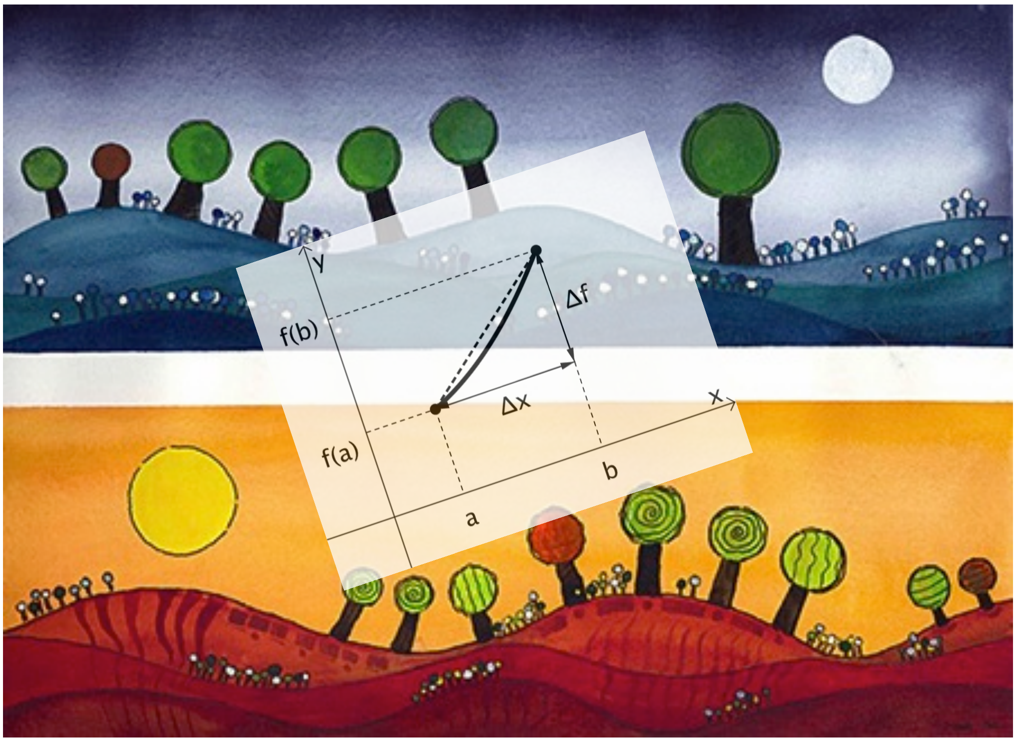
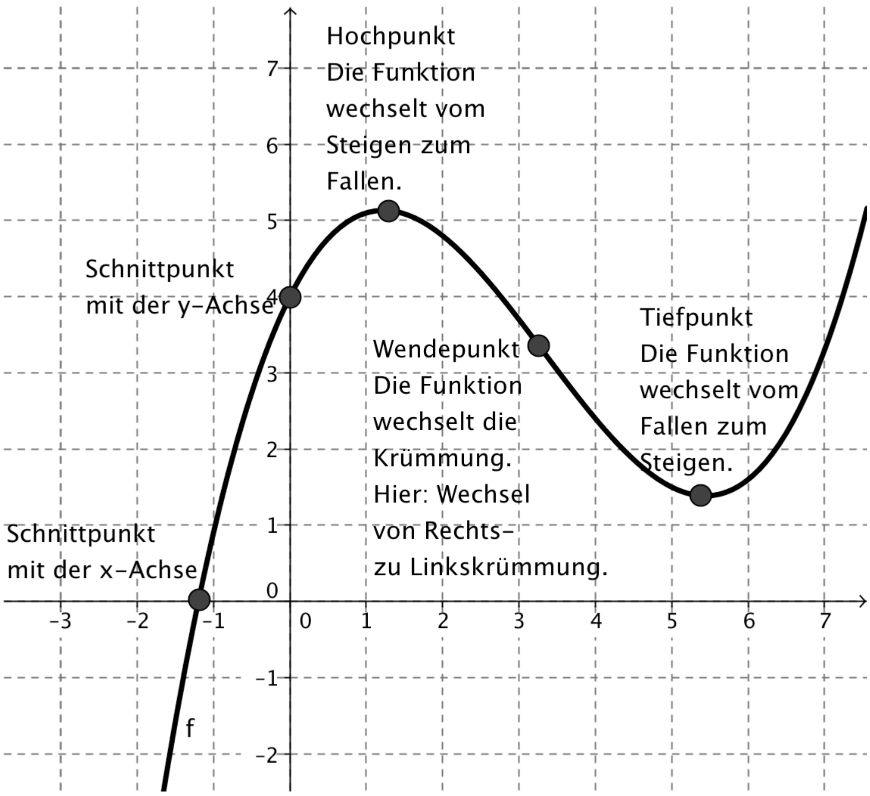
Datum Name



Differenzialrechnung 2

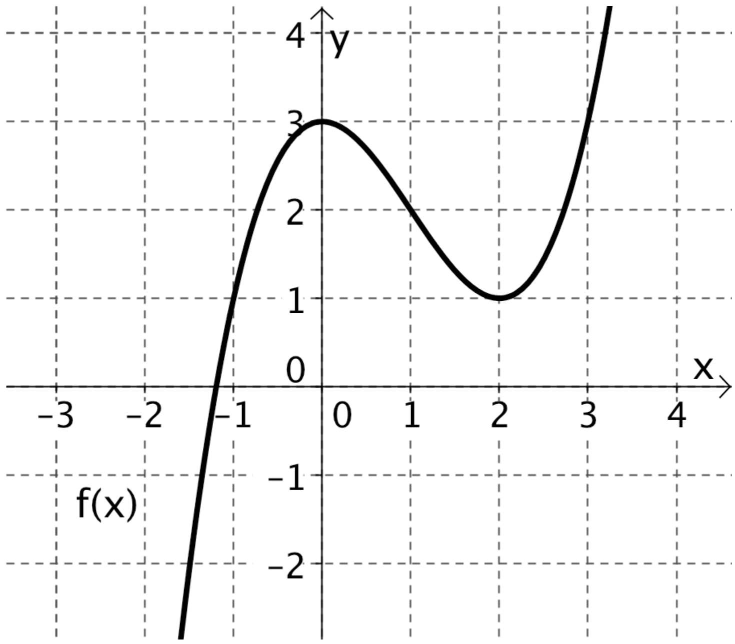
höhere Ableitungen
Extrem- und Wendepunkte
Untersuchung von Funktionen
Funktionsbestimmung



Funktionsverlauf und typische Eigenschaften...

Inhalt

1 Einstieg



Zeichnen Sie

- den **Hochpunkt** ein.
  Geben Sie die x– Koordinate und die y–Koordinate des Hochpunktes an.

  x_{MAX} = y_{MAX} =

- den **Tiefpunkt** ein.
  Wie lautet die **Minimumsstelle**?

  x_{MIN} =

- den **Wendepunkt** ein.
  Wie lautet die **Wendestelle**?

  x_W =

Färben Sie

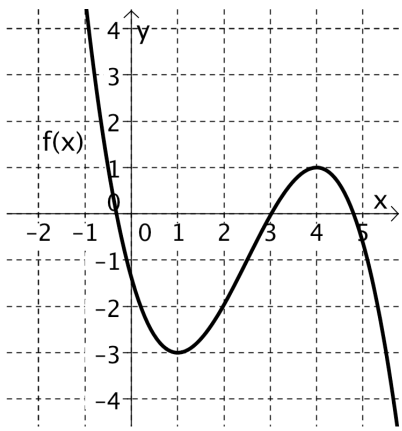
Merken Sie sich alle diese Begriffe!

- die **Rechtskurve** und
- die **Linkskurve** mit jeweils einer anderen Farbe ein.

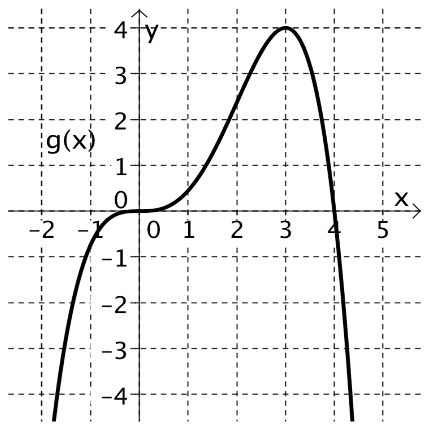
Beispiel 1 Grundbegriffe zeichnen

a) Zeichnen Sie ein: Extrempunkte (Hochpunkte, Tiefpunkte), Wendepunkte, Links– und Rechtskurven.

a₁)



a₂)



b) Extrempunkte

- Wie würden Sie einen Hochpunkt (Tiefpunkt) *definieren*?
- Wie könnte man einen Hochpunkt rechnerisch bestimmen? Geben Sie eine Idee an!

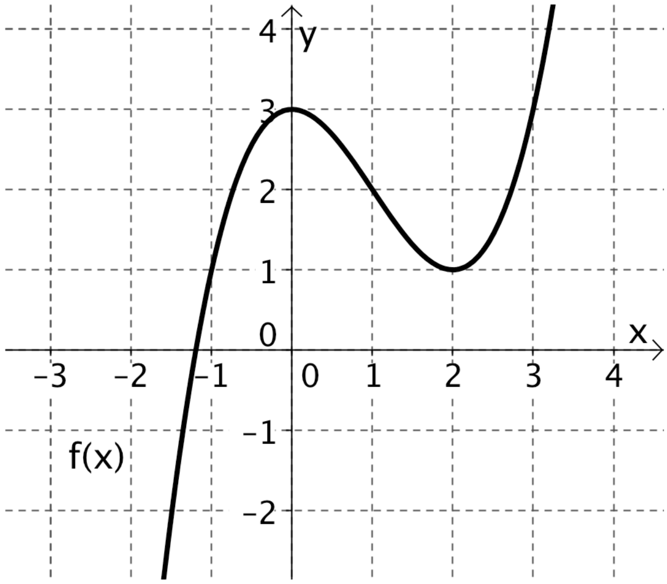
c) Wie b) für **Wendepunkte**.

d*) Sind Wendepunkte – in gewisser Weise – auch Extrempunkte?

Wendepunkte sind in gewisser Weise (!) auch Extrempunkte..., nämlich Extrempunkte der Ableitung.

Man könnte diese Extrempunkte der Ableitung bestimmen, wenn man die Ableitung ableitet...

Höhere Ableitungen



Skizzieren Sie – mit unterschiedlicher Farbe – die 1. und die 2. Ableitung!

Abgebildet ist der Graph der Funktion

$f(x) = 0.5x^3 – 1.5x^2 + 3.$

Natürlich können wir f(x) ableiten. Wir erhalten die

1.Ableitung

$f'(x) =$

Auch f'(x) können wir wieder ableiten.

Wir erhalten die

2.Ableitung

$f''(x) =$

Wie lauten die 3. Ableitung und die 4. Ableitung?

$f'''(x) =$ $f''''(x) =$

Sie haben „höhere Ableitungen" gebildet, chic!

Beispiel 2 **höhere Ableitungen**

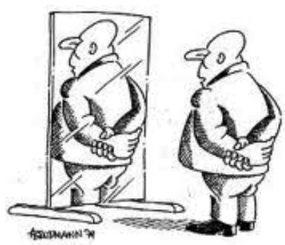
a) Bestimmen Sie jeweils die 1. und die 2.Ableitung.

- $f(x) = x^3 + ax$
- $O(r) = r^2(r^4 + 3r^3)$ ***Hinweis*** *zuerst ausmultiplizieren! NICHT faktorweise ableiten!*
- $y = x^n – x^{n–1}$

b) Welchen Grad besitzt die k-te Ableitung $f^{(k)}(x)$, wenn grad f = n ?

c) Die *„umgekehrte"* Fragestellung ist: Gegeben ist die 2. Ableitung $f''(x) = 4$.

- Wie lautet f(x) ?
- Es gibt mehrere Möglichkeiten!
  Welche gemeinsame „Form" haben diese Funktionen?

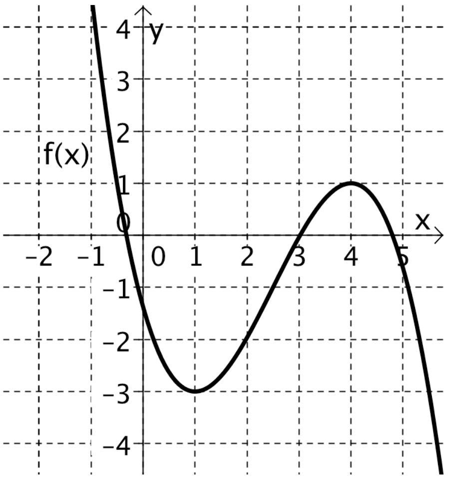


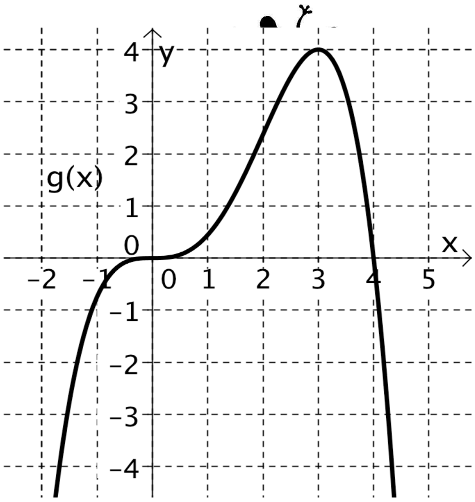
2 Differenzialrechnung 2

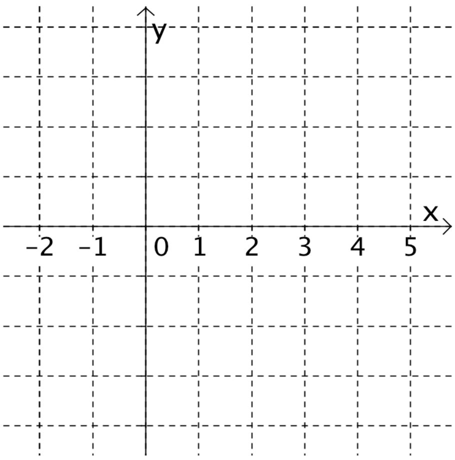
Welchen Zusammenhang gibt es zwischen

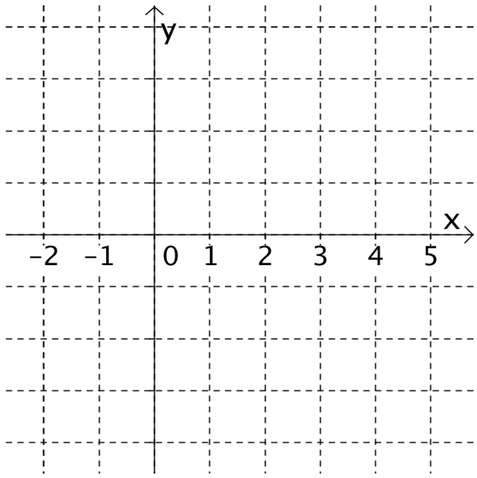
- Hochpunkten, Tiefpunkten, Wendepunkten einerseits ... und
- höheren Ableitungen andererseits?

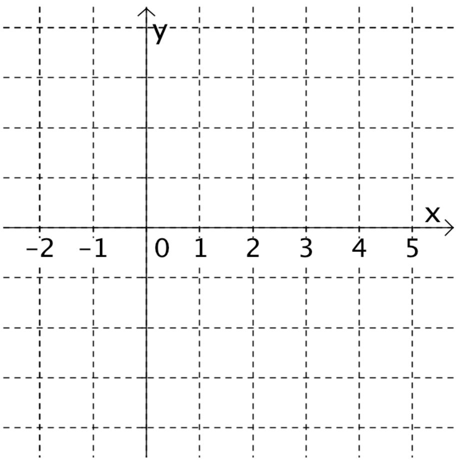
Leiten Sie die beiden Funktionen zweimal graphisch ab und „sehen“ Sie, was passiert!

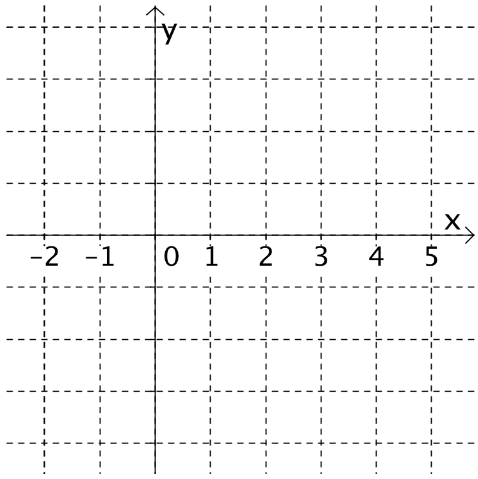












Rechnerische Bestimmung von Extrempunkten und Wendepunkten

Setzen Sie die richtigen Begriffe aus dem „Kasten“ ein.

Hinweis *Graphen und deren Ableitungen auf der linken Seite.*

fallend – linksgekrümmt *rechtgekrümmt – steigend* *>0 – $=0$ – <0*

Ableitungen und Steigung bzw. Krümmung

Wenn $f' > 0$, dann ist f ______________________________ ,

wenn $f' < 0$, dann ist f _______________________________

Wenn $f'' > 0$, dann ist f ___________________________________ ,

wenn $f'' < 0$, dann ist f ____________________________________ .

Und ganz wichtig:
*Ist **f’ = 0**, dann ist die **Steigung Null**!*

Und ganz wichtig:
*Ist **f’’ = 0**, dann ist die **Krümmung Null**!*

Finden von Extrempunkten

Extrempunkte (Hoch- bzw. Tiefpunkte) können nur dort liegen, wo die Kurve die Steigung Null hat.
Dabei hilft uns die 1.Ableitung.

Wollen wir Extrempunkte finden, müssen wir dort suchen, wo f’ = 0 ist. *

Wie können wir entscheiden, ob es ein Tiefpunkt oder ein Hochpunkt ist?
Wir überprüfen, ob sich der Punkt in einer Linkskurve (dann ist es ein Tiefpunkt) oder in einer Rechtskurve (Hochpunkt) befindet! Dabei hilft uns die 2.Ableitung.

Ein Tiefpunkt liegt vor, wenn die Steigung Null ist *und* die Kurve linksgekrümmt ist. (Klar?)
Dies formulieren wir mit Hilfe der Ableitungen!

Eselsbrücke

Ein Tiefpunkt liegt vor, wenn: f’(x) _________ *und* f’’(x) _____________

Ein Hochpunkt liegt vor, wenn die Steigung Null ist *und* die Kurve rechtsgekrümmt ist. (Klar?)
Formuliert mit Hilfe der Ableitungen!

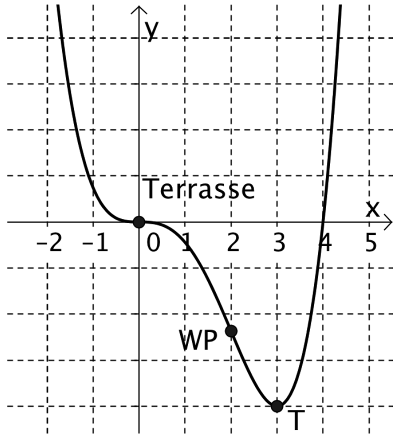
Ein Hochpunkt liegt vor, wenn: f’(x) _________ *und* f’’(x) _____________

Finden von Wendepunkten

Wendepunkte können nur dort liegen, wo die Kurve die Krümmung Null hat.
Dabei hilft uns die 2.Ableitung.

Wollen wir Wendepunkte finden, müssen wir dort suchen, wo f’’ = 0 ist. *

* Obwohl die „Chance“ in beiden Fällen gross ist, garantiert uns Steigung Null noch nicht das Vorliegen eines Extrempunktes; es könnte auch ein *Terrassenpunkt* sein.
Ebenso wenig garantiert uns Krümmung Null einen Wendepunkt! Es gibt Spezialfälle, vgl. dazu den **Anhang 1**.



Beispiel 3 Zusammenhang: Ableitungen, Steigung, Krümmung

Vervollständigen Sie die Tabelle mit: „**0**“, „**+**“ oder „**–**“.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$							
$f''(x)$							

Beispiel 4 Extrem- und Wendepunkte berechnen

Berechnen Sie bei folgenden Funktionen Extrem- und Wendepunkte.
Skizzieren Sie den Graphen. Färben Sie Links-und Rechtskurve unterschiedlich ein.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$

b) $g(x) = 0.25(x^4 - 4x^3)$

Zusatz Berechnen Sie die Gleichung der *Wendetangente*!

Beispiel 5 mit Parameter

a) Wie muss man den Parameter a wählen, damit $f(x) = ax^3 - 3x^2$ an der Stelle $x = 2$ einen Extrempunkt besitzt? Ist es ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt?

b) Bestimmen Sie k so, dass die Kurve $y = \frac{1}{4}x^3 + kx^2 + 2$ bei $x = 3$ eine Wendestelle besitzt.

Beispiel 6* Verwandtschaft und weiteres...

a) Wendepunkte und Extrempunkte sind eng verwandt, weil:

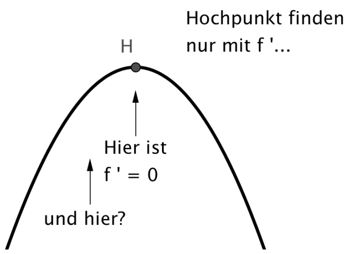
____________________ punkte sind ____________________ punkte der ersten Ableitung.

b) Wir haben die folgende Möglichkeit um einen Hochpunkt H(x/f(x)) ausfindig zu machen:

- Wir suchen diejenigen Stellen x, für die gilt: $f'(x) = 0$ ... und
- ... überprüfen, ob die Kurve bei diesem x rechtsgekrümmt ist (ob also gilt: $f''(x) < 0$).

Das heisst: wir brauchen für dieses Vorgehen die 2.Ableitung.

Wie könnte man vorgehen, wenn man die 2.Ableitung nicht hätte? Sondern nur die 1.Ableitung?
Geben Sie eine Idee an!



c) Geben Sie eine Funktion an, die bei $x = 0$ steigend und rechtgekrümmt ist.

- punkteplan

Untersuchung von Funktionen – Kurvendiskussion

Merke
Bei einer „Kurvendiskussion" werden *charakteristische Eigenschaften* einer Funktion *untersucht*.
Die beiden folgenden Beispiele zeigen, wie eine solche Untersuchung aussehen kann.

Beispiel 7 Kurvendiskussion

a) Untersuchen Sie $f(x) = –0.25x^4 + x^3$ und skizzieren Sie den Graphen in einem sinnvollen Intervall.

b) Wie a) für $g(x) = \frac{1}{9}x^3 – 3x$.

Solche Kurvenuntersuchungen lassen sich auch an Funktionen durchführen, die einen realen Vorgang modellieren. Die Resultate sind dann entsprechend zu interpretieren.

Lesen Sie das folgende Beispiel – mit angegebener Lösung! – aufmerksam durch.

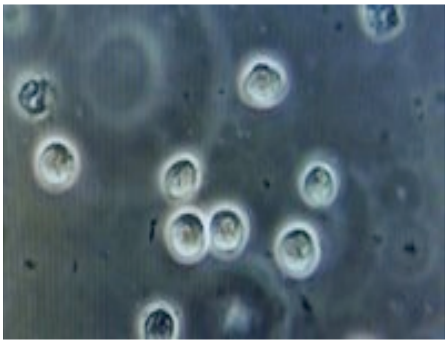
Beispiel 8 Virenerkrankung – mathematisches Modell

Der Verlauf einer Viruserkrankung wird durch die Funktion

$$C(t) = \frac{10^6}{8}(6t^2 – t^3)$$

modelliert.
Dabei ist t die Zeit seit Infektionsbeginn in Tagen und C die Anzahl Viren in einem ml Blutflüssigkeit.

- Untersuchen Sie die Funktion C.
- Skizzieren Sie den Graphen von C und C' in einem sinnvollen Bereich.
- Interpretieren Sie die Resultate.



Lösung

1 Funktionstyp, Definitionsbereich

Polynomfunktion 3. Grades. Mathematisch gesehen haben wir D = IR.
Allerdings machen sicher nur positive Einsetzungen für t Sinn, also $t \geq 0$.
Mit Hilfe der Achsenschnittpunkte sieht man schnell, dass der sinnvolle Bereich $0 \leq t \leq 6$ ist.

2 Achsenschnittpunkte

a) y-Achse (x = 0)

$C(0) = 0$

b) x-Achse (y = 0)

$$C(t) = \frac{10^6}{8}(6t^2 – t^3) = 0$$
$$t^2(6 – t) = 0$$
$$\Rightarrow\ t = 0;\ t = 6$$

3 Form

Überlegungen zu Symmetrie und Verhalten im Unendlichen machen hier keinen Sinn!
Die Funktion C(t) beschreibt die Anzahl Virionen nur im Intervall [0;6].

4 Spezielle Punkte

Ableitungen: $C'(t) = \frac{10^6}{8}(12t - 3t^2)$; $C''(t) = \frac{10^6}{8}(12 - 6t)$

a) Punkte mit Steigung 0 *(C'(t) = 0)*

$\frac{10^6}{8}(12t - 3t^2) = 0$

$t(12 - 3t) = 0$

$\Rightarrow\ t = 0;\ C(0) = 0;\ (0/0)$

$\Rightarrow\ t = 4;\ C(4) = 4\cdot10^6;\ (4/4\cdot10^6)$

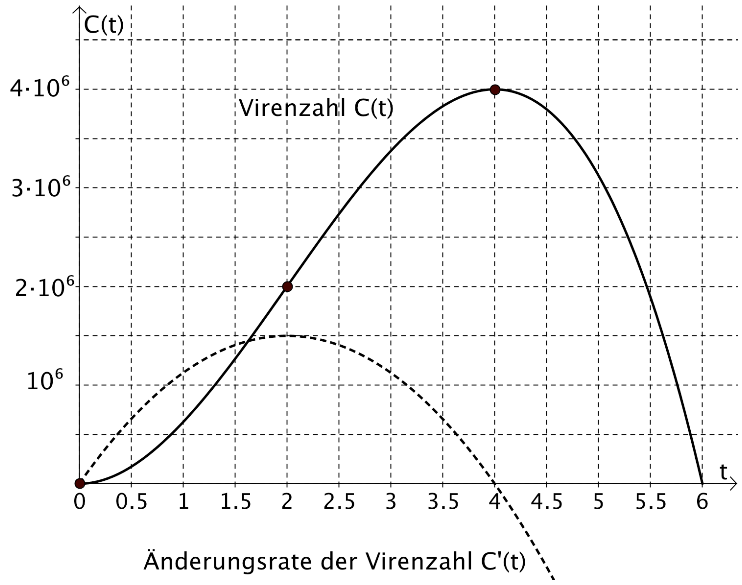
b) Punkte mit Krümmung 0 *(C''(t) = 0)*

$\frac{10^6}{8}(12 - 6t) = 0$

$\Rightarrow\ t = 2;\ C(2) = 2\cdot10^6;\ (2/2\cdot10^6)$

Graph

Der sinnvolle Bereich ist: $0 \le t \le 6$.
Beachten Sie die Einteilung der y-Achse!
Bei angewandten Aufgaben ist eine sinn-volle Einteilung der Achsen unerlässlich!



Allenfalls

Überprüfen:

<u>t = 0</u>: $C''(0) > 0$; $T(0/0)$

<u>t = 4</u>: $C''(4) < 0$; $H(4/4\cdot10^6)$

Interpretation

Die Funktion C gibt die Anzahl Viren an, die sich in 1 ml Blut befinden.

*Die **Ableitung C'** gibt die **Zunahme/Abnahme der Virenzahl** (in 1 ml Blut) **pro Tag** an:*
Die Konzentration der Viren steigt zunächst langsam, dann zunehmend schneller an.

Im Wendepunkt, also nach 2 Tagen, ist die momentane Zuwachsrate C' am grössten.
Nun antwortet das Immunsystem auf die Infektion und bremst die Zuwachsrate.

Die Anzahl Viren wächst langsamer und hat am 4.Tag ihr Maximum erreicht. Danach bricht die Infektion schnell zusammen. Die Änderungsrate wird negativ.

Nach 6 Tagen sind die Viren vollständig eliminiert.

Bestimmung von Funktionen

Merke
Die Funktionsbestimmung ist das *Gegenteil* der Funktionsuntersuchung.

Während bei der Kurvenuntersuchung die *Funktion vorgegeben* ist und dann charakteristische Eigenschaften berechnet werden, sind bei der Funktionsbestimmung *charakteristische Eigenschaften vorgegeben* und die zugehörige Funktion soll berechnet werden.

Solche Aufgaben führen auf lineare Gleichungssysteme, welche – vor allem bei angewandten Aufgaben - sinnvollerweise mit dem TR gelöst werden.

Vorgehen
Sind *n Bedingungen* (und damit n Gleichungen) vorgegeben, führt dies bei Polynomfunktionen auf einen *Funktionsansatz vom Grad n – 1*.

Beispiel 9 Sonnenblume

Das Wachstum einer Sonnenblume soll modelliert werden mit Hilfe einer Polynomfunktion.
Aus den Messungen ist das Folgende bekannt:

- Zu Beginn der Messung beträgt die Höhe 0.10 m.
- Nach 100 Tagen beträgt die Höhe 1.27 m.
- Nach 200 Tagen ist die Sonnenblume mit 2.00 m ausgewachsen.

Zeichnen Sie zuerst einen möglichen, qualitativen Verlauf der Kurve!

a) Bestimmen Sie eine Polynomfunktion (möglichst niedrigen Grades), welche den Verlauf des Sonnenblumenwachstums wiedergibt.

b) Drei Tage bevor die Sonnenblume den stärksten „Wachstumsschub“ hat, soll ein spezieller Dünger gegeben werden. Wann ist das?

Beispiel 10 Kurvenbestimmung abstrakt

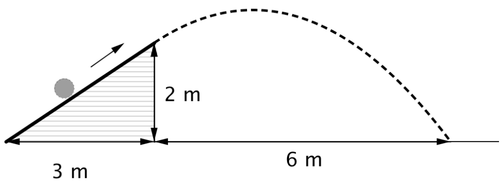
Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3.Grades mit folgenden Eigenschaften:

a) Nullstelle bei $x_N = 0$, Hochpunkt H(2/4) und Wendestelle bei $x_W = 1$.

b) Symmetrie zum Ursprung und Tiefpunkt T(1/–2).

Beispiel 11 „tangentialer Ansch(l)uss“

Eine Kugel wird über die Rampe „geschossen“.
Sie fliegt 6 m weit. Wie hoch fliegt sie?



Bemerkung statt „tangential“ anschliessen sagt man auch „knickfrei“ anschliessen. Begriffe kennen!

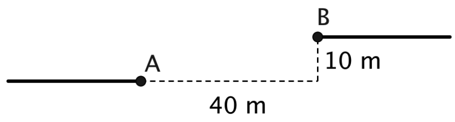
Anwendungen

Beispiel 12 **Speer und Strasse Strassenverbindung: tangential, „knickfrei“**

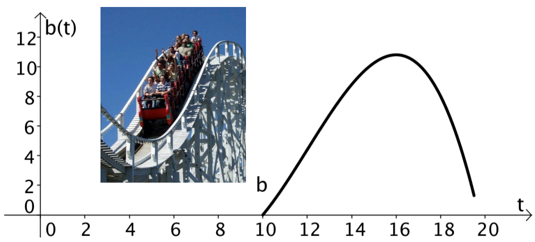
a) Ein Speer wird aus 1.90 m Höhe schräg nach oben geworfen. 35 m weiter (in horizontaler Richtung) hat er die höchste Stelle 9 m über dem Boden erreicht.
Welche Wurfweite wurde erzielt und wie gross war beim Abwurf der Winkel α gegen die Horizontale?

Hinweis *Natürlich muss zuerst ein Koordinatensystem gewählt werden.*

b) Zwei gerade Strassenstücke sollen durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion möglichst glatt miteinander verbunden werden. Beschreiben Sie das fehlende Stück Strasse in beiden Figuren durch eine ganzrationale Funktion unter der Bedingung, dass die Strassenteile bei den Übergangsstellen *tangential* bzw. *knickfrei* ineinander übergehen.



Beispiel 13 **Freizeitpark**



Die Graphik gibt vereinfacht die Anzahl b der Besucher (gemessen in tausend Personen) in einem Freizeitpark während den Öffnungszeiten von 10.00 Uhr bis 19.30 Uhr an. Der Funktionsterm dazu lautet:

$$b(t) = -0.05t^3 + 1.8t^2 - 19.2t + 62.5 \text{ (t in Stunden).}$$

a) Berechnen Sie die Zahl der Besucher, die an einem Tag eine Stunde nach Öffnung im Park sind.

b) Erfahrungsgemäss ist an den Imbissstuben im Park mit erhöhtem Andrang zu rechnen, wenn mindestens 9500 Besucher im Park sind. Für den Direktor besteht dann die Notwendigkeit, zusätzliches Personal bereit zu stellen. Ermitteln Sie den Zeitraum, wann dies erforderlich ist.

c) Wann ist die Zahl der Besucher maximal? Wie viele sind es?

d) Berechnen Sie b’(15) und erläutern Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

e) Berechnen Sie, um welche Uhrzeit der Andrang an den Kassen sehr wahrscheinlich* am grössten ist. Berechnen Sie weiter, wie viele Besucher dann stündlich in den Park wollen.

f) Der Verkauf einer Karte dauert pro Besucher ungefähr eine halbe Minute. Berechnen Sie, wie viele Kassen geöffnet sein müssen, damit die Besucher auch bei grösstem Andrang am Eingang nicht warten müssen.

g) Berechnen Sie, wie viele Besucher sich beim Schliessen noch im Park aufhalten. Berechnen Sie weiter, wie viele Besucher dann stündlich den Park verlassen wollen.

h) Berechnen Sie, um welche Uhrzeit schliesslich keine Besucher mehr im Park sind.

i) An einem sehr schönen Sommertag sind abweichend von der durchschnittlichen Besucherzahl um 11 Uhr bereits 3000 Besucher im Park. Geben Sie eine oder auch mehrere rechnerisch begründete Prognosen an, mit wie vielen Besuchern an diesem Tag maximal zu rechnen ist.

***Achtung**
warum “sehr wahrscheinlich”?

Lösung Beispiel 13

a) *b(11) = 2.55; also ca. 2'550 Besucher*

b) *b(t) = 9.5; t_1 = 17.6; t_2 = 14.1; t_3 = 4.3; also ca. zwischen 14 Uhr und 17.30.Uhr*

c) *b'(t) = 0; t_1 = 16; t_2 = 8 (16 Uhr Maximumsstelle vgl. Graph)*
um 16 Uhr gab es mit b(16) = 11'300 die maximale Besucherzahl

d) *b'(15) = 1.05*
Interpretation: – um 15 Uhr betrug die momentane Änderungsrate 1'050 Besucher pro Stunde
– um 15 Uhr stieg die Anzahl Besucher um stündlich 1'050 Besucher

e) *b''(t) = 0; t = 12 (Wendestelle vgl. Graph)*
um 12 Uhr ist die (momentane) ***Änderung*** *der Besucherzahl am* ***grössten****; um diese Zeit wollen – sofern nicht schon wieder Besucher den Park verlassen! – am meisten Besucher in den Park.*
b'(12) = 2.4; ca. 2'400 Besucher wollen dann stündlich in den Park (geometrisch: Steigung der Wendetangente)

f) *Pro Kasse können $2 \cdot 60 = 120$ Besucher pro Stunde bedient werden, also müssten $\frac{2400}{120}$ = 20 Kassen offen sein.*

g) *b(19.5) = 1.8; b'(19.5) = –6.0*
Beim Schliessen des Parks um 19.30 befinden sich noch 1'800 Besucher im Park.
Die stündliche Änderung wäre dann 6'000 Personen! D.h. bei diesem „Tempo" wird es also sicher keine Stunde mehr gehen, bis alle Besucher den Park verlassen haben...

h) *b(t) = 0*
TR: t_1 = 19.8; t_2 = 9.7; t_3 = 6.5
Es wird knapp vor 20 Uhr bis alle Besucher den Park verlassen haben.

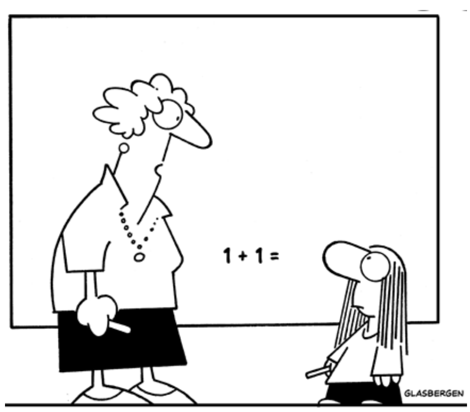
i) *Prognosen:*
Zu berechnen ist z.B. der prozentuale Unterschied der Besucher um 11 Uhr zwischen dem durchschnittlichen und dem aktuellen Wert:

$$\frac{3000}{b(11)} = 1.18$$

und mit diesem Prozentsatz die Hochrechnung des zum Zeitpunkt 16 Uhr angenommenen Maximums der Zahl der Besucher von der durchschnittlichen auf die aktuelle Besucherzahl:

$$1.18 \cdot b(16) = 13.3.$$

Es ist möglich, dass an diesem Tag bis zu 13'300 Besucher in den Park strömen.



"Yes, this will be useful to you later in life."

3 Zusammenfassung

Grundaufgabe 1 **Kurvenuntersuchung**

a) Wie bestimmt man die Extrempunkte einer Funktion?

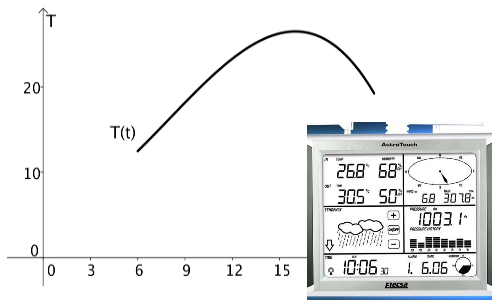
b) Sei $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
Führen Sie eine vollständige Kurvenuntersuchung durch, *ohne TR*.
Skizzieren Sie dann den Graphen in einem sinnvollen Intervall.

- punkteplan

Grundaufgabe 2 **Anwendung: Temperaturverlauf**

In modernen Wetterstationen werden rund um die Uhr Daten über die Lufttemperatur durch elektronische Messautomaten erfasst.
Für $6 \le t \le 21$ stellt die Kurve modellhaft den Temperaturverlauf während eines bestimmten Tages in der Zeit von 6.00 Uhr bis 21.00 Uhr dar.

Es ist: $T(t) = -0.01t^3 + 0.24t^2 + 6$ (t = Uhrzeit in h,T(t) = Temperatur in °C.)



a) Berechnen und interpretieren Sie – mit Einheiten – die Werte T(12), $\frac{T(15)-T(12)}{15-12}$ und T'(12).

b) Ermitteln Sie das Zeitintervall, in dem die Temperatur von 20 °C überschritten wird.

c) Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der der Tageshöchstwert erreicht wird, und prüfen Sie, ob es sich um einen Sommertag handelt. (Sommertag: Tag, dessen Höchsttemperatur 25 °C übertrifft)

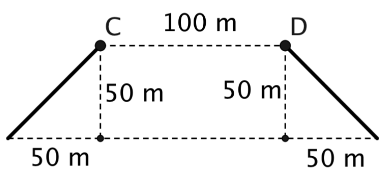
d) Interpretieren Sie die Koordinaten des Wendepunktes und die Steigung der Wendetangente.

Grundaufgabe 3 **Funktionsbestimmung**

a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion (möglichst niedrigen Grades), deren Graph die x-Achse bei x = 2 berührt und in P(0/–2) einen Terrassenpunkt hat.

b) P(1/4) ist Wendepunkt einer zur y-Achse symmetrischen ganzrationalen Funktion 4.Grades.
Weiter schneidet die Wendetangente in P die x-Achse bei x = 2.
Bestimmen Sie eine Polynomfunktion, welche die angegebenen Eigenschaften aufweist.

c) Zwei gerade Strassenstücke sollen durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion möglichst glatt miteinander verbunden werden.
Beschreiben Sie das fehlende Stück Strasse in der Figur durch eine ganzrationale Funktion unter der Bedingung, dass die Strassenteile bei den Übergangsstellen *tangential* bzw. *knickfrei* ineinander übergehen.



Anhang Spezial- und andere Fälle (kreative Ideen sind gefragt ...)

Ein Rätsel

Von einer Stelle x einer Funktion f ist bekannt:

- $f'(x) = 0$ und
- $f''(x) = 0$

Was ist los an der Stelle x?

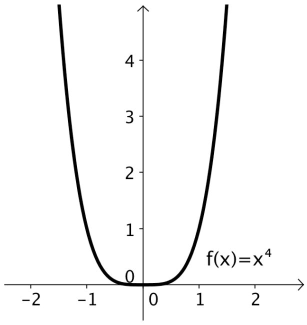
Liegt bei x ein

- Terrassenpunkt?
- Hochpunkt?
- Tiefpunkt?

Oder: lässt sich das so gar nicht sagen?

Hinweis *Untersuchen Sie dazu die Funktionen $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ und $f(x) = -x^4$.*

Wie könnte man vorgehen, um zu entscheiden, welcher „Fall" vorliegt?
Geben Sie verschiedene Möglichkeiten an!



Es ist $f''(0) = 0$.
Das heisst: die Krümmung ist 0.
Die Kurve ist im Punkt (0/0) eben sehr „bauchig"!

Spezialfälle

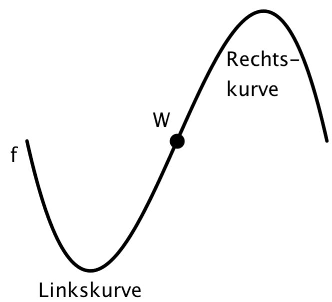
Die beiden folgenden Funktionen ähneln dem obigen „Rätselfall".
Untersuchen Sie sie auf spezielle Punkte (Extrem- und Wendepunkte). Skizzieren Sie den Graphen.

a) $f(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^4$ **b)** $g(x) = x^4 - 4x$

c*) Was versteht man wohl unter einem „**Flachpunkt**"? Überlegen oder googeln.

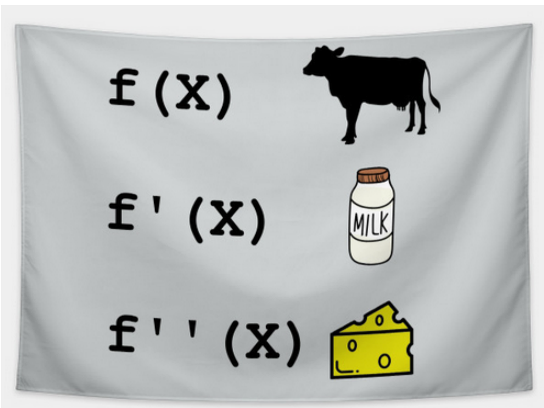
Links-rechts und rechts-links Wendepunkte

Abgebildet sehen Sie einen Wendepunkt W.
Genauer: einen links-rechts-Wendepunkt, weil er am Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve steht.



a) Zeichnen Sie einen rechts-links-Wendepunkt.

b) Geben Sie eine Möglichkeit an, wie sich rechnerisch zwischen diesen beiden „Typen" von Wendepunkten unterscheiden lässt.


f(X)
f'(X)
MILK
f''(X)