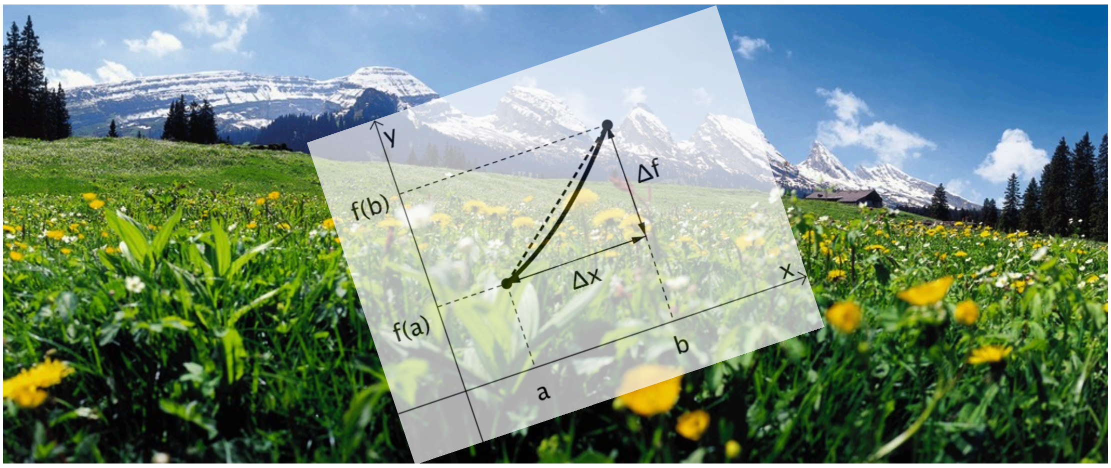
Datum Name



Differenzialrechnung 1

mittlere & momentane Änderungsrate
Differenzen- & Differenzialquotient
Ableitungsfunktion

*Im **Pfeil-Paradoxon** denkt Zenon über die Wirklichkeit von Bewegung nach.*

Zenon sagt, ein fliegender Pfeil nehme in jedem Moment seiner Flugbahn einen bestimmten, exakt umrissenen Ort ein. An einem exakt umrissenen Ort befinde sich der Pfeil in Ruhe, denn an einem Ort könne er sich nicht bewegen.
Da sich der Pfeil in jedem Moment also in Ruhe befinde, müsste er sich insgesamt in Ruhe befinden...

... und folgert daraus; dass Bewegung unmöglich sei.

Aber wir bewegen uns doch?

Zenon
griechischer Philosoph, 500 v.Chr.

Inhalt

?

1 Einstieg

In der Welt verändern sich die Dinge dauernd. Die Mathematik kann diese Veränderungen erfassen und rechnerisch zugänglich machen. Veränderungen lassen sich am besten erfassen mit Funktionen.

Was heisst „**Veränderung**"?

Es gibt einen **Unterschied** zwischen „nachher" und „vorher".

Mathematisch ist ein „Unterschied" eine **Differenz**. Eine Differenz kürzen wir mit dem Symbol „Δ" ab.
Es ist also:

Δ = Endzustand – Anfangszustand

Beispiel 1 **Wachstum (= Änderung!) einer Pflanze**

Eine Pflanze wächst. Ihre Höhe h *ändert* sich im Verlauf der Zeit t.
Mathematisch ausgedrückt:
Die Wertetabelle beschreibt die *Höhe h als Funktion der Zeit t*.

Zeit t in Tagen	0	3	5	9	14
Höhe h in cm	0	1	3	6	7

a) Um eine Vorstellung – also ein „Bild" – zu bekommen, zeichnen wir den Graphen der Funktion h(t).

b) In welchem Beobachtungsintervall wächst die Pflanze
- am meisten?
- am schnellsten? Wo kommen diese Grössen am Graphen zum Ausdruck?

Dieser Unterschied führt auf die ganz wichtigen Begriffe: **Änderung** und **Änderungsrate**... (**Einheiten** beachten!)

Sind nicht nur einzelne Wertepaare bekannt, sondern ist die *Funktionsgleichung* gegeben, so kann man für *beliebige* Intervalle Änderungen und mittlere Änderungsraten berechnen:

Beispiel 2 **Bewegung (= Änderung!)**

Ein Auto fährt, eine Pflanze wächst (= legt einen Weg zurück!), ... allgemein: ein **s-t-Diagramm**.

Gegeben ist die Weg-Zeit-Funktion s(t).
Berechnen und interpretieren Sie – mit Einheiten – im Intervall $[2;4]$
- die Änderung Δs
- die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

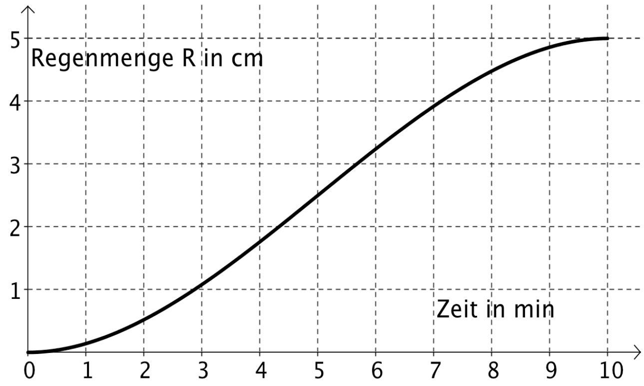
a) Es sei $s(t) = 0.5t + 2$ (s in cm, t in Tagen). **b)** Es sei $s(t) = 0.25t^2$ (s in km, t in h).

c) Welche der beiden Funktionen **a)** oder **b)** ist „uninteressant", was die Änderungsrate betrifft? Warum?

d) Wir vergleichen die beiden Graphen **a)** und **b)**. Welcher Graph ändert sich „schneller"?

Änderungsraten kommen in vielen Zusammenhängen vor.

2 Differenzialrechnung



mittlere Änderungsrate

Beispiel 3 Regenintensität

Der Platzregen dauert 10 Minuten.
Die Regenmenge wird gemessen und modelliert gemäss

$R(t) = -0.01t^3 + 0.15t^2$, t in min , R in cm.

a) Berechnen und interpretieren Sie – mit Einheiten – im Intervall [1;4]

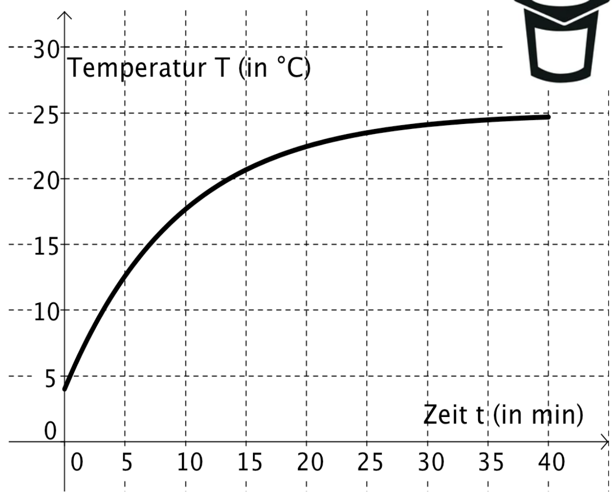
- die Änderung ΔR
- die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta R}{\Delta t}$

b) Wie lässt sich die Änderungsrate $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ geometrisch (am Graphen) interpretieren?

c) Geben Sie ein Intervall an, für das die Änderung kleiner, die mittlere Änderungsrate aber grösser ist als in a)!

d) Handelt es sich bei der mittleren Änderungsrate $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ um eine „Geschwindigkeit“?

Beispiel 4 Joghurt erwärmt sich



Lola nimmt ein Joghurt aus dem Kühlschrank. Für die Temperatur gilt:

$$T(t) = 25 - 21 \cdot 0.9^t$$

wobei die Temperatur T in °C und die Zeit t seit der Entnahme in Minuten gemessen werden.

a) Berechnen und interpretieren
Sie – mit Einheiten – im Intervall [5;20]

- die Änderung ΔT
- die Änderungsrate $\frac{\Delta T}{\Delta t}$

b) Interpretieren Sie die Änderungsrate $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ geometrisch!

c) Handelt es sich bei der mittleren Änderungsrate $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ um eine „Geschwindigkeit“?

d) Begründen Sie ohne Rechnung, aber mit Hilfe des Graphen, in welchem der beiden Zeitintervalle [5;10] oder [10;30] die Änderungsrate $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ kleiner ist.

Beispiel 5 **Steigung einer Kurve (= Änderungsrate der Höhe)**

Sei $y = -0.25x(x-10) = -0.25x^2 + 2.5x$.

a) Skizzieren Sie die Kurve! (Dazu: Nullstellen, Globalverhalten, Symmetrie...?)

b) Berechnen und interpretieren Sie – mit Einheiten – im Intervall $[2;5]$

- die Änderung Δy
- mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

c) Interpretieren Sie die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geometrisch!

d) Geben Sie ein Intervall $[a;b]$ an , für das gilt:

- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$. Berechnen Sie in diesem Fall $\frac{\Delta y}{\Delta x}$!

e) Wir interpretieren die Funktion in einem anderen Zusammenhang.
Sie gibt an, wie hoch über der Erde sich ein Heissluftballon zur Zeit t befindet:

$$h(t) = -0.25t^2 + 2.5t \text{ (h in m, t in min).}$$

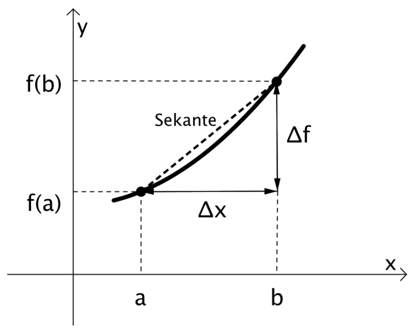
Berechnen und interpretieren Sie mit Einheiten die mittlere Änderungsrate im Intervall $[4;8]$.

Definition

Der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

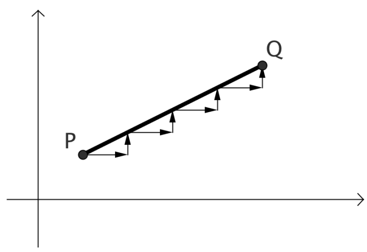
heisst **mittlere Änderungsrate** bzw. **Differenzenquotient** von f auf dem Intervall $[a;b]$.



Geometrisch entspricht die mittlere Änderungsrate der **Steigung der Sekante** durch die Punkte P(a/f(a)) und Q(b/f(b)).

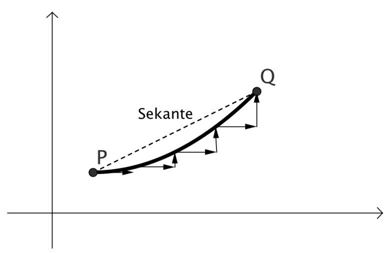
Folgende Überlegung soll den Begriff der mittleren Änderungsrate weiter verdeutlichen.

Eine Gerade hat in jedem Intervall die gleiche *konstante Änderungsrate*, denn sie steigt immer gleich schnell an.



Im Gegensatz hierzu hat eine gekrümmte Kurve *wechselnde Änderungsraten*.
Betrachtet man eine solche Kurve über einem grösseren Intervall, so kann man dort nur die mittlere Änderungsrate bestimmen. Diese entspricht der Änderungsrate der Sekante, welche den Kurvenpunkt P am Intervallanfang mit dem Kurvenpunkt Q am Intervallende verbindet.

- Änderungs**RATE** heisst immer: wir messen die Änderung f(b) – f(a) **PRO EINHEIT**, wozu wir durch die Länge b – a des Intervalls teilen.
- Änderungsraten lassen sich **inhaltlich (als „Geschwindigkeit") und geometrisch interpretieren**. Für die inhaltliche Interpretation ist es wichtig, dass man immer die *Einheit* dazu schreibt.



momentane Änderungsrate

Beispiel 6 **momentane Steigung / Geschwindigkeit**

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 0.25x^2$. Stellen Sie sich den Graphen als Bergprofil vor.

- Welche Steigung hat der Graph von f(x) *im* Punkt P(2/f(2))?

Kann man das überhaupt berechnen? Und wenn man das kann: wie???

Hinweis *Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

- *für ein „kleines“* Δx*!*
- *für ein „beliebiges“* Δx*!*
- *Was passiert, wenn* Δx *immer kleiner wird?*

- Welche Steigung hat der Graph in einem beliebigen Punkt? (An einer beliebigen Stelle x?)

b) Der freie Fall wird beschrieben durch $s(t) = 5t^2$.

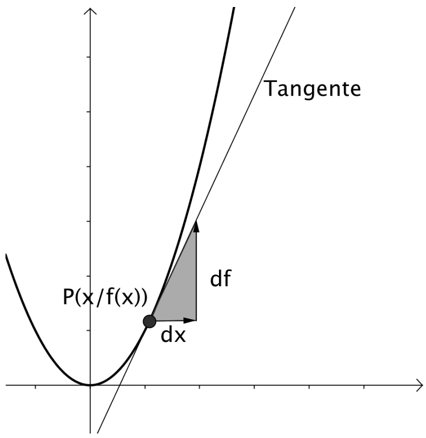
- Welche momentane Geschwindigkeit hat man nach t = 1 Sekunde?
- Welche momentane Geschwindigkeit hat man nach t Sekunden?

Definition

Der Ausdruck

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

heisst **momentane Änderungsrate bzw. Differenzialquotient** von f an der Stelle x.



Sprechweise: *„df nach dx“*.

In einem Weg-Zeit Diagramm wird dies zu

$$\frac{ds}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

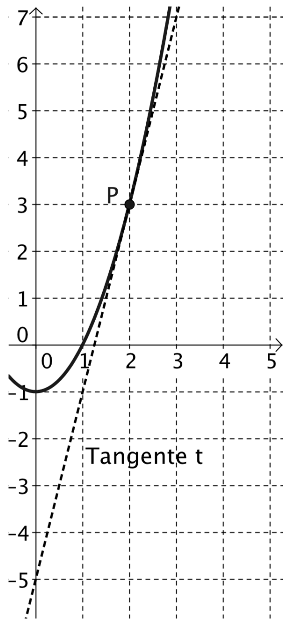
und heisst Momentangeschwindigkeit!

Sprechweise: *„ds nach dt“*.
Oder*: die (momentane) Geschwindigkeit ist die (momentane) Änderung der Strecke nach der Zeit.*

Geometrisch entspricht die momentane Änderungsrate der **Steigung der Tangente** im Punkt P(x/f(x)).

momentane Änderungsraten systematisch berechnen, step by step

Beispiel Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 1$.
Berechnen Sie die (momentane) Steigung des Graphen im Punkt P(2/f(2)).



Schritt 1, Differenzenquotient berechnen (für eine allgemeine Stelle x)

$$[x;x + \Delta x]:\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2-1-(x^2-1)}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Schritt 2, Differenzialquotient berechnen

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

<u>Die Steigung des Graphen an der Stelle x beträgt 2·x.</u>

Schritt 3, x-Wert einsetzen

$$\frac{df}{dx}(2) = 2\cdot 2 = 4$$

Die Steigung des Graphen an der Stelle x = 2 beträgt 4.
Die **(momentane) Steigung** des Graphen entspricht der **Steigung der Tangente** in diesem Punkt.

Beispiel Ein Stein wird (von einer Brücke) fallen gelassen. Für den freien Fall gilt die Gleichung $s(t) = 5t^2$ (s in m, t in sec). Wie gross ist die (momentane) Geschwindigkeit nach 3 Sekunden?

Schritt 1, mittlere Änderungsrate berechnen (für einen allgemeinen Zeitpunkt t)

$$[t;t + \Delta t]:\ \overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \frac{5(t+\Delta t)^2-5t^2}{\Delta t} = \frac{10t\cdot\Delta t+5\Delta t^2}{\Delta t} = (10t + 5\Delta t)\ \frac{m}{sec}$$

Schritt 2, momentane Änderungsrate berechnen

$$v(t) = \frac{ds}{dt}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} (10t + 5\Delta t) = 10t\ \frac{m}{sec}$$

Schritt 3, t-Wert einsetzen

$$v(3) = \frac{ds}{dt}(3) = 10\cdot 3 = 30\ \frac{m}{sec}$$

Die **(momentane) Geschwindigkeit** des Steines nach t = 3 Sekunden beträgt $30\ \frac{m}{sec}$.
Würden wir in einem s-t-Diagramm die Funktion $s(t) = 5t^2$ zeichnen, und eine Tangente im Punkt P(3/s(3)), dann hätte sie die Steigung 30, wie oben (geometrische Veranschaulichung)

Beispiel 7 **systematische Berechnung momentaner Änderungsraten (Steigung, Geschwindigkeit)**

Verfahren Sie genau(!) wie oben, indem Sie die 3 Schritte ausführen. **Schreibweise** beachten!

a) Berechnen Sie die Steigung im Punkt P(–1/f(–1)) der Funktion $f(x) = 2x^2 + 3$.

b) Ein Körper bewegt sich gemäss $s(t) = 3.5t^2$ (t in h, s in km). Welche Geschwindigkeit hat er nach 5 Stunden?

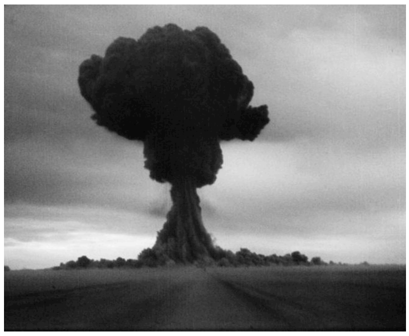
Im Folgenden nochmals zwei Beispiele, die sie *verinnerlichen* müssen. Sie zeigen nochmals zwei Anwendungen der Änderungsrate als

- **Geschwindigkeit** (momentane Änderungsrate)
- **Steigung des Graphen bzw. Steigung der Tangente** (lokale Änderungsrate)

Die beiden Aufgaben erscheinen im ersten Moment sehr unterschiedlich: sie haben aber denselben *Kern*. Die

Differenzialrechnung = die Lehre der (momentanen) Änderung

Beispiel 8 s(t)-funktion: Schockwelle



Die Schockwelle einer atomaren Explosion breite sich nach der Gleichung

$$s(t) = 1.6t^2 + 3.2t \ (0 \le t \le 10)$$

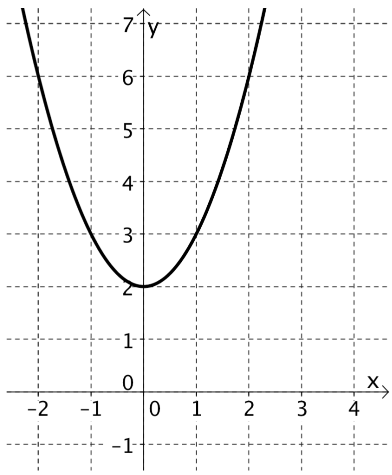
aus,
wobei s(t) die Entfernung (in km) vom Explosionszentrum nach t Sekunden ist.

a) Berechnen Sie und interpretieren Sie mit Einheiten

- s(3)
- $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ im Intervall [3;4]
- $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ im Intervall $[t;t + \Delta t]$
- $\frac{ds}{dt}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

b) Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit der Schockwelle in einem 63 km entfernten Ort.

Beispiel 9 Tangente



a) Gegeben ist die Kurve $f(x) = x^2 + 2$, siehe Abbildung.

- Berechnen Sie die Steigung der Kurve im Punkt P(1/f(1)).
  Hinweis *Führen Sie dazu die üblichen 3 Schritten aus*
- *Zeichnen* Sie die Tangente an die Kurve im Punkt P(1/f(1)) in die Abbildung ein.
  Berechnen Sie die Gleichung dieser Tangente.

b) Es ist $f(x) = -0.5x^2 + 3x$.

- Berechnen Sie die Steigung des Graphen an der Stelle x.
  Sorgfalt!

Schritt 1*, Differenzenquotient berechnen*

$$[x;x+\Delta x]: \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\overbrace{-0.5(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)}^{f(x+\Delta x)}-\overbrace{(-0.5x^2+3x)}^{f(x)}}{\Delta x} = \ldots$$

- Berechnen Sie die Gleichung der Tangente t im Punkt P(2/f(2)).

Differenzialquotient für Polynomfunktionen – Regeln

Die Berechnung von momentanen Änderungsraten bzw. Differenzialquotienten $\frac{df}{dx}$ ist sehr aufwändig.
Wir wollen dafür Regeln herleiten. Diese erleichtern das Leben!

Beispiel 10 Regel entdecken

Lesen Sie aufmerksam die folgenden Beispiele durch!

- $f(x) = c$ (konstante Funktion)

Schritt 1 Differenzenquotient berechnen

$$[x;x+\Delta x]: \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Schritt 2, Differenzialquotient berechnen

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(0) = 0$$

Die Steigung des Graphen von f(x) an der Stelle x beträgt 0.

- $f(x) = x$ (also $n = 1$)

Schritt 1 Differenzenquotient berechnen

$$[x;x+\Delta x]: \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Schritt 2, Differenzialquotient berechnen

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(1) = 1$$

Die Steigung des Graphen von f(x) an der Stelle x beträgt 1.

- $f(x) = x^2$ (also $n = 2$)

Schritt 1 Differenzenquotient berechnen

$$[x;x+\Delta x]: \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Schritt 2, Differenzialquotient berechnen

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$$

Die Steigung des Graphen von f(x) an der Stelle x beträgt 2·x.

Jetzt sind Sie an der Reihe! Lösen Sie a) und b) und werden Sie ein Freak!

a) Berechnen Sie wie oben den Differenzialquotienten für $f(x) = x^3$.
Hinweis $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

b) Wie lautet wohl der Differenzialquotient von $f(x) = x^n$?

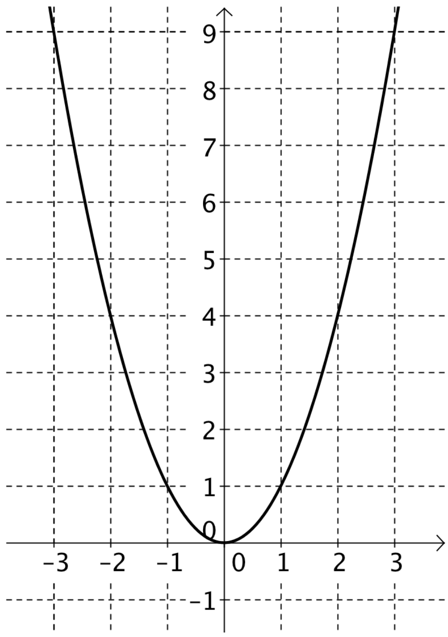
Mit der „**Potenzregel**“

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx}(x) =$$

können wir momentane Änderungsraten (Steigungen oder Geschwindigkeiten) von Potenzfunktionen ganz einfach berechnen!!!

Potenzregel anwenden

a) Abgebildet ist der Graph von $f(x) = x^2$.



> Welche Steigung hat die Kurve an der Stelle x = 1?

- ***Zeichnen*** Sie die „Tangente“ bei x = 1 ein.
  Lesen Sie die Steigung nach Augenmass ab:

  Steigung (der Tangente) ≈

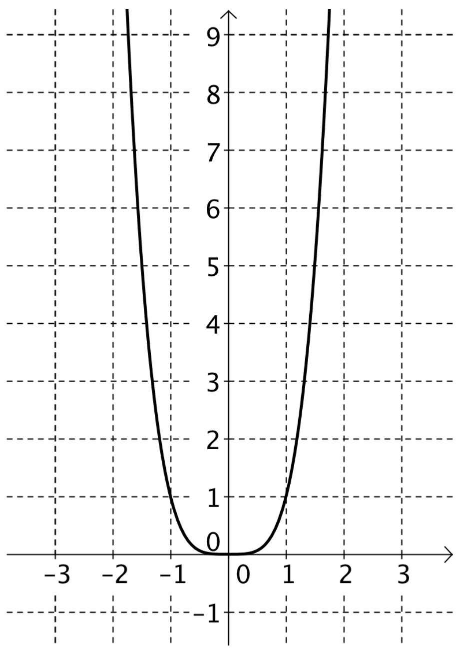
- ***Berechnen*** Sie die Steigung!
  Nutzen Sie Ihr erworbenes Wissen!

  Es ist: $\frac{df}{dx}(x) = 2 \cdot x$, also $\frac{df}{dx}(1) = 2 \cdot 1 = 2$

> Welche Steigung hat die Kurve an der Stelle x = –2?

Es ist: $\frac{df}{dx}(x) =$, also $\frac{df}{dx}(\quad) =$

b) Abgebildet ist der Graph von $f(x) = x^4$.



> Welche Steigung hat die Kurve an der Stelle x = 1?

- ***Zeichnen*** Sie die „Tangente“ bei x = 1 ein.

  Steigung (der Tangente) ≈

- ***Berechnen*** Sie die Steigung mit Hilfe der Potenzregel.

  Es ist: $\frac{df}{dx}(x) =$, also

> Welche Steigung hat die Kurve an der Stelle x = –2?

Es ist: , also

Summen- und Faktorregel

Um Differenzialquotienten von Polynomen zu bestimmen, müssen wir neben der „Potenzregel" noch zwei weitere Regeln kennen. Was vermuten Sie – wie lautet der jeweilige Differenzialquotient?

Summenregel

$f(x) = x^3 + x^2$

$\Rightarrow \ \frac{df}{dx}(x) =$

Faktorregel

$f(x) = 3 \cdot x^2$

$\Rightarrow \ \frac{df}{dx}(x) =$

Damit können wir alle Polynomfunktionen den Differenzialquotienten einfach bestimmen!

Summen- und Faktorregel anwenden

Abgebildet ist der Graph der Polynomfunktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$.

a) Welche Steigung besitzt die Kurve an der Stelle x = 2?

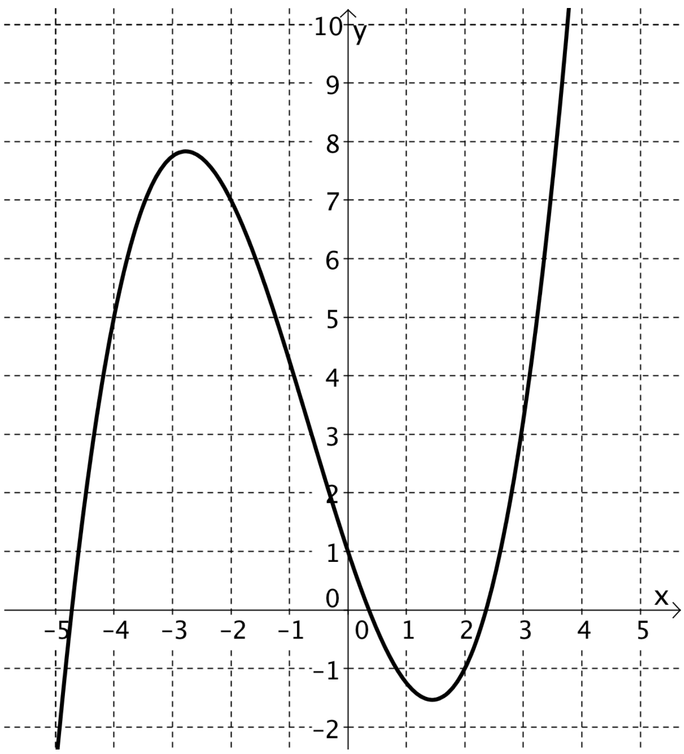
- ***Zeichnen*** Sie die „Tangente" an der Stelle x = 2 ein und schätzen Sie die

  Steigung ≈

- ***Berechnen*** Sie die Steigung mit Hilfe der Regeln!

  $\frac{df}{dx}(x) =$

  $\frac{df}{dx}(2) =$



b) Wählen Sie selber eine Stelle. Gehen Sie vor wie in a)!

- Zeichnen: Steigung ≈   Rechnen: $\frac{df}{dx}(\quad) =$

Bei welchen Punkten auf dem Graphen ist die Steigung Null? Können Sie diese Punkte berechnen?

Geometrische Anwendungen

Im Folgenden sind noch einige geometrische Anwendungen der Ableitung aufgeführt.
Bekannt ist bereits das Berechnen einer Tangente an einen Punkt auf der Kurve.

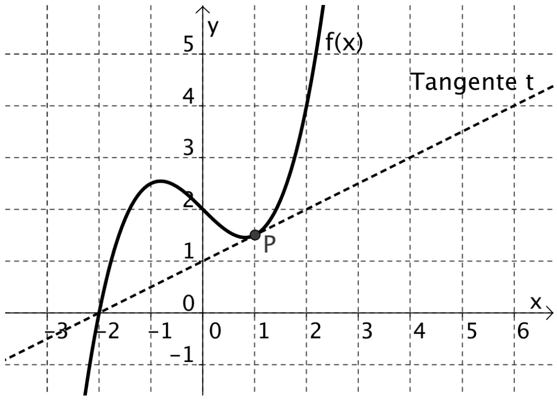
Beispiel 11 **Tangenten und Normalengleichung**

Gegeben: Funktion $f(x) = 0.5x^3 - x + 2$.

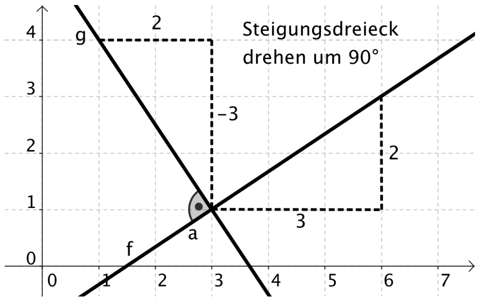
a) Gesucht: Tangente t an Graphen im Punkt P(1/f(1)).

b) Gesucht: Normale n an Graphen im Punkt P(1/f(1)).

Zeichnen Sie die Normale in die Skizze!



Hinweis zur Normalen



Zwei Geraden f und g stehen senkrecht aufeinander, falls für die Steigungen a_f und a_g gilt:

$$\mathbf{a_g \cdot a_f = -1} \quad \text{bzw.} \quad a_g = -\frac{1}{a_f}$$

Begründung

$a_f = \frac{2}{3}$ und $a_g = -\frac{3}{2}$, also $a_g \cdot a_f = \frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{2}) = -1$

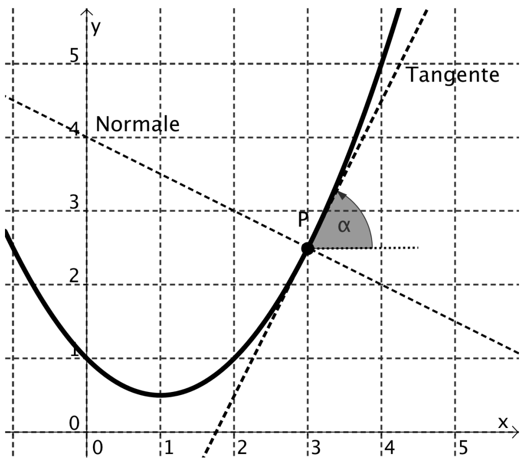
Eine senkrecht stehende Gerade heisst auch: eine **Normale**.

Beispiel 12 **Steigungswinkel**

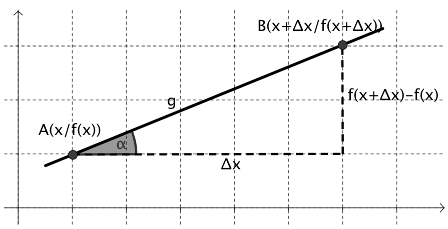
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0.5x^2 - x + 1$.
Bestimmen Sie im Punkt P(3/f(3))

a) den Steigungswinkel der Kurve und

b) die Gleichung der Tangente und der Normalen.



Hinweis zum Steigungswinkel



Die Steigung a einer Geraden ist gleich dem Tangens ihres Steigungswinkels:

$$\mathbf{a = \tan\alpha}$$

Begründung

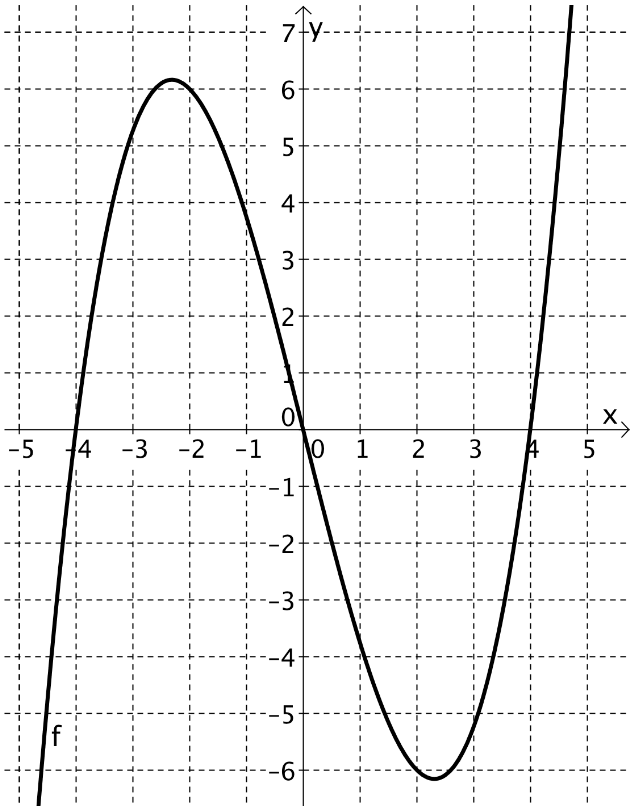
$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a$$

Ableitungsfunktion

Steigung als Funktion

Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = 0.25x^3 - 4x$.
Der Graph von f können wir zeichnen mit Hilfe einer *Wertetabelle.*

x	0	1	2	3	4	5	...
f(x)	0	−3.75	−6	−5.25	0	11.25	...



(Besitzt die Kurve eine Symmetrie?)

Wie lautet der Differenzialquotient $\frac{df}{dx}(x)$?

$\frac{df}{dx}(x) =$

Berechnen Sie den Differenzialquotienten für die angegeben x-Werte. Füllen Sie Wertetabelle aus!

x	0	1	2	3	4	5	...
$\frac{df}{dx}(x)$							...

Der Differenzialquotienten $\frac{df}{dx}(x)$ gibt für *jedes x* die momentane Änderungsrate bzw. die Steigung von f an der Stelle x an. ***Es liegt also wieder eine Funktion vor!***
Skizzieren Sie – direkt in das obige Koordinatensystem – den entsprechenden Graphen!

Definition

Gegeben ist eine Funktion f(x). Die Funktion

$$\frac{df}{dx}(x)$$

heisst **Ableitungsfunktion** (oder kurz: **Ableitung**) der Funktion f(x).

Die Ableitungsfunktion gibt für jedes x die momentane Änderungsrate bzw. die Steigung von f an der Stelle x an.

Beispiel *Die Ableitungsfunktion von* $f(x) = 0.25x^3 - 4x$ *lautet:* $\frac{df}{dx}(x) = 0.75x^2 - 4$.

Beispiel 13 Ableitungsfunktion

a) Skizzieren Sie den Graphen von $f(x) = -0.25x^2 + 2x$.

b) Wie lautet die Ableitungsfunktion $\frac{df}{dx}(x)$? Skizzieren Sie sie in das gleiche Koordinatensystem.

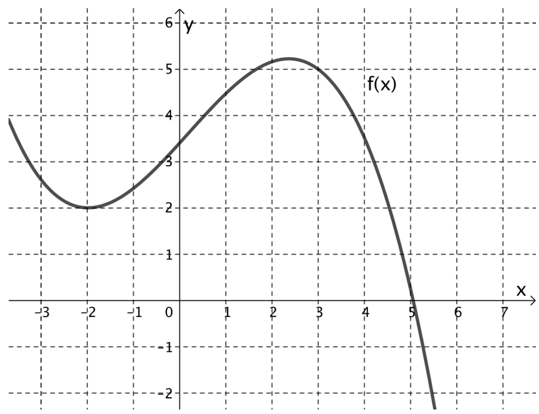
Zeichnerisch ableiten

Manche Aufgaben erfordern nur das Skizzieren einer Ableitung, ohne konkrete Angabe des Funktionsterms.
Hinweis zum Vorgehen

- Zuerst die Stellen markieren, wo die Ableitung Null ist
- Dann sich überlegen, ob die Kurve zwischen diesen Stellen oberhalb oder unterhalb verläuft.

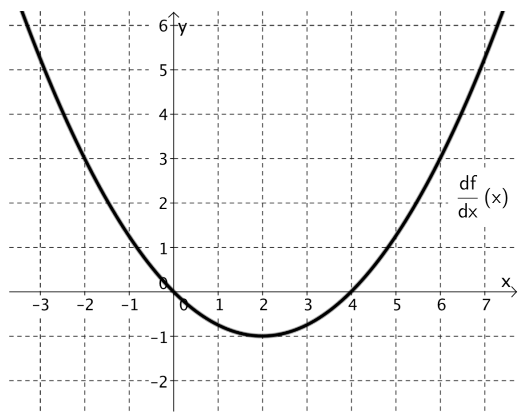
Beispiel 14 zeichnerisch ableiten

a) Skizzieren Sie die Ableitungsfunktion $\frac{df}{dx}(x)$ der abgebildeten Kurve. Leiten Sie *zeichnerisch* ab!



b) Zeichnen Sie selber eine beliebige Kurve f(x). Skizzieren Sie dann die Ableitungsfunktion $\frac{df}{dx}(x)$.

c) Zeichnen Sie den Graphen einer Funktion f, die die abgebildete Ableitungsfunktion $\frac{df}{dx}(x)$ besitzt.

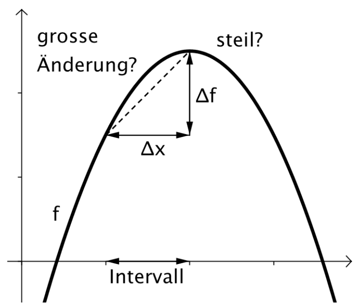


3 Zusammenfassung

Ergänzen Sie den Lückentext!

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$; $\frac{0}{0}$; *Ableitungsfunktion* ; Δf ; *„zusammenschrumpfen“* ; *graphisch ableiten* ; nx^{n-1} ;

ändert ; *Durchschnitt* ; *Differenzialquotient* ; *Ableitungsregeln* ; *Ableitung* ; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$; *Mass*



Die Differenzialrechnung beschäftigt sich damit, wie schnell sich eine Funktion (genauer: deren Funktionswerte)

________________________ .

Geometrisch bedeutet dies: wie „steil“ der Graph der Funktion ist.

Eine Änderung ist – mathematisch gesehen – eine Differenz.

Um eine Änderung zu bestimmen, bilden wir also die Differenz der entsprechenden Funktionswerte, abgekürzt mit dem Symbol

_____________ (lies: delta f)

Um zu erfahren, wie schnell (wie „heftig“) sich die Funktion ändert, müssen wir die Differenz Δf „relativ“ zu den x-Werten betrachten.
Dies führt uns auf den Differenzen*quotienten*

____

als ein _________________ dafür, wie schnell sich die Funktion im entsprechenden Intervall ändert.

Machen Sie sich das klar!*

* War jemand, der Ihnen sagt, er sei 30 km gefahren, schnell oder langsam unterwegs? Das lässt sich offensichtlich NICHT sagen, weil: man muss wissen, in welcher Zeit er die entsprechende Strecke zurückgelegt hat. Dies entspricht genau dem „Strecke pro (also geteilt durch) Zeit“.

Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

gibt uns an, wie schnell sich die Funktion im ________________________________ im entsprechenden Intervall ändert.

Um zu wissen, wie schnell sich die Funktion momentan („augenblicklich“) an einer bestimmten Stelle x ändert, lassen wir die Intervalllänge Δx immer mehr

____ .

Wir bestimmen den Differenzialquotienten ___________________________________ , welchen wir kürzer so schreiben:

$$\frac{df}{dx}(x).$$

Statt „Differenzialquotient“ sagen wir auch ___________________________________

Achtung wir dürfen nicht einfach $\Delta x = 0$ setzen, weil dann erhielten wir den undefinierten Ausdruck

___________ 

Und wie gross sollte das sein?

Um Veränderung bzw. Geschwindigkeit festzulegen braucht es immer eine „Umgebung“, also ein „Davor“ und ein „Danach“.

Machen Sie sich das klar!**

** Jemand macht ein Foto. Alles auf diesem Foto ist „eingefroren im (momentanen) Augenblick“. Man kann unmöglich sagen, wie schnell sich etwas bewegt, das man nur auf einem Foto sieht!

Dazu gehen wir immer in 2 Schritten vor

1 Schritt Differenzenquotient

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ bestimmen und so weit wie möglich vereinfachen

2 Schritt _______________________________________

Δx „schrumpfen“ ...

Dieses Vorgehen ist aufwändig. Eine Abkürzung gestatten einem aber die

____ .

Wir kennen bereits eine wichtige solche Regel, nämlich die Potenzregel: $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{df}{dx}(x) =$ ___________ .

Die Funktion, die jedem x die momentane Änderungsrate zuordnet heisst

____ .

Die Ableitungsfunktion kann – bei gegebenem Funktionsgraphen – auch zeichnerisch bestimmt werden.

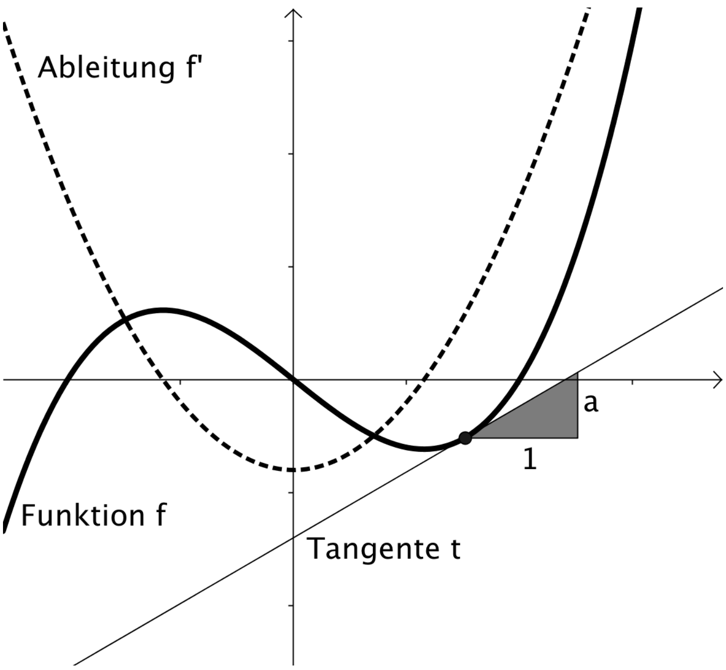
Dieses Vorgehen heisst

____ .

... und ist eigentlich gar nicht so schwierig...

Nennen Sie aus Ihrer Sicht **3 Grundaufgaben** im Zusammenhang mit der **Differenzialrechnung**.

- Erklären Sie, wie Sie diese lösen.
- Diese Aufgaben sollten sie beherrschen, also in vernünftiger Zeit lösen können.



Wo tritt der Wert a in der Skizze sonst noch auf? Zeichnen Sie ihn ein.

Grundaufgabe 1 **Differenzenquotient und Differenzialquotient, Tangente**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 3$.

- Beachten Sie im Folgenden die *korrekte mathematische Notation*!
- Machen Sie zu Ihren jeweiligen Berechnungen eine qualitative Skizze, wo ersichtlich wird, was berechnet wird.

a) Berechnen Sie den Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ auf dem Intervall $[x;x + \Delta x]$.

b) Berechnen Sie den Differenzialquotienten $\frac{df}{dx}(x)$.

d) Geben Sie die Gleichung der Tangente an im Punkt $Q(-2/f(-2))$.

Grundaufgabe 2 **Ableitung interpretieren als „Geschwindigkeit“**

a) Auf dem Mond lautet das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls

$s(t) = 0.8t^2$ (t in sec, s in m).

Wie gross ist die Momentangeschwindigkeit nach t = 10 Sekunden im freien Fall?

Berechnen Sie dazu zuerst den Differenzialquotienten $\frac{ds}{dt}(t)$.

b) Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Körper auf dem Mondboden auf, wenn er aus einer Höhe von 40 m herunterfällt?

Grundaufgabe 3 **Ableitungsregeln, Ableitungsfunktion**

a) Geben Sie die Ableitungsfunktion an:

- $h(t) = 0.5t^3 - 5t^2 + 6$
- der allgemeinen Polynomfunktion 4.Grades.

b) Zeichnen Sie den Graphen einer Funktion und leiten Sie graphisch ab. Erklären Sie Ihr Vorgehen.

Ein Auto bewegt sich gemäss $s(t) = t^2$.
Welche Geschwindigkeit besitzt es bei t = 0?
Wann ist die Geschwindigkeit erstmals grösser als 0?

Anhang 1 Parameter & Schnittwinkel

Parameter

a) Die Funktion $f(x) = x^3$ hat im Intervall $[0;b]$ die mittlere Änderungsrate 9. Bestimmen Sie b.

b) Gegeben ist $f(x) = ax^2$. Wie muss der Parameter a gewählt werden, wenn die mittlere Änderungsrate auf dem Intervall $[1;4]$ den Wert 15 annehmen soll?

Schnittwinkel

Die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x + 2$.

a) Skizzieren Sie beide Graphen qualitativ und berechnen Sie die Schnittpunkte.

b) Berechnen Sie, unter welchem Winkel sich die Graphen von f und g im Punkt S(1/1) *schneiden*.

Hinweis
Berechnen Sie dazu zuerst Sie den Steigungswinkel von f und den Steigungswinkel von g im Punkt S.
*Wie gross ist jetzt wohl **der „Schnittwinkel" von f und g** im Punkt S?*

Parameter & Schnittwinkel

Für welchen Wert von a schneiden sich die Parabeln $y_1 = x^2 + ax$ und $y_2 = x^2 + a$ unter einem rechten Winkel?

Lösungen

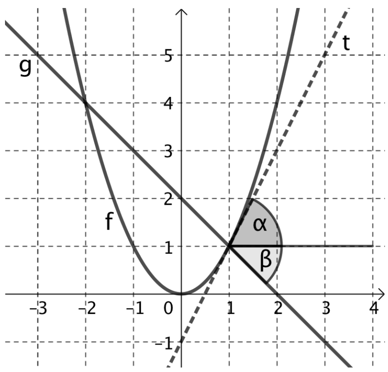
Parameter

a) b = 3

b) a = 3

Schnittwinkel

$\alpha = \tan^{-1}(f'(1)) = 63.4°$; $\beta = \tan^{-1}(g'(1)) = -45°$
$\Rightarrow$ Schnittwinkel $\gamma = 63.4° + 45° = 108.4°$



Parameter & Schnittwinkel

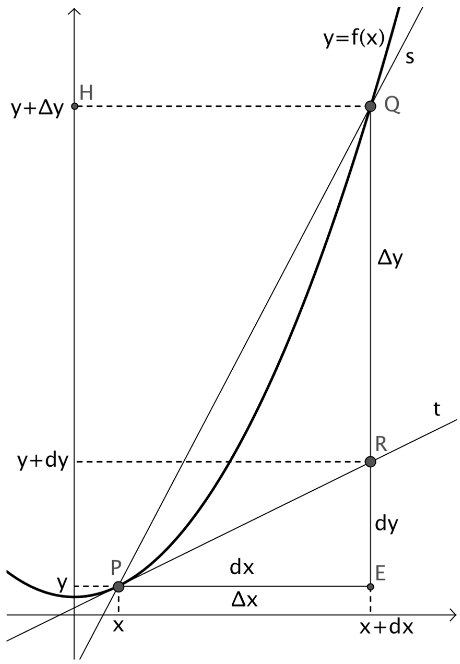
a = –2.5

Anhang 2 Leibniz und Differentiale

Gottfried Wilhelm **Leibniz** hat 1684 eine bahnbrechende Abhandlung veröffentlicht unter dem Titel:

„Neue Methode der Maxima und Minima sowie Tangenten, die sich weder an gebrochenen, noch an irrationalen Grössen stösst, und eine eigentümliche, darauf bezogene Rechenart“.

Die dort eingeführte Schreibweise mit so genannten Differentialen ist bis heute vor allem in den Naturwissenschaften verbreitet und wird nun kurz erklärt.



Wir betrachten den Graphen einer Funktion f mit $y = f(x)$ und die Tangente t an den Graphen von f im Punkt P.
Im Vergleich dazu betrachten wir eine Sekante s, die durch die Wahl der Schrittweite Δx bzw. Festlegung eines zweiten Punktes Q auf dem Graphen von f bestimmt ist.
Im Gegensatz zur Sekante schmiegt sich die Tangente in einer Umgebung des Berührpunktes P an die Kurve an. Wir vergleichen die Steigungsdreiecke für die Sekante s und die Tangente t miteinander. Dabei werden die Längen der Katheten im Steigungsdreieck der Sekante s mit Δx und Δy benannt.
Die Längen der Katheten im Steigungsdreieck der Tangente, für die Leibniz den Begriff **Differential** eingeführt hat, werden mit **dy** und **dx** benannt.
Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich
die Tangentensteigung $a_t = \frac{dy}{dx}$ und die Sekantensteigung $a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von f, für die zweite Koordinate von Q gilt: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.
Je kleiner das Differential dx gewählt wird, umso dichter liegen die Punkte Q und R beieinander, umso genauer wird also die folgende Abschätzung für die zweite Koordinate $y + dy$ des Punktes R auf der Tangente:

$$y + dy \approx f(x + dx) \; .$$

Das folgende Beispiel zeigt, wie Leibniz diese Abschätzung nutzte, um Tangentensteigungen zu berechnen.

Beispiel: Berechnen der Ableitung der Funktion $y = x^3$ mit Hilfe von Differentialen

Wir verwenden für „kleine Werte von dx“ die obige Abschätzung für die zweite Koordinate $y + dy$ von R bei einem festen Wert x.
Da R auf der Tangente liegt und die Tangente der Graph einer linearen Funktion ist, muss die zweite Koordinate von R, also $y + dy$, linear von dx abhängen.
Multipliziert man aber die rechte Seite der Abschätzung aus, so ergeben sich sowohl Summanden, die linear von dx abhängen, als auch solche für die das nicht gilt.
Leibniz hat daher die nicht-linearen Summanden einfach aus dieser Näherung entfernt, d.h. die zweite Koordinate von R mit dem linearen Teil der Näherung gleichgesetzt.

$$\boxed{\begin{aligned} & y = x^3 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = x^3 \\ & y + dy \approx (x + dx)^3 \\ & y + dy \approx \underbrace{x^3 + 3x^2 dx}_{\text{linear in dx}} + \underbrace{3x\cdot(dx)^2 + (dx)^3}_{\text{nicht-linear in dx}} \end{aligned}}$$

Durch Umstellen der Gleichung erhielt er so die Steigung der Tangente

$$a_t = \frac{dy}{dx} \; .$$

$$\boxed{\begin{aligned} & y + dy = x^3 + 3x^2 \cdot dx \quad \big| -y \quad (\text{mit } y = x^3) \\ & \frac{dy}{dx} = 3x^2 \end{aligned}}$$

Da Leibniz die Tangenten mit Hilfe seiner Differentiale rein rechnerisch bestimmen konnte, wurde der gesamte Themenbereich als **Differentialrechnung** bezeichnet.

Anhang 3 Ableitung „sehen“ in geometrischen Formen

Quadrat

Sie kennen das Quadrat...

... und Sie kennen die Formel für die Fläche des Quadrates.

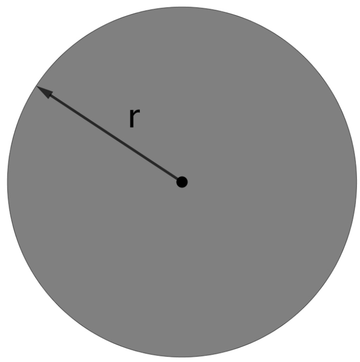
Sie lautet:

$$F(x) = x^2.$$

- Leiten Sie die Funktion für die Fläche ab.
- Interpretieren Sie Ihr Resultat geometrisch.

Kreis

Sie kennen den Kreis...



... und sie kennen die Formel für die Fläche des Kreises.

Sie lautet:

$$F(r) = \pi r^2.$$

- Leiten Sie die Funktion für die Fläche ab.
- Interpretieren Sie Ihr Resultat geometrisch.

Vergleich Quadrat und Kreis

Fällt etwas auf? Warum ist das so?

Die dreidimensionalen Analogien ...

... zu Quadrat und Kreis sind Würfel und Kugel.

Führen Sie die obigen Überlegungen durch.

Anhang 4 Klippenspringer im 20 Minuten

Überprüfen Sie die Eintauchgeschwindigkeit im nebenstehenden Text.

Hinweis

Für den freien Fall – also für eine gleichmässig beschleunigte Bewegung – gilt die Formel:

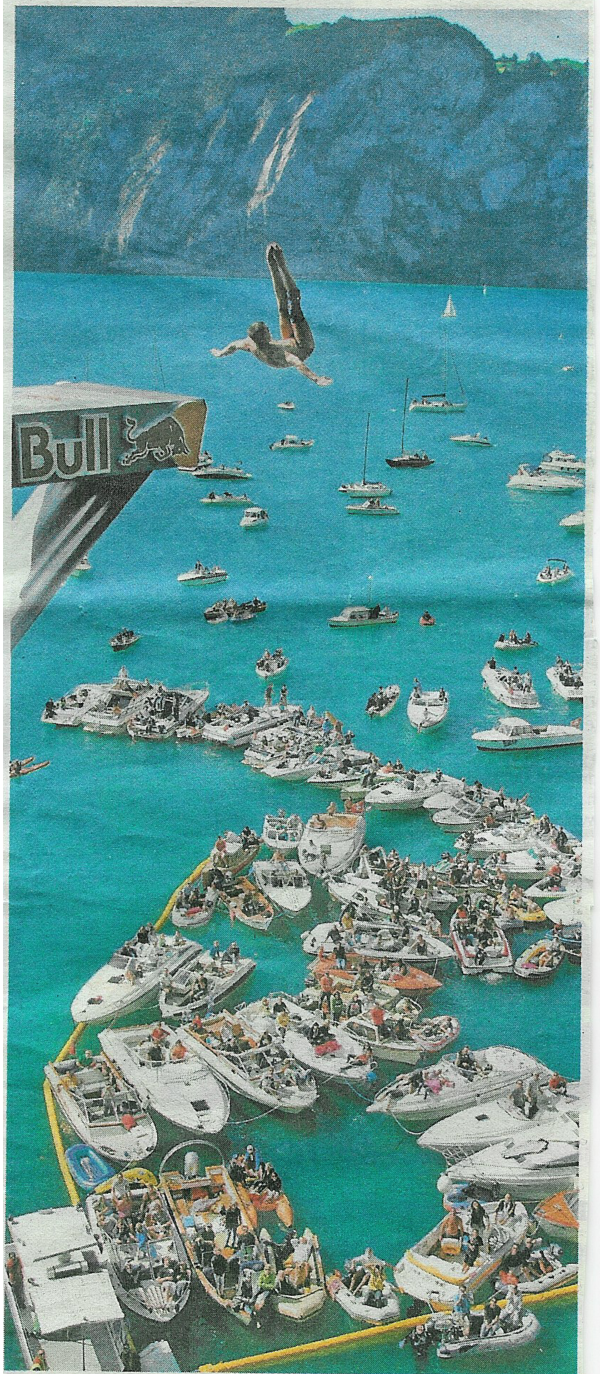
$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

wo $g \approx 9.8\ m/s^2$ *die Erdbeschleunigung ist.*

Eingesetzt ergibt sich also: $s(t) \approx 5t^2$.

MITTWOCH, 7. APRIL 2010 / WWW.20MINUTEN.CH

Klippenspringer machen wieder halt am Urnersee



SISIKON UR. Im Sommer tauchen die weltbesten Klippenspringer wieder ins Blau des Urnersees: Am 28. August macht die Red Bull Cliff Diving World Series erneut halt in Sisikon am Urnersee – dem einzigen Süsswasserstopp auf der Tour. Die Wagemutigen springen vor den Zuschauern aus 26 Meter Höhe und erreichen Tempi von über 85 km/h. FOTO: DEAN TREML

Interpretation der momentanen Änderungsrate

- Steigung (der Tangente)
- Geschwindigkeit (eines Surfers)
- Intensität (einer Änderung)