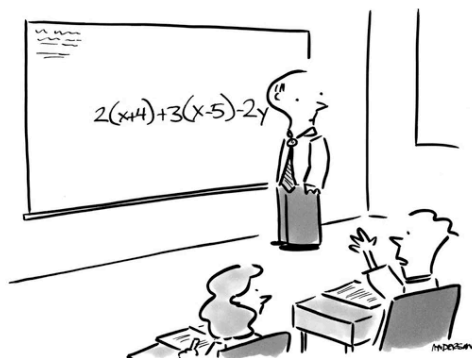




# Zusammengesetzte Funktionen & Ableitungsregeln

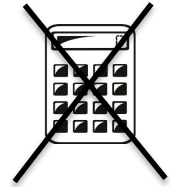
natürliche Exponentialfunktion  
zusammengesetzte Funktionen  
Ableitungsregeln  
Graphen skizzieren



"How come we never complicate equations?"

<b>0 Rückblick</b>	<b>3</b>
• Grundfunktionen – Bausteine	
• Differenzialrechnung 1 & 2	
<b>1 Einstieg</b>	<b>7</b>
• Die wichtigste Funktion?	
• Zusammengesetzte Funktionen	
<b>2 Zusammengesetzte Funktionen &amp; Ableitungsregeln</b>	<b>9</b>
• Ableitung der Grundfunktionen	
• Summen von Funktionen & Summenregel	
• Produkt von Funktionen & Produktregel	
• Quotient von Funktionen & Quotientenregel	
• Verkettung von Funktionen & Kettenregel	
<b>3 Zusammenfassung</b>	<b>16</b>
<b>4 Anhang</b>	<b>17</b>
• Speedtest: Zahlen schätzen	
• Speedtest: einfache Graphen zeichnen	
• Speedtest: Ableitungsregeln	
• Tangenten und Parameter	

# 0 Rückblick



## Grundfunktionen

Im Folgenden blicken wir auf „Grundfunktionen“ zurück..

Aus diesen Grundfunktionen werden bald kompliziertere Funktionen „zusammengesetzt“ – sie sind die **Bausteine** für alles weitere.



Deshalb ist es wichtig, die **Graphen und Eigenschaften dieser Funktionen** „par coeur“ zu kennen.

### Potenzfunktionen

---

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = x^3$

**Graphen**

b) Berechnen Sie die x-Koordinate. Der Punkt  $P(x/6)$  liegt auf dem Graphen von

- $f(x)$
- $g(x)$

**Gleichungen**

c) Die Potenzfunktion lautet allgemein  $f(x) = x^n$ .  
Diese „Mutterfunktion“ lässt sich variieren zu:

$$f(x) = ax^n + c$$

- Welchen Einfluss besitzt a?
- Welchen Einfluss besitzt c?

**allgemeine Form**

**Einfluss der Parameter**

d) Nullstellen.

Warum sind sie wichtig? Wie berechnet man sie?

Hat die Funktion  $f(x) = ax^n + c$  Nullstellen?

**Nullstellen**

### Exponentialfunktionen

---

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) – d) wie oben.

**Systematik**

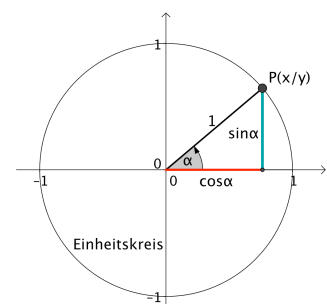
### Trigonometrische Funktionen

---

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

- $f(x) = \sin x$
- $g(x) = \cos x$

b) – d) wie oben.



## weitere Funktionen

---

**a) Wurzelfunktion**  $f(x) = \sqrt{x}$ .

- Zeichnen Sie den Graphen.
- Verallgemeinern Sie.
- Bei der Wurzelfunktion handelt es sich im Grunde um eine Potenzfunktion. Erklären Sie.

**b) Kehrwert**  $f(x) = \frac{1}{x}$

- Zeichnen Sie den Graphen.
- Verallgemeinern Sie.
- Bei der Kehrwertfunktion handelt es sich im Grunde um eine Potenzfunktion. Erklären Sie.

**c) Polynomfunktion**

- Wie lautet die Gleichung einer Polynomfunktion n-ten Grades?
- Polynomfunktionen sind einfach „zusammengesetzt“ aus Potenzfunktionen. Erklären Sie.
- Für was kann man Polynomfunktionen überhaupt brauchen im Leben?  
Zum Beispiel, wenn man eine Kiste bastelt...  
Welches ist die grösste Schachtel, die sich aus einem A4-Papier falten lässt?
- Und jetzt?  
Wie sieht der Graph aus einer Polynomfunktion?



Funktionen sind das zentrale Werkzeug, um Zusammenhänge von Grössen zu beschreiben und rechnerisch zugänglich zu machen.



In einer sich dauern verändernden Welt ist es natürlich wichtig zu wissen, ob und wenn ja, wie schnell sich etwas verändert. Diese Aufgabe löst die Differenzialrechnung...



## Differenzialrechnung 1 & 2

Das **Untersuchen/Analysieren von Funktionen** ist zentral. Die relevanten Eigenschaften fassen wir immer in **4 Schritten** zusammen.

Die Berechnung spezieller Punkte (Extrem- und Wendepunkte), welche wichtig sind um den Kurvenverlauf darzustellen, gelingt uns mit Hilfe der **Differenzialrechnung**.



- punkteplan

Untersuchen Sie die Polynomfunktion  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  auf relevante Eigenschaften. Skizzieren Sie den Graphen.

### Lösung

#### 1 Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R}$$

#### 2 Achsenschnittpunkte

**y-Achse**  $f(0) = 0$

**x-Achse**  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = 0$   
 $x(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3$

#### 3 Spezielle Punkte

Ableitungen:  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ ;  $f''(x) = 6x - 12$

**Punkte mit Steigung 0, also  $f' = 0$**

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \text{ (Mitternachtsformel)} \Rightarrow (1/4); (3/0)$$

Überprüfen:  $f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow (1/4)$  ist **Hochpunkt**;  $f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow (3/0)$  ist **Tiefpunkt**

**Punkte mit Krümmung 0, also  $f'' = 0$**

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow (2/2) \quad (\text{Überprüfen: } f'''(x) = 6 \Rightarrow (2/2) \text{ ist } \mathbf{Wendepunkt})$$

#### 4 Graph

Das Zeichnen des Graphen beruht auf den gemachten Berechnungen.

- Sind aufgrund der Berechnungen 1 bis 3 noch verschiedene Verläufe denkbar? Warum? Warum nicht?
- Müssen wir noch mehr wissen? Welche Möglichkeiten haben wir?

**Globalverhalten**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty;$$

d.h. „von links unten, nach rechts oben“

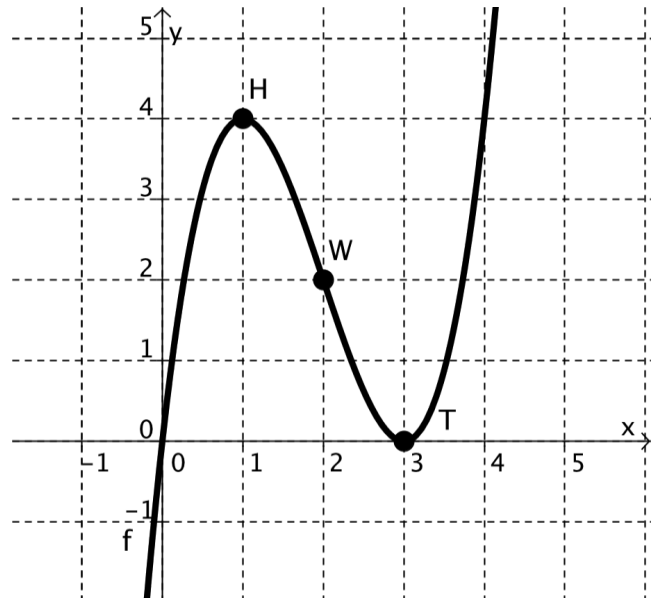
**Symmetrie**

keine Symmetrie, weil ...

**einzelne Funktionswerte**

$f(\dots) = \dots$

ausrechnen



# 1 Einstieg



## Die wichtigste Funktion?

- Welche Eigenschaft macht eine Funktion zur wichtigsten Funktion überhaupt?
- Dazu: welche Eigenschaft ist denn überhaupt wichtig?

**Gibt es eine Funktion, die abgeleitet sich selber gibt? Also  $f'(x)$  so, dass gilt:**

$$f'(x) = f(x) ?$$

Wir gehen das Problem *graphisch* an.

- Zeichnen Sie eine Kurve und leiten Sie sie graphisch ab.
- Versuchen Sie nun eine Funktion  $f(x)$  zu skizzieren, für die gilt:  $f'(x) = f(x)$ .  
Beachte: besitzt  $f$  eine Eigenschaft, dann muss auch die Ableitung  $f'$  diese Eigenschaft besitzen...
- Haben Sie eine Vermutung, um was für einen Funktionstyp es sich handeln könnte?  
Lässt sich die Basis  $a$  bereits „abschätzen“?

Aufgrund unserer Vermutung gehen wir das Problem *rechnerisch* an.

- Es muss sein:  $f(0) = f'(0) = 1$ .  
Leiten Sie daraus den folgenden Ansatz für die **Basis  $b$**  her:
$$b = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x}$$
- Wir müssen aber noch zeigen, dass gilt:  $f'(x) = f(x)$  für alle  $x$  (nicht nur für  $x = 0$ ).
- Zeichnen Sie den Graphen dieser wichtigsten Funktion!

## e-Funktion

---

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

- $f(x) = e^x$
- $g(x) = e^{-x}$

b) Wir variieren wie gehabt:  $f(x) = ae^x + c$ . Skizzieren Sie und berechnen Sie gegebenenfalls die Nullstelle.



**Leonhard Euler** (1707 Basel – 1783 Sankt Petersburg) war einer der bedeutendsten Mathematiker – und Schweizer!  
Sein Name findet sich an vielen Orten in der Mathematik.

Auch die Zahl  $e = 2.71828\dots$  ist nach seinem Namen benannt.  
 $e$  ist neben  $0,1$  und  $\pi$  eine der wichtigsten Zahlen in der Mathematik.

$e$  und  $\pi$  sind irrationale Zahlen. Sie sind sogar *transzendent*...



## Zusammengesetzte Funktionen

Wir haben Bausteine (Grundfunktionen!) und wollen daraus neue Funktionen kreieren.

Eine Möglichkeit haben wir bereits kennengelernt. Wir können Potenzfunktionen addieren/subtrahieren und erhalten die sog.

### Polynomfunktionen.

Viele Vorgänge lassen sich aber nicht mit Polynomfunktionen beschreiben. Es braucht „kompliziertere“ Funktionen... Nur wie?



Wir wissen, dass wir Zahlen durch die vier Grundrechenarten miteinander *verknüpfen* können. Obwohl sich Funktionen von Zahlen unterscheiden, können wir auch auf Funktionen diese Operationen anwenden.

### Beispiel 1 Funktionen zusammensetzen

Bilden Sie selber „zusammengesetzte“ Funktionen  $f(x)$ !  
Wählen Sie dazu „Bausteine“ (Grundfunktionen):

$u(x)$  und  $v(x)$ .

- |                   |                                  |                      |                                    |
|-------------------|----------------------------------|----------------------|------------------------------------|
| • <b>Addition</b> | $f(x) = u(x) + v(x) = \dots$     | • <b>Subtraktion</b> | $f(x) = u(x) - v(x) = \dots$       |
| • <b>Produkt</b>  | $f(x) = u(x) \cdot v(x) = \dots$ | • <b>Quotient</b>    | $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \dots$ |

### Merke

- Wir können also komplizierte Funktionen aus einfachen Funktionen *zusammensetzen*.
- Das geht aber auch umgekehrt: wir können komplizierte Funktionen in einfache Funktionen *zerlegen*.

### Beispiel 2 Funktionen zerlegen

Wie lauten die Grundfunktionen? Um was für eine „Zusammensetzung“ handelt es sich?

a)  $f(x) = e^x + \sin x$

b)  $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

c)  $f(x) = (\sin x)^2$

d)  $f(x) = \sin(x^2)$



### Hinweis

Die Zusammensetzung in d) ist neu. Es handelt sich um eine „Verkettung“ von Funktionen. Dazu später mehr.

Es ist Zeit, uns genauer mit „weiteren“ Funktionen zu beschäftigen. Dabei nimmt die *Ableitung* – natürlich! – dieser Funktionen eine *zentrale Rolle* ein.

## 2 Zusammengesetzte Funktionen & Ableitungsregeln



### Ableitung der Grundfunktionen

#### Beispiel 3 Grundfunktionen

Leiten Sie ab. Merken Sie sich diese Ableitungen!!!

#### a) Potenzfunktionen

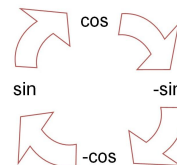
- $f(x) = x^5$
- $f(x) = x^n$
- $f(x) = ax^n + c$

#### b) Exponentialfunktionen

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = a \cdot b^x + c$

#### c) trigonometrische Funktionen

- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = a \cdot \sin x + c$



*Eselbrücke  
„minus sinus“*

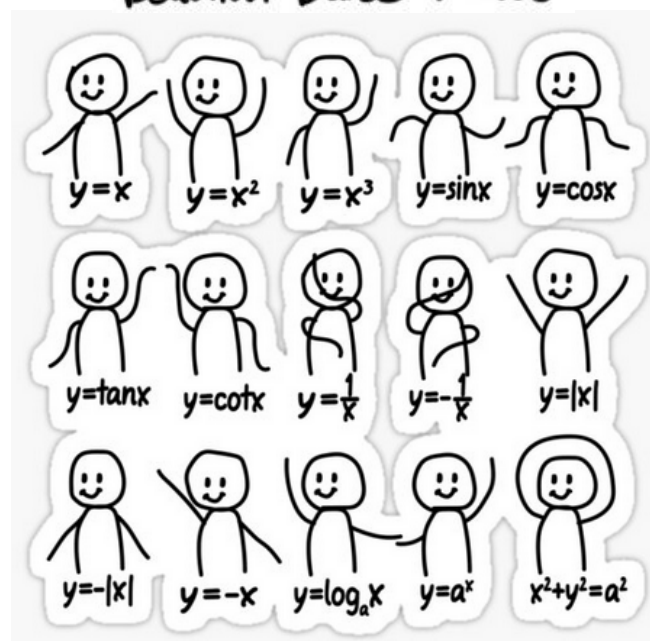
#### d) Wurzelfunktionen

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- $f(x) = a \cdot \sqrt[n]{x} + c$

#### e) Kehrwertfunktionen

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$

### Beautiful Dance Moves





## Summen von Funktionen & Summenregel (der Ableitung)

### Ziel

Wir wollen Funktionen untersuchen, die aus einer Summe bestehen.

Beispiel:

$$f(x) = x^2 + e^x.$$



Wir gehen wie folgt vor:

- Wir schauen uns zuerst die entsprechende Ableitungsregel an (*Technik!*)
- Wir machen uns Gedanken, wie sich eine „Summe“ – in Abhängigkeit ihrer Summanden – verhält (*Gefühl!*)
- Mit Technik und Gefühl untersuchen wir die entsprechende Verknüpfung!

### Beispiel 4 Summenregel – Technik

a) Formulieren Sie die Regel allgemein.  $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = \dots$

Begründung?



b) Leiten Sie ab mit der Summenregel.

- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - x + 4$

- $f(x) = 3e^x + x^2$

- $g(x) = \sin x + \frac{3}{x}$

- $h(x) = \cos x + \frac{1}{x^2} + -4^x$

### Beispiel 5 Gedanken zur Summe – Gefühl ☺

Wir machen uns einige *grundsätzliche* Gedanken zu einer „Summe“

$$S = A + B.$$

Was lässt sich über S aussagen, wenn ...

- ... der Summand A gross ist und der Summand B gross ist?
- ... der Summand A gross ist und der Summand B klein ist?
- ... der Summand A klein ist und der Summand B gross ist?
- ... der Summand A klein ist und der Summand B klein ist?

### Beispiel 6 Kurvenuntersuchung einer Summe

Führen Sie eine Kurvenuntersuchung durch. Gehen Sie vor, wie immer.

a)  $f(x) = x^2 + e^x$

b)  $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x}$

c)  $f(x) = \sin x + e^x$

d)  $f(x) = \sin x + \frac{1}{x}$

### Hinweis

„Addiere graphisch!“

Zahlen lassen sich addieren, aber ebenso Funktionsgraphen. Wie?



- punkteplan



## Produkt von Funktionen & Produktregel (der Ableitung)

### Ziel

Wir wollen Funktionen untersuchen, die aus einem Produkt bestehen.

Beispiel:

$$f(x) = x^2 \cdot e^x.$$



### Beispiel 7 Produktregel – Technik

a) Formulieren Sie die Regel allgemein.  $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = \dots$

Begründung?

**Hinweis** Vermutung? Überprüfen Sie Ihre Vermutung an der Funktion:  $f(x) = x^2 \cdot x^3$  ?

b) Leiten Sie ab mit der Produktregel. Unterscheiden Sie gut zwischen 1. und 2. Faktor

- $f(x) = x \cdot e^x$
- $g(x) = e^x \cdot (0.5x^2 - x)$
- $f(x) = 4x^2 \cdot \sin x$
- $f(t) = (-3t + 2) \cdot \cos t$

### Beispiel 8 Gedanken zum Produkt – Gefühl ☺

Wir machen uns einige *grundsätzliche* Gedanken zu einem „Produkt“

$$P = A \cdot B.$$

Was lässt sich über P aussagen, wenn ...

- ... der Faktor A gross ist und der Faktor B gross ist?
- ... der Faktor A gross ist und der Faktor B klein ist?
- ... der Faktor A klein ist und der Faktor B gross ist?
- ... der Faktor A klein ist und der Faktor B klein ist?
- ... speziell: wenn einer der beiden Faktoren Null ist?

### Beispiel 9 Kurvenuntersuchung eines Produktes

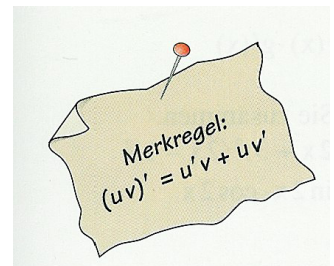
Führen Sie eine Kurvenuntersuchung durch. Gehen Sie vor, wie immer.

a)  $f(x) = 4x^2 \cdot e^x$

b)  $f(x) = (x - 3) \sqrt{x}$

c)  $f(x) = x \cdot \sin x$

d) eigenes Beispiel



### Hinweis

Zu c) und d). *Trigonometrische Funktionen bereiten Probleme. Warum? Oft werden trigonometrische Funktionen deshalb gesondert untersucht.*



## Quotient von Funktionen & Quotientenregel (der Ableitung)

### Ziel

Wir wollen Funktionen untersuchen, die aus einem Quotienten bestehen.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}.$$



### Beispiel 10 Quotientenregel – Technik

a) Formulieren Sie die Regel allgemein.  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dots$



**Hinweis** Die Quotientenregel lässt sich mit der Produktregel begründen!

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f(x) \cdot v(x) = u(x) \Rightarrow (f(x) \cdot v(x))' = u'(x) \Rightarrow \dots$$

Begründung?



b) Leiten Sie ab mit der Quotientenregel. Unterscheiden Sie gut zwischen „Zählerfunktion“ und „Nennerfunktion“.

•  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

•  $g(x) = \frac{4}{\sin x}$

•  $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$

•  $f(t) = \frac{2t}{1-t}$

### Beispiel 11 Gedanken zum Quotienten – Gefühl ☺

Wir machen uns einige *grundsätzliche* Gedanken zu einem „Produkt“

$$P = \frac{A}{B}.$$

Was lässt sich über P aussagen, wenn ...

- ... der Zähler A gross ist und der Nenner B gross ist?
- ... der Zähler A gross ist und der Nenner B klein ist?
- ... der Zähler A klein ist und der Nenner B gross ist?
- ... der Zähler A klein ist und der Nenner B klein ist?
- ... speziell: wenn einer der beiden – Zähler oder Nenner – Null ist?

### Beispiel 12 Kurvenuntersuchung eines Quotienten

Führen Sie eine Kurvenuntersuchung durch. Gehen Sie vor, wie immer.

a)  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

b)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

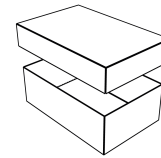
c)  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$

d)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$





## Verkettung von Funktionen & Kettenregel (der Ableitung)



verketteten =  
ineinander schachteln

### Ziel

Wir wollen Funktionen untersuchen, die aus einer Verkettung bestehen.

Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2}.$$



Das Beispiel zeigt eine *neue Art*, wie man Funktionen zusammensetzen kann.

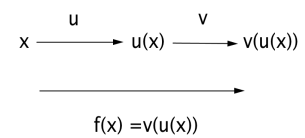
Machen Sie sich zuerst klar, dass diese „Verknüpfung“ tatsächlich weder ein Produkt, noch ein Quotient ist.

### Beispiel 13 Verkettung von Funktionen

a) Beachten Sie den Unterschied!

Berechnen Sie jeweils  $f(1)$  und  $g(1)$ . Benennen Sie innere und äussere Funktion.

- $f(x) = x^2 + 1$  und  $g(x) = (x + 1)^2$
- $f(x) = \sqrt{2x+1}$  und  $g(x) = 2\sqrt{x} + 1$ .
- $f(x) = (\sin x)^2$  und  $g(x) = \sin(x^2)$ .



b) Bilden Sie  $f(x) = v(u(x))$  und  $g(x) = u(v(x))$ .

- $u(x) = x + 2$  und  $v(x) = x^3$
- $u(x) = x^2 + 1$  und  $v(x) = e^x$
- $u(x) = \cos x$  und  $v(x) = 2x + 3$

#### Definition

Es seien  $u$  und  $v$  zwei Funktionen.  
Die Funktion  $f(x) = v(u(x))$  heisst  
**Verkettung** von  $u$  und  $v$ .  
Man nennt  $u$  die **innere** Funktion und  
 $v$  die **äussere Funktion**.

### Beispiel 14 Verkettung erkennen

a) Es ist  $f(x) = v(u(x))$ . Vervollständigen Sie die Tabelle.


$f(x)$			$(x^2 + 1)^2$	$\frac{1}{2(x^2 - 4)}$	$\frac{2}{x^2 - 4}$	$e^{2x+1}$	$2\sqrt{3-0.5x}$
$u(x)$	$x^3$	$3x + 1$		$x^2 - 4$			
$v(x)$	$3x + 1$	$x^3$	$x^2$		$\frac{2}{x}$	$e^x$	$\sqrt{x}$

b) Stellen Sie die Funktion  $f$  auf zwei Arten als Verkettung zweier Funktionen  $u$  und  $v$  dar.

- $f(x) = \frac{4}{(2x+1)^2}$
- $f(x) = 2^{1/x^2}$
- $f(x) = \sqrt{(x+2)^3}$
- $f(x) = (3x + 6)^2$

### Beispiel 15 Kettenregelregel – Technik

a) Formulieren Sie die Regel allgemein.  $f(x) = v(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \dots$

Begründung? 

b) Leiten Sie ab mit der Kettenregel. Unterscheiden Sie gut zwischen „innerer“ und „äußerer“ Funktion.

- $f(x) = e^{x^2}$
- $g(x) = (\sin x)^2 + \sin(x^2)$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- $f(t) = 5e^{2t-1}$

### Beispiel 16 Gedanken zum Verkettung – Gefühl ☹

...

### Beispiel 17 Kurvenuntersuchung einer Verkettung

Führen Sie eine Kurvenuntersuchung durch. Gehen Sie vor, wie immer.

a)  $f(x) = e^{x^2}$

b)  $f(x) = 2e^{-x^2}$

c)  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

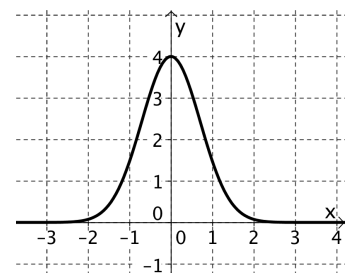
d)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$



### Kurvenuntersuchung umgekehrt!

- Rechts ist ein Funktionsgraph abgebildet. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an.

Begründung!



## Bemerkung

Die Kettenregel ist in gewissem Sinne wohl die wichtigste Ableitungsregel!

- Grund 1

Die Exponentialfunktionen sind der wichtigste Funktionstyp. Alle Exponentialfunktionen lassen sich aber auf die natürliche Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  zurückführen und damit „einfach“ ableiten.

Zeigen Sie, dass gilt:  $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x$

- Grund 2

Sowohl die Produktregel als auch die Quotientenregel lassen sich mit Hilfe der Kettenregel begründen. Tun Sie das!

**Hinweis** Produktregel:  $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ ; Quotientenregel:  $f = v \cdot u^{-1}$ ; jetzt beidseitig ableiten.



### 3 Zusammenfassung

Ergänzen Sie den Lückentext!

*Graphen ; Kettenregel ; verketteten ;  $e^x$  ; Produktregel ; natürliche Nullstellen ; Funktionen ; Summenregel ; Quotientenregel*

Genau wie bei Zahlen, kann man auch \_\_\_\_\_ zusammensetzen.

Neben Summe, Differenz, Produkt und Quotient, lassen sich Funktionen auch \_\_\_\_\_ .

Neben den Ableitungen für die Grundfunktionen verfügen nun über folgende Regeln zum Ableiten von Funktionen:

- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_



Mit Hilfe dieser Regeln und den üblichen Überlegungen zu Funktionen, etwa:

- Definitionsbereich
- Achsenschnittpunkten (insbesondere \_\_\_\_\_ )
- Form (Symmetrie, Globalverhalten)

können wir die \_\_\_\_\_ dieser Funktionen skizzieren.

Weiter haben wir eine ganz spezielle Funktion kennengelernt. Vielleicht die wichtigste Funktion!

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

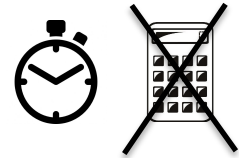
Sie heisst \_\_\_\_\_ Exponentialfunktion und hat die Eigenschaft:  $f'(x) = f(x)$ .

# 3

Nennen Sie aus Ihrer Sicht **3 Grundaufgaben** im Zusammenhang mit **Ableitungsregeln**.

- Erklären Sie, wie Sie diese lösen.
- Diese Aufgaben sollten sie beherrschen, also in vernünftiger Zeit lösen können.

## 4 Anhang



### Speedtest: Zahlen schätzen

a)  $\sqrt{21} =$

b)  $7^{1/3} =$

c)  $2^{1.5} =$

d)  $5^{-2} =$

e)  $\sqrt[100]{5} =$

f)  $\sqrt{0.5} =$

g)  $4^{0.6} =$

h)  $6^0 =$

i)  $\log_2 16 =$

j)  $\log_{10} 0.1 =$

k)  $\log_6 6 =$

l)  $\log_6 5 =$

m)  $e^2 =$

n)  $e^{-1} =$

o)  $\ln e =$

p)  $\ln e^4 =$

q)  $\log_2 1 =$

r)  $\ln 1 =$

s)  $\sin 0 =$

t)  $\sin \pi =$

u)  $\cos 3 =$

v)  $\sqrt{\cos 0} =$

w)  $\frac{2^{-10}}{10'000'000'000'000} =$

x)  $\frac{1}{8^{-20}} =$

y)  $\frac{\text{sehr klein}}{\text{sehr gross}} =$

z)  $\frac{\text{sehr gross}}{\text{sehr klein}} =$

### Zusatz

- $\cos(-1) =$
- $100^{1.1} =$
- $\ln(\text{sehr gross}) =$
- $\frac{\text{sehr klein}}{\text{sehr klein}} =$

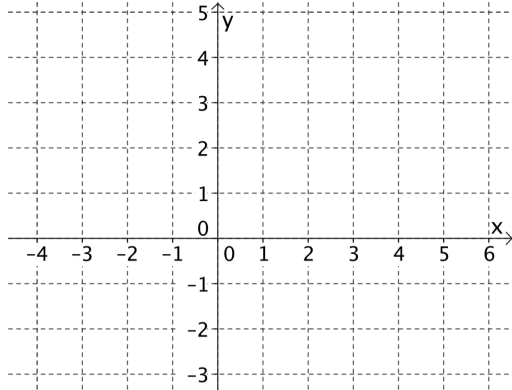
/ 30



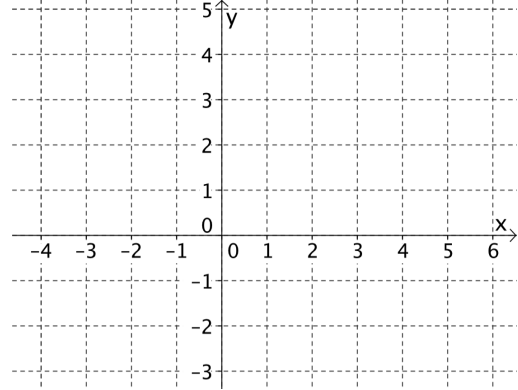


**Speedtest: einfache Graphen zeichnen**

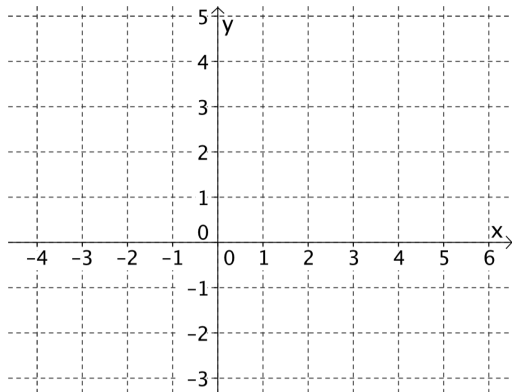
a)  $y = 0.5x^3$



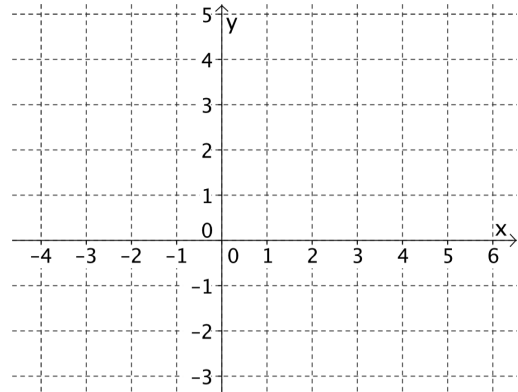
b)  $y = -x^2$



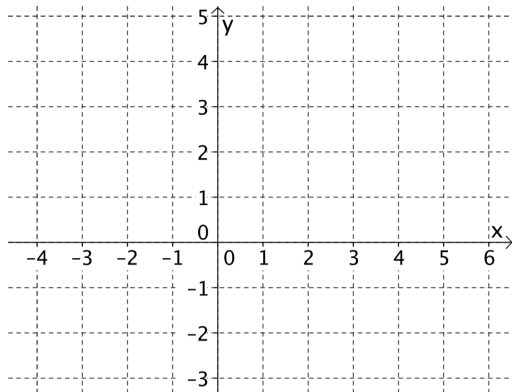
c)  $y = 0.25^x$



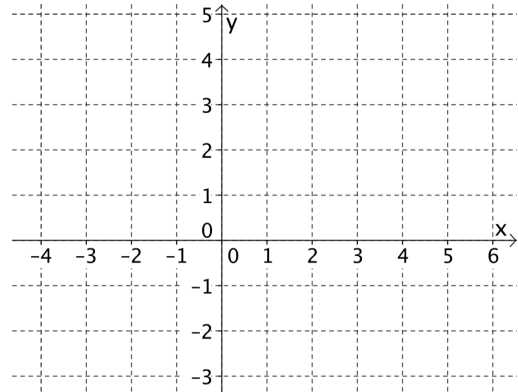
d)  $y = e^x$



e)  $y = \sin x$



f)  $y = \sqrt{x}$

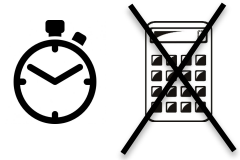


**/ 6**





## Speedtest: Ableitungsregeln



Leiten Sie *und* vereinfachen Sie.

### Produktregel

---

a)  $f(x) = x \cdot e^x$   $f'(x) =$

b)  $f(x) = ax^2 \cdot \cos x$   $f'(x) =$

c)  $g(x) = e^x \cdot (bx^2 - x)$   $g'(x) =$

d)  $f(t) = e^t \cdot \sqrt{t}$   $f'(t) =$

### Quotientenregel

---

e)  $f(x) = \frac{ax}{x+1}$   $f'(x) =$

f)  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$   $f'(x) =$

g)  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$   $g'(x) =$

h)  $f(t) = \frac{c}{1-e^t}$   $f'(t) =$

### Kettenregel

---

i)  $f(x) = 2^x$   $f'(x) =$



**Hinweis**  $2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{\ln 2x}$

j)  $f(x) = \sqrt{3x+2}$   $f'(x) =$

k)  $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$   $f'(x) =$

l)  $g(x) = ae^{-x}$   $g'(x) =$

m)  $f(t) = 2\sqrt{e^t}$   $f'(t) =$

## vermischte Aufgaben

---

n)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{ax^2}$   $f'(x) =$

o)  $f(x) = 500(1 - x)^8$   $f'(x) =$

p)  $g(x) = x^2 \cdot f(x)$   $g'(x) =$

q)  $f(t) = \frac{1}{t} - a$   $f'(t) =$

r)  $B(t) = e^{0.5t} + e^{-0.5t}$   $B'(t) =$

s)  $R(h) = 2h \cdot \sinh \cdot e^h$   $R'(h) =$

/ 20



## Lösungen: Ableitungsregeln

---

a)  $f'(x) = (1 + x)e^x$

b)  $f'(x) = ax(2\cos x - x \cdot \sin x)$

c)  $g'(x) = (bx^2 + (2b - 1)x - 1)e^x$

d)  $f'(t) = \left(\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)e^t$

e)  $f'(x) = \frac{x^2 + (1-a)x}{(x+1)^2}$

f)  $f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$

g)  $g'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$

h)  $f'(t) = \frac{-Ce^t}{(1 - e^t)^2}$

i) wichtig! Es ist:  $f(x) = 2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{\ln 2x} \Rightarrow f'(x) = \ln 2 \cdot e^{\ln 2x} = \ln 2 \cdot (e^{\ln 2})^x = \ln 2 \cdot 2^x$  allgemein:  $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x$

j)  $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

k)  $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

l)  $g'(x) = -ae^{-x}$

m)  $f'(t) = \sqrt{e^t}$

n)  $f'(x) = \frac{2}{ax^3}$

o)  $f'(x) = -4000(1 - x)^7$

p)  $g'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) = x(2 \cdot f(x) + x \cdot f'(x))$

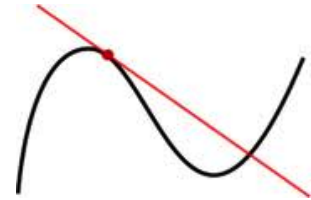
q)  $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$

r)  $B'(t) = 0.5e^{0.5t} - 0.5e^{-0.5t}$

s)  $R'(h) = 2(\sinh \cdot e^h) + 2h(\cosh \cdot e^h + \sinh \cdot e^h) = 2e^h(2\sinh + h \cdot (\cosh + \sinh))$



## Tangenten & Parameter



### Aufgabe 1

Es sei  $f(x) = \frac{3x+1}{x^2}$ .

- Führen Sie eine Kurvenuntersuchung durch. Gehen Sie vor, wie immer.
- Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt  $P(-1/f(-1))$ .
- P ist ein „spezieller“ Punkt des Graphen. Vermutung?

### Aufgabe 2

a) Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{x+2}{2x}$ . Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt  $P(1/f(1))$ .

b) Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ . Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt  $P(-3/f(-3))$ .

c) Berechnen Sie Tangentengleichung der Kurve  $y = 2\sqrt{2x+1}$  im Schnittpunkt mit der y-Achse.

d) Gegeben ist die natürliche Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$ .

- Berechnen Sie die Tangentengleichung an der Stelle  $x = 1$ .
- Sei  $A(u/v)$  ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von  $f$ . In A werden die Parallele  $p$  zur y-Achse und die Tangente  $t$  gezeichnet. P und T sind die Schnittpunkte von  $p$  und  $t$  mit der x-Achse. Zeigen Sie: der Abstand der Punkte P und T beträgt immer 1.

### Aufgabe 3

a) Der Graph der Funktion  $y = \frac{ax}{x-2}$  hat bei  $x = 4$  die Steigung 5. Berechnen Sie den Parameter a.

b) Berechnen Sie a und b bzw. die Gleichung der Funktion.

- Der Punkt  $P(2/1)$  ist ein Extrempunkt von  $f(x) = \frac{ax^2+1}{bx}$ .
- Der Graph der Funktion  $f(x) = ax \cdot e^{bx}$  hat bei  $x = 0.5$  ein Extremum und im Ursprung die Steigung 2.
- Der Graph der Funktion  $y = ae^{bx}$  geht durch den Punkt  $P(1/2)$  und hat dort die Steigung  $-2e$ .



**Zeigen Sie: Jede Funktion, für die gilt:  $f'(x) = f(x)$  hat die Form  $f(x) = c \cdot e^x$  !!!**

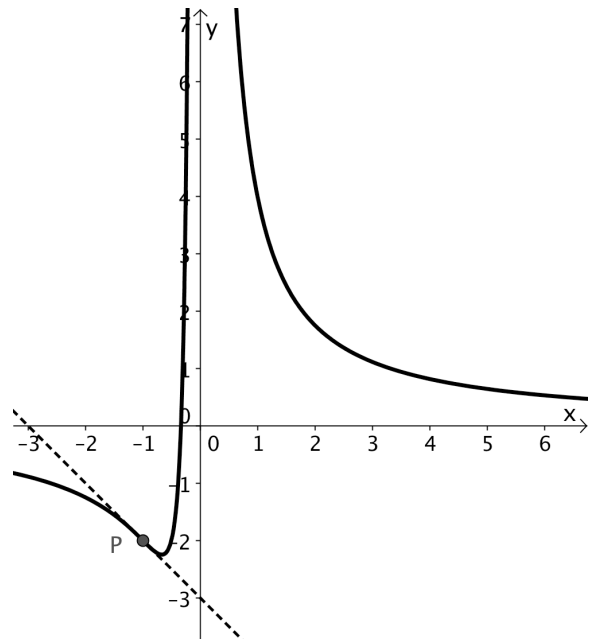
**Hinweis** Es sei  $f(x)$  eine Funktion mit der Eigenschaft  $f'(x) = f(x)$ , für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Zeigen Sie zuerst, dass der Quotient  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$  die Ableitung 0 hat. Was folgt dann daraus für  $f(x)$ ?

## Lösungen

### Aufgabe 1

- Vgl. Abbildung
- $t: y = -x - 3$
- $P(-1/-2)$  ist Wendepunkt;  
es handelt sich bei  $t$  also um eine Wendetangente

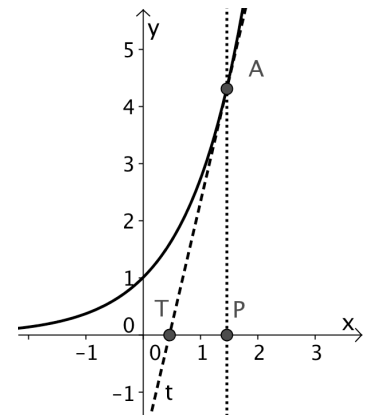


### Aufgabe 2

- a)  $t: y = -x + 2.5$       b)  $t: y = 0.75x + 0.75$       c)  $t: y = 2x + 2$

d) natürliche Exponentialfunktion:

- $t: y = ex$
- vgl. Abbildung; Gleichung  $t: y = e^u x - e^u u + e^u \Rightarrow T(u-1/0)$



### Aufgabe 3

- a)  $a = -10$       b)  $a = 0.25; b = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{0.25x^2 + 1}{x}$
- c)  $a = 2; b = -2 \Rightarrow f(x) = 2x \cdot e^{-2x}$       d)  $a = 2e^e; b = -e \Rightarrow f(x) = 2e^e \cdot e^{-ex}$



Sei  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} \Rightarrow g'(x) = \dots = \frac{e^x(f'(x) - f(x))}{e^{2x}} = 0$ , weil  $f(x) = f'(x)$ .

Es folgt, dass  $g(x)$  eine konstante Funktion ist:  $g(x) = c$ , also  $\frac{f(x)}{e^x} = c$  und damit  $f(x) = c \cdot e^x$ .

Das heißt: **Jede Funktion mit  $f'(x) = f(x)$  hat die Form  $f(x) = c \cdot e^x$  !!!**

