichen Anzahl Personen angestossen haben.

Ableitungsregel

Beweisen Sie die Potenzregel beim Ableiten: *Sei* $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\cdot x^{n-1}$.

Rechteck & Quadrat

Von allen Rechtecken mit gleicher Fläche hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

Tipps

Summenformel

- vollständige Induktion

Teilbarkeit

- vollständige Induktion

Irrational

- Analog zum Beweis, dass $\sqrt{15}$ <u>nicht</u> rational ist.

Primzahlen

- **a)** Setzen Sie $p + 1 = n^2$, für ein $n \in \mathbb{N}$. Versuchen Sie nun damit p zu bestimmen.
- **b)** Widerspruchsbeweis!

Figur

- **a)** n-Eck in Dreiecke zerlegen
- **b)** Wie viele Diagonalen können von einer Ecke ausgehen? Wie viele von n Ecken?

Party

- Taubenschlagprinzip (pigeon hole principle)

Ableitungsregel

- Differenzenquotient: $[x;x + \Delta x]$: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \ldots$

  Differenzialquotient: $\frac{df}{dx}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \ldots$

- Variante: vollständige Induktion (braucht die „Produktregel" der Ableitung)

Rechteck & Quadrat

- ...

„Seit der Zeit der Griechen bedeutet „Mathematik" zu sagen, „Beweis" zu sagen."
Bourbaki

Anhang Vorsicht! Was ist falsch?

Es soll eine Summenformel für die ersten n geraden natürlichen Zahlen gefunden werden:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = ?$$

Der Kapitän behauptet:

Die Summe der ersten n geraden natürlichen Zahlen ist gleich n(n + 1) + 2.

Und er liefert den „Beweis“ mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Vererbung: $n \to n + 1$

- Annahme die Formel gilt für n: $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1) + 2.$
- Zu zeigen: $2 + 4 + 6 + 2n + 2(n + 1) = (n + 1)(n + 2) + 2$
- Nachweis:
  $2 + 4 + 6 + 2n + 2(n + 1) = n\underline{(n + 1)} + \mathbf{2} + 2\underline{(n + 1)} = (n + 1)(n + 2) + \mathbf{2}$ ■

Die Vererbung ist perfekt!

Trotzdem scheint die Formel nicht zu stimmen...

Warum???

... stimmt die Formel nicht, obwohl der Kapitän sie bewiesen hat?

49 Fermats letzter Satz

Wir können zwei Quadratzahlen addieren und erhalten eine dritte Quadratzahl, zum Beispiel: $5^2 + 12^2 = 13^2$. Aber können wir auch zwei dritte Potenzen von ganzen Zahlen addieren, sodass wir wieder eine dritte Potenz einer ganzen Zahl erhalten? Und wie sieht es mit höheren Potenzen aus? Erstaunlicherweise geht das nicht. Der letzte Satz von Fermat besagt, dass es keine vier ganzen Zahlen *x*, *y*, *z* und *n* gibt, sodass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ erfüllt ist, sofern *n* größer ist als 2. Fermat behauptete, er habe einen „wunderbaren Beweis" für diese Aussage, wodurch Generationen von Mathematikern angestachelt wurden, diesen Beweis zu finden. Unter ihnen befand sich auch ein zehn Jahre alter Junge, der von dieser mathematischen Schatzsuche aus einem Buch in der örtlichen Bibliothek erfuhr.

Der letzte Satz von Fermat bezieht sich auf eine diophantische Gleichung, ein in vielen Fällen besonders schwieriger Gleichungstyp. Es wird gefordert, dass die Lösungen ganze Zahlen sind. Benannt sind sie nach Diophantos von Alexandrien, dessen *Arithmetica* zu einem Meilenstein der Zahlentheorie wurde. Im 17. Jahrhundert lebte in Toulouse in Frankreich der Anwalt und Staatsbeamte Pierre de Fermat. Er war ein vielseitig gebildeter Mathematiker und genoss ein hohes Ansehen besonders in der Zahlentheorie. Bekannt ist er hauptsächlich für eine Behauptung, die als sein letzter Satz in die Geschichte der Mathematik einging. Fermat behauptete, diesen Satz bewiesen zu haben, denn er schrieb an den Rand seiner Ausgabe von Diophantos' *Arithmetica*: »Ich habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, für den jedoch auf dem Rand nicht genügend Platz ist.«

Fermat löste viele schwierige mathematische Probleme, aber es deutet einiges darauf hin, dass sein letzter Satz nicht dazu gehörte. Dieser Satz beschäftigte unzählige Mathematiker für 300 Jahre, und er konnte erst vor Kurzem bewiesen werden. Der Beweis lässt sich nicht auf den Rand eines Buches schreiben, und die anspruchsvollen modernen Verfahren, mit denen er geführt wurde, lassen große Zweifel an Fermats Behauptung aufkommen.

Die Gleichung $x + y = z$ Wie können wir diese Gleichung mit den drei Variablen *x*, *y* und *z* lösen? Gewöhnlich gibt es in einer Gleichung eine Unbekannte *x*, doch hier haben wir gleich drei. Aus diesem Grund lässt sich die Gleichung $x + y = z$ allerdings sehr leicht lösen. Wir wählen beliebige Werte für *x* und *y*, und erhalten daraus *z*. Diese drei Zahlen sind dann eine Lösung. So einfach geht das.

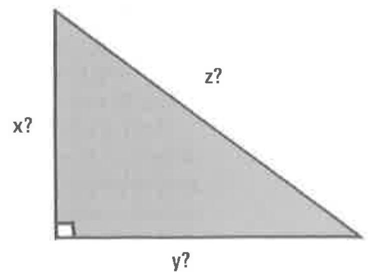
Wenn wir zum Beispiel $x = 3$ und $y = 7$ wählen, bilden die Zahlen $x = 3$, $y = 7$ und $z = 10$ eine Lösung der Gleichung. Nicht alle Drillinge von Zahlen *x*, *y* und *z* sind Lösungen. Beispielsweise bilden $x = 3$, $y = 7$ und $z = 9$ keine Lösung, weil für diese Zahlen die linke Seite der Gleichung $x + y$ nicht gleich der rechten Seite *z* ist.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ Nun geht es um Quadratzahlen. Das Quadrat einer Zahl *x* ist das Produkt aus dieser Zahl mit sich selbst, wofür wir x^2 schreiben. Für $x = 3$ ist $x^2 = 3 \times 3 = 9$. Nun geht es um die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Können wir diese Gleichung ebenso wie $x + y = z$ lösen, indem wir Werte für *x* und *y* vorgeben und dann *z* berechnen? Mit den Werten $x = 3$ und $y = 7$ erhalten wir für die linke Seite der Gleichung $3^2 + 7^2$, also $9 + 49 = 58$. Zur Berechnung von *z* müssen wir die Quadratwurzel aus 58 ziehen ($z = \sqrt{58}$), was ungefähr 7,6158 ist. Natürlich sind $x = 3$, $y = 7$ und $z = \sqrt{58}$ eine Lösung von $x^2 + y^2 = z^2$, doch bei diophantischen Gleichungen geht es um Lösungen durch ganze Zahlen. Da $\sqrt{58}$ keine ganze Zahl ist, ist $x = 3$, $y = 7$ und $z = \sqrt{58}$ auch keine diophantische Lösung.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ lässt sich im Zusammenhang mit Dreiecken einfach veranschaulichen. Wenn wir mit *x*, *y* und *z* jeweils die Längen der drei Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnen, erfüllen sie diese Gleichung. Umgekehrt, wenn *x*, *y* und *z* diese Gleichung erfüllen, dann ist der Winkel zwischen *x* und *y* ein rechter Winkel. Wegen dieses Zusammenhangs mit dem Satz des Pythagoras bezeichnet man ganzzahlige Lösungen *x*, *y* und *z* der Gleichung auch als Pythagoreische Tripel.



Wie kann man Pythagoreische Tripel finden? Hier kommt die Stunde des Baumeisters. Zur Ausstattung früherer Baumeister gehörte das allgegenwärtige 3-4-5-Dreieck. Die Werte $x = 3$, $y = 4$ und $z = 5$ sind eine Lösung der Art, wie wir sie suchen, denn $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 5^2$. Umgekehrt muss ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 auch einen rechten Winkel haben. Diese mathematische Tat-

Zeitleiste

1665 Fermat stirbt, ohne eine Aufzeichnung seines „wunderbaren Beweises" hinterlassen zu haben

1753 Euler beweist den Satz für $n = 3$

1825 Legendre und Dirichlet finden unabhängig voneinander einen Beweis für $n = 5$

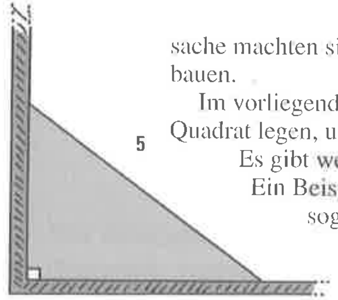
1839 Lamé findet einen Beweis für $n = 7$

1843 Kummer behauptet, den Satz bewiesen zu haben, doch Dirichlet findet einen Fehler

1907 von Lindemann behauptet, einen Beweis zu haben, der sich jedoch ebenfalls als falsch erweist

1908 Wolfskehl setzt einen Preis für eine Lösung innerhalb der nächsten 100 Jahre aus

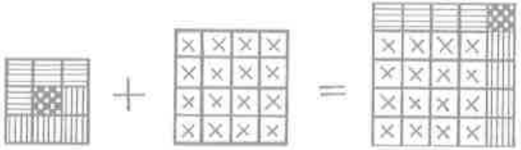
1994 Wiles beweist schließlich den letzten Satz von Fermat



sache machten sich die alten Baumeister zunutze, um Wände im rechten Winkel zu bauen.

Im vorliegenden Fall können wir ein 3×3-Quadrat zerlegen und die Teile um ein 4×4-Quadrat legen, um ein 5×5-Quadrat zu erhalten.

Es gibt weitere Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in Form von ganzen Zahlen. Ein Beispiel ist $x = 5$, $y = 12$ und $z = 13$, denn $5^2 + 12^2 = 13^2$. Tatsächlich gibt es sogar unendlich viele ganzzahlige Lösungen zu dieser Gleichung. Die Lösung der Baumeister $x = 3$, $y = 4$ und $z = 5$ steht an der Spitze, weil sie die kleinste Lösung ist, außerdem ist sie die einzige Lösung aus hintereinanderfolgenden Zahlen. Es gibt viele Lösungen, bei denen zwei Zahlen aufeinander folgen, wie $x = 20$, $y = 21$ und $z = 29$ oder $x = 9$, $y = 40$ und $z = 41$, doch keine weitere mit drei solchen Zahlen.



3 x 3 4 x 4 5 x 5

Vom Überfluss zum Mangel Der Schritt von $x^2 + y^2 = z^2$ zu $x^3 + y^3 = z^3$ erscheint zunächst klein. Können wir denselben Trick wie bei den Quadraten nochmals bei den dritten Potenzen anwenden? Können wir einen Würfel zerlegen und die Teile an einen zweiten Würfel anlegen, sodass wir einen dritten Würfel erhalten? Dieser Weg erweist sich als unmöglich. Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ hat unendlich viele Lösungen, aber Fermat konnte nicht eine Lösung in ganzen Zahlen für die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ finden. Die Geschichte ging sogar noch weiter: Nachdem Leonhard Euler keine Lösungen finden konnte, formulierte er den letzten Satz in folgender Form:

Es gibt keine Lösungen in ganzen Zahlen für die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für Werte von n größer als 2.

Für einen Beweis kann man mit niedrigen Werten von n beginnen und sich langsam hocharbeiten. So ging auch Fermat vor. Der Fall $n = 4$ ist tatsächlich einfacher als $n = 3$, und vermutlich hatte Fermat einen Beweis für diesen Fall. Im 18. und 19. Jahrhundert füllte Euler zunächst die Lücke $n = 3$, Adrien-Marie Legendre vervollständigte den Fall $n = 5$, und Gabriel Lamé bewies den Fall $n = 7$. Lamé glaubte ursprünglich, er habe einen Beweis für die allgemeine Aussage, was sich jedoch als falsch erwies.

Sehr wichtige Beiträge kamen von Ernst Kummer, der im Jahre 1843 sogar ein Manuskript mit einem allgemeinen Beweis einreichte. Peter Gustav Lejeune Dirichlet entdeckte jedoch einen Fehler in dieser Arbeit. Die Französische Akademie der Wissenschaften setzte einen Preis von 3000 Francs für einen gültigen Beweis aus, der schließlich an Kummer ging, dessen weitreichende Erkenntnisse immer noch den größten Fortschritt darstellten. Kummer bewies den Satz für alle Primzahlen unter 100 (sowie weitere Zahlen), abgesehen von den irregulären Primzahlen 37, 59 und 67. Beispielsweise konnte er nicht beweisen, dass es keine ganzen Zahlen gibt, für welche die Gleichung $x^{67} + y^{67} = z^{67}$ erfüllt ist. Sein Fehlschlag, einen allgemeinen Beweis für Fermats letzten Satz vorlegen zu können, führte jedoch zur Entwicklung vieler hilfreicher Verfahren in der abstrakten Algebra. Vermutlich war sein Beitrag auf diese Weise für die Mathematik sogar wertvoller, als wenn er die eigentliche Frage beantwortet hätte.

Im Jahre 1907 behauptete Ferdinand von Lindemann, der die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises bewiesen hatte (▶Kapitel 5), einen Beweis für Fermats Satz zu haben, der sich aber ebenfalls als falsch erwies. Im Jahre 1908 wurde von Paul Wolfskehl ein Preis von 100000 Goldmark für den ersten gültigen Beweis gestiftet, sofern dieser innerhalb der nächsten 100 Jahre erfolgen sollte. Innerhalb der nächsten Jahre wurden um die 5000 Beweise eingereicht, überprüft und als falsch zurückgewiesen.

Der Beweis Der Bezug zum Satz des Pythagoras gilt nur für $n = 2$, doch allgemein erwies sich der Bezug zur Geometrie für den endgültigen Beweis als wesentlich. Der Zusammenhang erfolgte über die Theorie von Kurven und beruhte auf einer Vermutung der beiden japanischen Mathematiker Yutaka Taniyama und Goro Shimura. Im Jahre 1993 hielt Andrew Wiles einen Vortrag über diese Theorie in Cambridge und trug dabei auch seinen Beweis für den letzten Fermat'schen Satz vor. Leider erwies sich der Beweis als falsch.

Für den französischen Mathematiker mit dem ähnlich klingenden Namen André Weil war die Angelegenheit damit erledigt. Für ihn war ein Beweis dieses Theorems vergleichbar mit der Besteigung des Mount Everest, wenn jemand jedoch 100 Meter vor dem Ziel aufgeben muss, hat er den Everest eben nicht bestiegen. Damit erhöhte sich der Druck auf Andrew Wiles. Er zog sich vollkommen zurück und arbeitete wie wahnsinnig an dem Problem. Viele glaubten, Wiles würde schließlich in die Gruppe der vielen anderen eingereiht, die einen Beinahebeweis vorgelegt haben.

Doch mit der Hilfe einiger Kollegen konnte Wiles seinen Fehler beheben und durch ein korrektes Argument ersetzen. Diesmal hatte er die Fachwelt überzeugt und den Satz bewiesen. 1995 wurde sein Beweis veröffentlicht, und damit lag er gerade eben noch innerhalb der Laufzeit für den Wolfskehl-Preis. Als zehn Jahre alter Junge hatte er zum ersten Mal in einer öffentlichen Bibliothek in Cambridge über das Problem gelesen. Bis zum Beweis war es ein langer Weg.

Worum es geht

Der Beweis einer Randbemerkung

17 Beweise

Mathematiker versuchen ihre Behauptungen durch Beweise zu untermauern. Die Suche nach absolut wasserdichten Argumenten ist eine der treibenden Kräfte der reinen Mathematik. Ausgehend von bereits Bekanntem oder Angenommenem führen Ketten von rigoros schlüssigen Argumenten den Mathematiker schließlich zu einer Schlussfolgerung, die dann in die Galerie mathematischer Sätze aufgenommen wird.

Beweise sind meist nicht einfach. Oft stehen sie am Ende einer langen Suche und vieler Irrwege. Der Kampf um Beweise steht im Mittelpunkt des mathematischen Alltags. Ein erfolgreicher Beweis trägt den Stempel der mathematischen Autorität und trennt einen allgemein akzeptierten Satz von einer unbewiesenen Vermutung, einer guten Idee oder einer ersten Ahnung.

Ein guter Beweis zeichnet sich durch mathematische Strenge, Transparenz und nicht zuletzt auch Eleganz aus. Hinzu kommt noch eine tiefe Einsicht. Ein guter Beweis „macht uns weiser" – allerdings ist *irgendein* Beweis immer noch besser als gar keiner. Ein Fortschritt, der auf unbewiesenen Behauptungen beruht, könnte Gefahr laufen, auf mathematischen Sand gebaut zu sein.

Nicht jeder Beweis erlebt die Ewigkeit. Unter dem Einfluss neuer Entwicklungen und Konzepte, auf die sich ein Beweis bezieht, kann auch schon mal eine Überarbeitung notwendig werden.

Was ist ein Beweis? Angenommen, Sie hören oder lesen von einem mathematischen Resultat. Glauben Sie, dass es stimmt? Was würde Sie von seiner Richtigkeit überzeugen? Eine mögliche Antwort wäre: ein logisch überzeugendes Argument, das von akzeptierten Vorstellungen ausgeht und zu der infrage stehenden Behauptung führt. Genau das würde ein Mathematiker einen Beweis nennen. In seiner üblichen Form handelt es sich um ein Gemisch aus Alltagssprache und strenger Logik. Je nach der Qualität des Beweises sind Sie entweder überzeugt oder immer noch skeptisch.

Die meisten mathematischen Beweise beruhen auf einem der folgenden Prinzipien: dem Verfahren des Gegenbeispiels, der direkten Methode, der indirekten Methode und der vollständigen Induktion.

Das Gegenbeispiel Eine gesunde Skepsis kann zu einem Beweis führen, dass eine bestimmte Behauptung falsch ist. Betrachten wir ein konkretes Beispiel. Angenommen, es wird behauptet, das Produkt von einer beliebigen Zahl mit sich selbst sei immer eine gerade Zahl. Glauben Sie das? Statt eine voreilige Antwort zu geben, sollten wir erst einige Beispiele ausprobieren. Wir nehmen eine Zahl, beispielsweise 6, multiplizieren sie mit sich selbst und erhalten $6 \times 6 = 36$, also tatsächlich eine gerade Zahl. Doch eine Schwalbe macht noch keinen Sommer. Die Behauptung bezog sich auf alle Zahlen, und davon gibt es unendlich viele. Um ein Gefühl für das Problem zu bekommen, sollten wir noch weitere Beispiele überprüfen. Wir nehmen die Zahl 9 und finden $9 \times 9 = 81$. Aber 81 ist eine ungerade Zahl. Also ist die Behauptung, das Produkt einer beliebigen Zahl mit sich selbst wäre immer eine gerade Zahl, falsch. Das Beispiel steht im Widerspruch zur ursprünglichen Aussage und ist daher ein Gegenbeispiel. Ein Gegenbeispiel zur Behauptung „alle Schwäne sind weiß" wäre ein tatsächlich existierender schwarzer Schwan. Oft besteht der Spaß in der Mathematik gerade in der Suche nach einem Gegenbeispiel, mit dem man ein Möchte-gern-Theorem abschießen kann.

Wenn wir trotz intensiver Suche kein Gegenbeispiel finden, sind wir geneigt, die Richtigkeit der Behauptung anzunehmen. Dann muss der Mathematiker den Spieß umdrehen. Ein Beweis muss gefunden werden, und das am nächsten liegende Verfahren ist der direkte Beweis.

Der direkte Beweis Bei der direkten Beweismethode marschieren wir mit logischen Argumenten schnurstracks vom Ausgangspunkt, der bereits als bewiesen gilt oder als Annahme zugelassen wurde, zur Behauptung. Gelingt uns das, haben wir einen mathematischen Satz. Natürlich können wir nicht beweisen, dass das Produkt von einer beliebigen Zahl mit sich selbst immer eine gerade Zahl ist, denn wir haben bereits ein Gegenbeispiel, aber vielleicht können wir doch noch etwas retten. Der Unterschied zwischen dem ersten Beispiel und dem Gegenbeispiel – der 6 und der 9 – besteht darin, dass die erste Zahl gerade ist und das Gegenbeispiel ungerade. Wir können die Vermutung abändern. Unsere neue Behauptung lautet: Wenn wir eine gerade Zahl mit sich selbst multiplizieren, ist das Ergebnis immer eine gerade Zahl.

Zunächst versuchen wir es mit anderen Beispielen, doch die Behauptung erweist sich jedes Mal als richtig, und wir können kein Gegenbeispiel finden. Nun wollen wir die Behauptung direkt beweisen, doch wie sollen wir beginnen? Wir können mit einer allgemeinen geraden Zahl n beginnen, doch da das etwas zu abstrakt erscheint, betrachten wir zunächst eine bestimmte Zahl, zum Beispiel 6. Wie Sie wissen, ist eine gerade Zahl ein Vielfaches von 2, in diesem Fall gilt $6 = 2 \times 3$. Da 6×6 dasselbe ist wie $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$ oder, in anderer Form, $6 \times 6 = 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3$ bzw. mit der Klammerschreibweise

$$6 \times 6 = 2 \times (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3)$$

Zeitleiste

ca. 300 v. Chr. Euklids *Elemente* sind das Vorbild für einen mathematischen Beweis

1637 n. Chr. Descartes spricht sich in seiner *Discours de la méthode* für mathematische Strenge als Denkprinzip aus

1838 De Morgan führt den Begriff „vollständige Induktion" ein

1967 Bishop beweist Aussagen ausschließlich mit konstruktiven Verfahren

1976 Imre Lakatos veröffentlicht das einflussreiche Werk *Beweise und Widerlegungen* bedeutet dies, dass 6×6 ein Vielfaches von 2 ist und damit eine gerade Zahl. Offenbar macht dieses Argument nirgends von einer besonderen Eigenschaft der Zahl 6 Gebrauch, und wir hätten stattdessen auch $n = 2 \times k$ schreiben können und dann gefolgert, dass

$$n \times n = 2 \times (k + k + k + ... + k)$$

gerade ist. Damit ist unser Beweis fertig. In der Vergangenheit haben Mathematiker wie Euklid einen Beweis mit „q. e. d." abgeschlossen. Das ist eine Abkürzung des lateinischen *quod erat demonstrandum* (was das zu Beweisende war). Heute setzt man ans Ende eines Beweises oft ein ausgefülltes Quadrat ■, das man als Halmos bezeichnet, nach dem Mathematiker Paul Halmos, der es als Erster verwendet hat.

Der indirekte Beweis Bei diesem Verfahren nimmt man zunächst an, die Schlussfolgerung sei falsch, und beweist durch eine logische Argumentationskette, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Wir beweisen die obige Behauptung mit dieser Methode.

Unsere Voraussetzung ist, dass n gerade ist, und wir nehmen an, $n \times n$ sei ungerade. Wir schreiben $n \times n = n + n + ... + n$. Insgesamt gibt es n dieser Terme. Das bedeutet jedoch, n kann nicht gerade sein (denn die Summe von geraden Termen ist wieder gerade). Also muss n ungerade sein, was aber unserer Voraussetzung widerspricht. ■

Hierbei handelt es sich um eine milde Form des indirekten Beweises. Die eigentliche indirekte Beweismethode bezeichnet man auch als *reductio ad absurdum* (Zurückführung auf das Absurde), und sie war bei den Griechen sehr beliebt. In der Akademie von Athen liebten es Sokrates und Platon, einen Diskussionspunkt zu beweisen, indem sie ihre Gegner in Widersprüche verwickelten und dabei die Richtigkeit ihrer Behauptung hervorhoben. Der klassische Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel von 2 ist von dieser Form. Man beginnt mit der Annahme, die Quadratwurzel von 2 sei eine rationale Zahl und führt diese Annahme zu einem Widerspruch.

Das Verfahren der vollständigen Induktion Die vollständige Induktion ist oft ein sehr effektives Beweisverfahren, wenn man die Richtigkeit einer Folge von Behauptungen $P_1, P_2, P_3, ...$ zeigen möchte. Das erkannte auch Augustus De Morgan um 1830 und formalisierte, was bereits seit Hunderten von Jahren bekannt war. Diese besondere Technik (nicht zu verwechseln mit der wissenschaftlichen Induktion) wird oft zum Beweis von Behauptungen über die ganzen Zahlen eingesetzt. Sie erweist sich als besonders hilfreich in der Graphentheorie, der Zahlentheorie und allgemein in den Computerwissenschaften. Als praktisches Beispiel denken wir an das Problem, die Summe der ungeraden Zahlen zu berechnen. Beispielsweise ergibt die Summe der ersten drei ungeraden Zahlen $1 + 3 + 5 = 9$. Die Summe der ersten vier ungeraden Zahlen ist $1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Nun ist $9 = 3 \times 3 = 3^2$ und $16 = 4 \times 4 = 4^2$. Könnte es sein, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist? Wenn wir eine beliebige Zahl für n wählen, zum Beispiel 7, finden wir tatsächlich, dass die Summe der ersten sieben ungeraden Zahlen $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$ ist, also 7^2. Doch gilt diese Vermutung für *alle* Werte von n? Wie können wir das zeigen? Wir können unmöglich eine unendliche Anzahl von Fällen einzeln überprüfen.

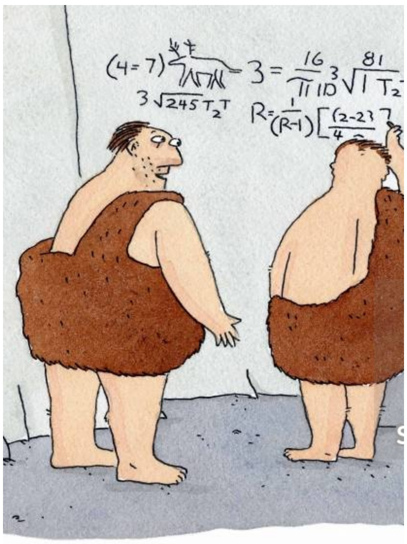
An dieser Stelle kommt die vollständige Induktion ins Spiel. Manchmal spricht man auch von der Dominomethode. Diese Metapher bezieht sich auf eine Reihe von Dominosteinen, die aufrecht nebeneinander aufgestellt wurden. Kippt der erste Dominostein um, stößt er den nächsten an, der ebenfalls umkippt, und so geht es weiter. Diese Idee liegt dem Beweis zugrunde. Damit *alle* umfallen, müssen wir nur dafür sorgen, dass der erste umfällt. Diese Vorstellung können wir auf das Problem der Summe von ungeraden Zahlen anwenden. Die Behauptung P_n besagt, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist. Die vollständige Induktion löst eine Kettenreaktion aus, durch die $P_1, P_2, P_3, ...$ alle wahr werden. Die Behauptung P_1 ist trivialerweise wahr, denn $1 = 1^2$. P_2 ist wahr, weil $1 + 3 = 1^2 + 3 = 2^2$. P_3 ist wahr, weil $1 + 3 + 5 = 2^2 + 5 = 3^2$, und P_4 ist wahr, weil $1 + 3 + 5 + 7 = 3^2 + 7 = 4^2$. Wir verwenden das Ergebnis von einem Schritt für den nächsten. Dieser Prozess lässt sich auch formalisieren und beschreibt das Verfahren der vollständigen Induktion.

Schwierigkeiten im Umgang mit Beweisen Beweise haben unterschiedliche Formen und einen unterschiedlichen Umfang. Es gibt kurze und griffige Beweise, wie man sie besonders häufig in Lehrbüchern findet. Manche der neueren Beweise füllen jedoch eine ganze Ausgabe einer Zeitschrift und umfassen Tausende von Seiten. Nur wenige Menschen können in diesen Fällen die ganze Beweiskette überblicken.

Es gibt auch grundlegende, konzeptuelle Fragen. Zum Beispiel sind manche Mathematiker nicht sehr glücklich mit der *reductio ad absurdum*-Methode eines indirekten Beweises, wenn es um die Existenz einer Sache geht. Wenn die Annahme, dass es keine Lösung zu einer Gleichung gibt, auf einen Widerspruch führt, heißt das wirklich, dass man die Existenz einer Lösung bewiesen hat? Gegner dieses Beweisverfahrens halten die Logik für einen Taschenspielertrick und argumentieren, dass wir nichts darüber erfahren, wie tatsächlich eine konkrete Lösung konstruiert werden kann. Man bezeichnet diese Mathematiker als „Konstruktivisten" (unterschiedlichen Grades). Ihrer Ansicht nach fehlt der Methode der „numerische Inhalt". Aus diesem Grund verachten sie die klassischen Mathematiker, für die der *reductio ad absurdum*-Beweis eine wichtige Waffe im Arsenal der Mathematik ist. Auf der anderen Seite sagen die eher traditionellen Mathematiker, dass ein Verzicht auf diese Art der Argumentation bedeuten würde, sich im Kampf um Beweise eine Hand auf den Rücken zu binden. Außerdem müsste man die Richtigkeit so vieler Ergebnisse, die mit der indirekten Methode bewiesen wurden, infrage stellen, sodass die mathematische Landschaft reichlich zerstückelt erscheinen würde.

Worum es geht

Mit Brief und Siegel



"I like the part about the deer."