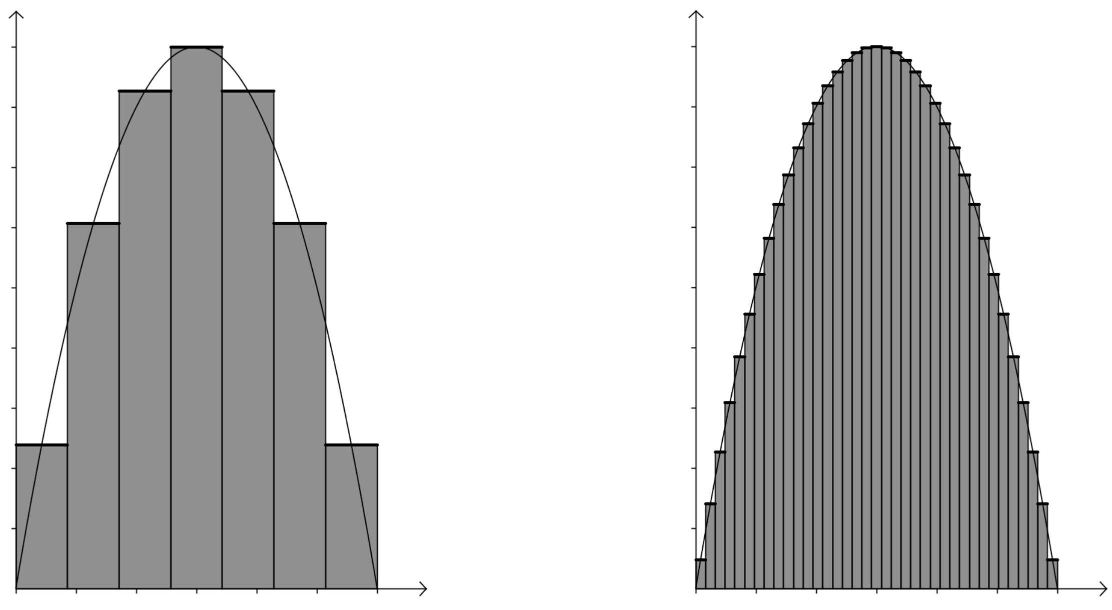
Datum Name

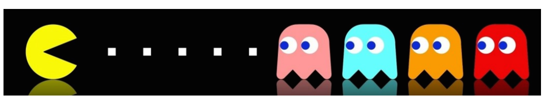
Integral-rechnung



Stammfunktionen
Produktsumme
Hauptsatz
Anwendungen

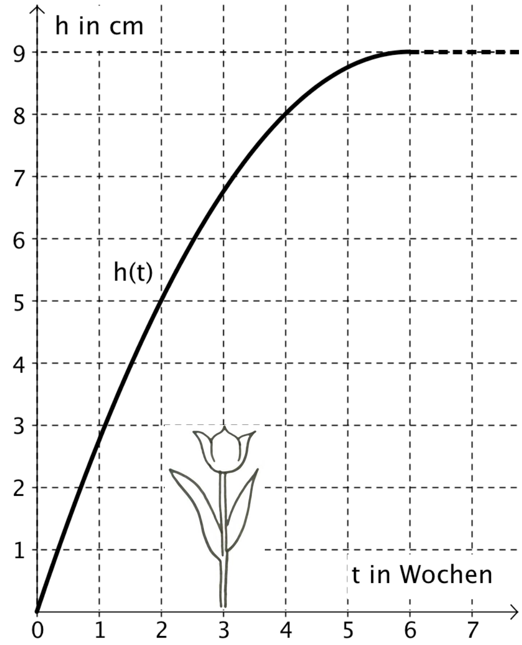
Das Integral ist: eine Summe...

Integrieren ist: „aus kleinen Stücken zusammensetzen“



Inhalt

0 Rückblick – Differenzialrechnung



Rückblick 1

Das Wachstum einer Pflanze wird beschrieben durch die Gleichung $h(t) = -0.25t^2 + 3t$ (h in cm, t in Wochen). Nach 6 Wochen ist die Pflanze ausgewachsen.

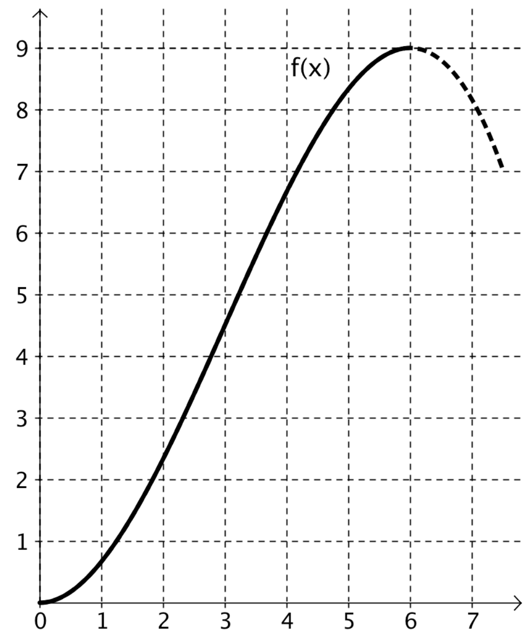
a) Berechnen und interpretieren Sie – mit Einheiten –

- $h(2)$
- $h(4) - h(2)$
- $\frac{h(4)-h(2)}{2}$

b) Berechnen und interpretieren Sie:

- den Differenzenquotienten: $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}$.
- den Differenzialquotienten: $\frac{dh}{dt}(t)$.

c) Berechnen und interpretieren Sie $\frac{dh}{dt}(2)$. Wo „sieht“ man diese Grösse am Graphen von h(t)?



Rückblick 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2$.

a) Berechnen Sie

- den Hochpunkt
- den Wendepunkt von f(x).

b) Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente.

c) Interpretieren Sie die Koordinaten des Wendepunktes, wenn die Funktion f(x) – in Abhängigkeit der Zeit –

- die zurückgelegte Strecke eines Autos
- die Höhe des Wasserpegels einer Regentonne

wiedergibt.

Rückblick 3

Zeichnen Sie selber eine Kurve und leiten Sie sie graphisch ab.

(Die Funktion soll mindestens 4.Grades sein.)

1 Einstieg

Indem wir eine Funktion ableiten (differenzieren), berechnen wir ihre momentane Änderungsrate, die wir – je nach Zusammenhang – interpretieren als (momentane)

- Geschwindigkeit
- Intensität
- Steigung
- ...

f

ableiten oder **differenzieren** ↓ ↑ 'aufleiten' oder **integrieren**

f '

integrare (lat.) = wiederherstellen

So weit so gut.

Jetzt gehen wir den *umgekehrten* Weg. Wir wollen aus der Ableitung die „ursprüngliche" Funktion zurückgewinnen, d.h. wir **integrieren**!

Eine solche ursprüngliche Funktion heisst dann auch **Stammfunktion**.

Ursprung = Stamm

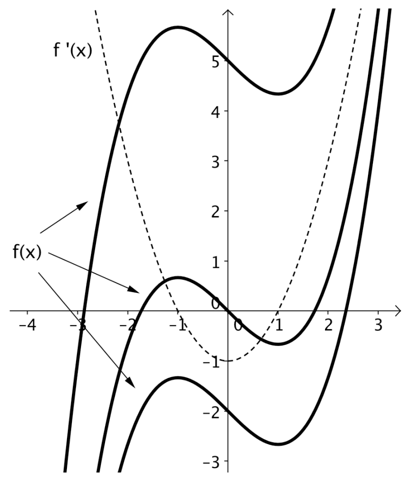
Beispiel 1 **Integrieren!**

Integrieren Sie folgende Funktionen! M.a.W.: ermitteln Sie eine Stammfunktion.

a) $f'(x) = x^2 - 1$

b) $h'(t) = t^3 + 3t - 4$

Was fällt auf? Warum ist das so?



Eine Funktion hat viele Stammfunktionen.
Auch jeder von uns hat viele Vorfahren.

Merke

- Integrieren heisst „wiederherstellen".
- Ableiten und Integrieren sind gegenteilige Vorgehensweisen.

Beispiel 2 **Integration von Polynomfunktionen**

a) $y' = x^n$

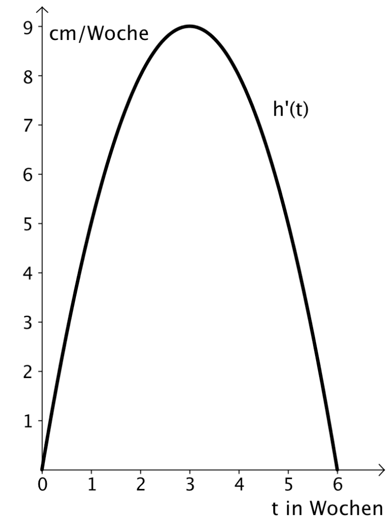
b) $g'(x) = 4x^3 - \frac{1}{3}x^2 + ax + 1$

c) beliebige Polynomfunktion, eigenes Beispiel

Merkregel
Stammfunktionen von Potenzfunktionen
1 *Exponent plus 1*
2 *mit Kehrwert des neuen Exponenten multiplizieren*

Hinweis *Die Richtigkeit der Integration kann immer überprüft werden durch Ableiten!* ☺

Beispiel 3 **Änderungsrate einer Pflanze**



Die Änderungsrate (Wachstumsgeschwindigkeit) einer Pflanze wird beschrieben durch $h'(t) = -t^2 + 6t$.

- Was können wir über den „*Wachstumsverlauf*" sagen?
- Was über die *Höhe* der Pflanze?

a) Was bedeutet, bezogen auf den Wachstumsverlauf,

- der Hochpunkt von $h'(t)$?
- die Nullstelle bei $t = 6$?

b) Integrieren Sie $h'(t)$. Wie lässt sich die Konstante C interpretieren?

c) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Höhe $h(t)$ der Pflanze.

Merke

- Durch das Bilden der Ableitung erhält man nur eine Information darüber, wie sich eine Funktion *ändert*.
  Die Information über den *Anfangswert* geht unweigerlich (!) verloren.
  Wenn man die Ableitung integriert, kann man diese verlorene Information nicht mehr wiederherstellen.

d) Berechnen Sie, wie viel die Pflanze zwischen der 1. und 3. Woche gewachsen ist.

Hinweis *Dieser Wert lässt sich mit der Kenntnis einer beliebigen Stammfunktion h(t) berechnen. Warum?*

e) Um wie viel ist die Pflanze bis zum Zeitpunkt t gewachsen?

Für das Ableiten benützen wir das Symbol: $\frac{df}{dx}(x)$ bzw. $f'(x)$. Auch für das Integrieren gibt ein Symbol.
Es lautet:

$$\int \mathbf{f(x)\,dx}\,.$$

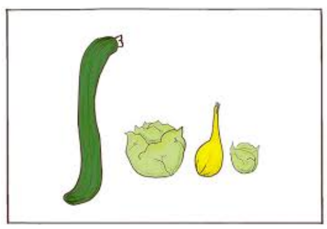
Das Integralzeichen $\int$ ist ein langgezogenes S für ...
und d**x** legt die Integrationsvariable fest.

Beispiel $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Beispiel 4 **Schreibweise**

a) Integrieren Sie die folgenden Funktionen. Benützen Sie das Symbol für das Integral.

- $f'(x) = x^3 - 2x^2$
- $h'(t) = a + 4t - 1.2t^5$



b) Welche Stammfunktion von $f'(x) = -x^2 + 4$ geht durch den Punkt

- A(0/3)
- B(1/4) ?

Hinweis *Ist ein „Anfangswert" vorgegeben, dann ist die Stammfunktion „fixiert".*

Beispiel 5 **Weg – Geschwindigkeit – Beschleunigung**

a) Ein Auto beschleunigt aus dem Stand, wobei seine Geschwindigkeit um 2 m/s pro Sekunde zunimmt.
Somit ist seine Geschwindigkeit t Sekunden nach dem Start gegeben durch $v(t) = 2t$. Wie lang ist der zurückgelegte Weg

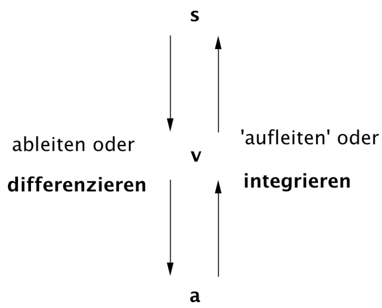
- in den ersten t Sekunden nach dem Start?
- im Zeitintervall [2;5]?

b) Die Beschleunigung eines Körpers zum Zeitpunkt t beträgt

$$a(t) = 0.5t \quad (m/s^2).$$

- Welche Geschwindigkeit hat der Körper zum Zeitpunkt t, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit 5 m/s beträgt?
- Welchen Weg legt der Körper im Zeitintervall [1;3] zurück?

c) Die Beschleunigung eines Körpers sei konstant, also $a(t) = a$.
Berechnen Sie die zugehörige Geschwindigkeitsfunktion v und die zugehörige Ort-Zeit-Funktion s(t), wenn $v(0) = v_0$ und $s(0) = s_0$.



Bsp: $\int v\,dt = s + s_0$

Beispiel 6 **zum Schluss...**

a) Bestimmen Sie:

- $\int x^5\,dx = ...$
- $\int (ax^2 + bx + c)\,dx = ...$
- $\int \frac{1}{x^2}\,dx = ...$
- $\int x^n\,dx = ...$ Welche Potenzfunktion x^n macht Probleme? 

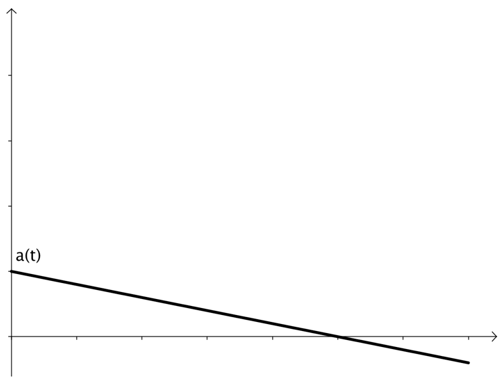
b) Pflanze mit Änderungsrate $h'(t) = -t^2 + 6t$ (t in Wochen, h' in cm/Woche).
Wann ist die Pflanze

- um 10 cm gewachsen?
- 10 cm hoch?

Eine dieser beiden Fragen lässt sich nicht beantworten. Welche und warum?
Beantworten Sie dann die andere!

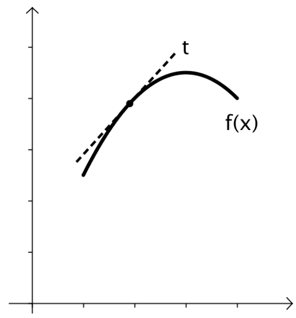
c) Die Beschleunigung eines Körpers ist gegeben durch $a(t) = -0.2t + 2 \quad (m/s^2)$.
Seine Anfangsgeschwindigkeit beträgt 4 m/s.

- Welchen Weg legt das Objekt in den ersten 15 Sekunden zurück?
- a(t) ist in der Skizze rechts wiedergegeben.
  Skizzieren Sie qualitativ die Geschwindigkeitsfunktion v(t) und die Funktion s(t), welche die zurückgelegte Strecke angibt, in das Koordinatensystem ein.



2 Integralrechnung

Veranschaulichung der „Änderung“



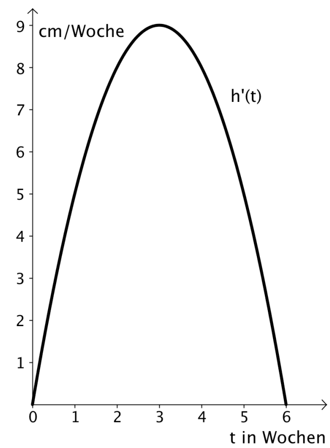
Die momentane *Änderungsrate* (Geschwindigkeit, ...) lässt sich veranschaulichen:
Sie entspricht der *Steigung der Tangente*.

Wir können also f’ am Graphen von f „sehen“.

Frage

Lässt sich auch die *Änderung* (Zuwachs, zurückgelegte Strecke, ...) veranschaulichen?

Können wir auch f am Graphen von f’ „sehen“?



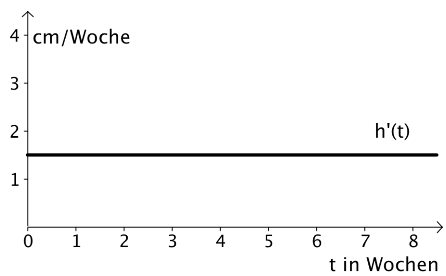
Im Beispiel 3 war $h'(t) = -t^2 + 6t$.
Wir haben h’ integriert um die Änderung (das Wachstum) der Pflanze beschreiben zu können.
So haben wir z.B. berechnet, dass die Pflanze im Zeitintervall [1;3] um ca. 15 cm gewachsen ist (bzw. sich ihre Höhe um 15 cm ge*ändert* hat).

Wo „sehen“ wir diese 15 cm? Haben Sie eine Vermutung? ?!!

STOPP.

Langsam.

Beispiel 7 **konstante Änderungsrate**



Eine Pflanze wächst mit einer konstanten Änderungsrate h’(t) (Wachstumsgeschwindigkeit) von 1.5 cm/Woche.

a) Um wie viel wächst (ändert sich) die Pflanze im Zeitintervall [1;3]?

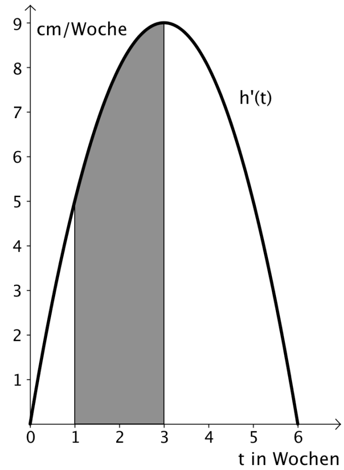
b) Wo „sehen“ wir die in a) berechnete Zahl?
Hinweis *Es handelt sich um ein* ***Produkt****.*

c) Ergibt diese Veranschaulichung einen Sinn? Überprüfen Sie dazu die *Einheiten*.

d) Bestimmen und veranschaulichen Sie das Wachstum (die Änderung) der Pflanze im Zeitintervall

- [4;7]
- $[t;t + \Delta t]$

Wir sind mutig.



Beispiel 8 ***nicht*-konstante Änderungsrate**

Pflanze mit $h'(t) = -t^2 + 6t$.

a) Wie lässt sich die angegebene „Fläche" interpretieren?
Berechnen Sie diese Fläche!

b) Berechnen Sie, wie viel die Pflanze insgesamt wächst und veranschaulichen Sie diese Zahl.

War das nicht zu mutig?

NEIN!

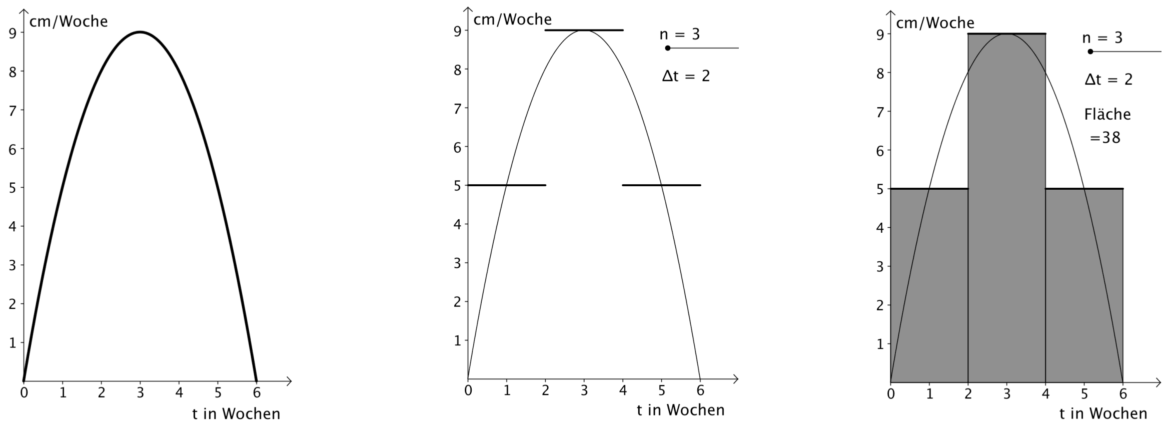
Das folgende Beispiel erhellt das Ganze.

Beispiel 9 **bekannte Strategie : $\Delta t \to 0$**

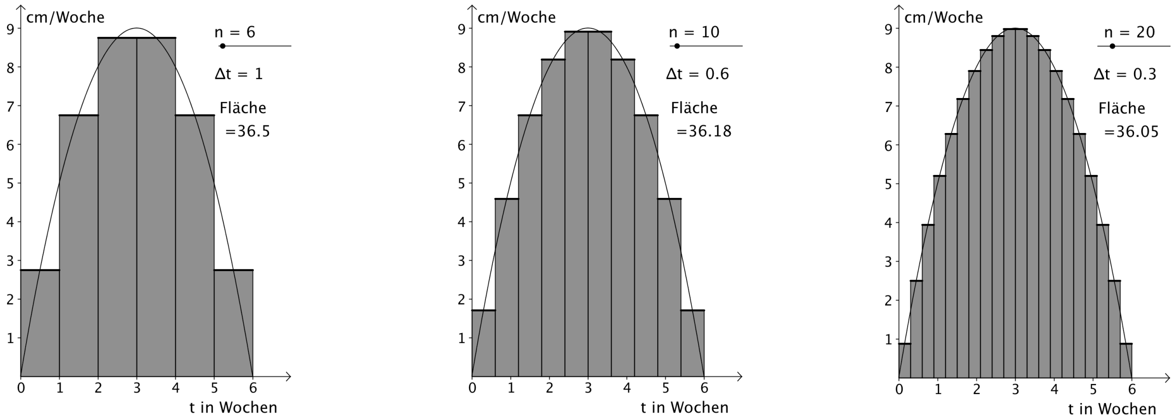
Pflanze mit $h'(t) = -t^2 + 6t$.

- Wir haben das Gefühl, dass die Fläche (unter der Änderungsrate h') die Änderung angibt.
- Bei einer konstanten Änderungsrate war das klar: es handelt sich um ein „Rechteck".
  Hier aber ist alles krumm und keine Rechtecke. Hmm...

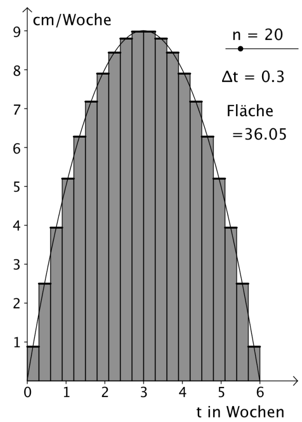
a) Erklären Sie folgende Bilderfolge!

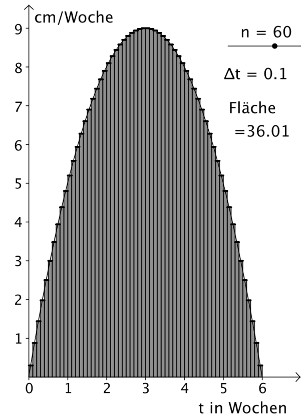


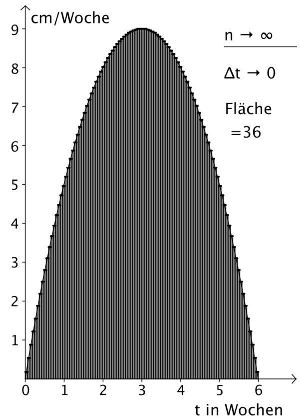
b) Und jetzt diese.



c) Und so geht das weiter und weiter...







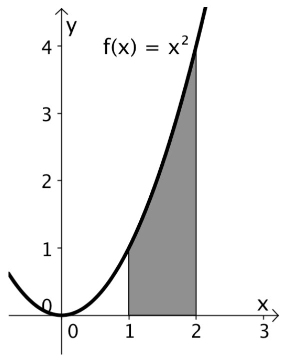
Für die „genaue“ Fläche (bzw. die Änderung) verwendet man das Symbol

$$\int_0^6 h'(t)\cdot dt$$

Erklären Sie!

- Wofür steht wohl das Integralzeichen?
- Wofür steht wohl dt?
- Warum spricht man in diesem Zusammenhang von einer *Produktsumme*?

Wir haben „en passant“ scheinbar ein weiteres Problem gelöst. Wir können jetzt **Flächen** berechnen. Chic!

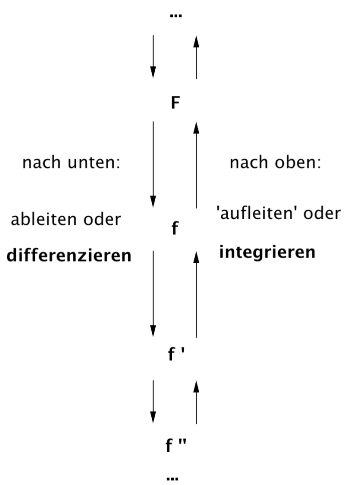


Beispiel 10 Fläche

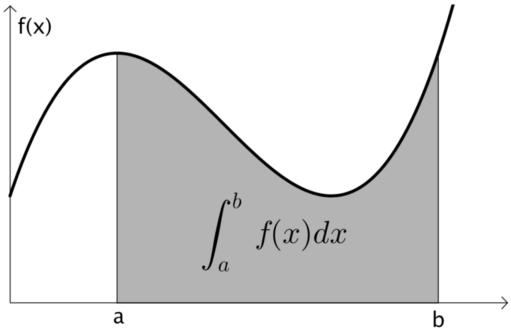
Wie gross schätzen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche?
Berechnen Sie ihn!

Merke

- Im Beispiel 10 haben wir eine „normale“ Funktion f(x) – also keine Änderungsrate – integriert. Das ist eigentlich nicht weiter ein Problem. Wir haben ja seinerzeit die Ableitung f’(x) auch wieder abgeleitet zu f’’(x).
- Wir können beliebig oft ableiten oder integrieren (aufleiten).
- Für die Stammfunktion von (klein) f schreibt man (gross) F.



Definition des Integrals



Der Ausdruck

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x$$

heisst **das Integral** „von a bis b von f(x) dx“.
a ist die untere, b die obere **Integrationsgrenze**, f heisst **Integrand**.
Das Zeichen $\int ...$ erinnert an den Buchstaben „S“ für Summe.

Setzen Sie die folgenden Begriffe in den untenstehenden Lückentext ein.

Änderung, Summe, unendlich, Produktsumme, Teppich, summiert

Das Integral ist eine ______________________ ; die einzelnen Summanden sind Produkte.

Man sagt deshalb auch: das Integral ist eine _______________________________________ .

Es ist allerdings keine gewöhnliche Summe:

Sie hat ________________________ viele Summanden und jeder einzelne „Produktsummand“ f(x)·dx ist unendlich klein.

Ein einzelner Summand f(x)·dx gibt die momentane _____________________ an bzw. den momentanen Zuwachs an Fläche.

Das Integral ________________________ im entsprechenden Intervall alle (momentanen) Änderungen bzw. Flächenstreifen zu einem Ganzen zusammen.

Als „Bild“ können wir uns vorstellen:

Die Summanden sind die **Fäden** (= Produkt f(x)·dx), das Integral ist der _____________________ (= $\int_a^b f(x)\cdot dx$).

Wir wissen auch, wie wir Integrale berechnen können.

Regel zum Berechnen von Integralen

Sei F eine beliebige Stammfunktion einer Funktion f. Dann gilt:

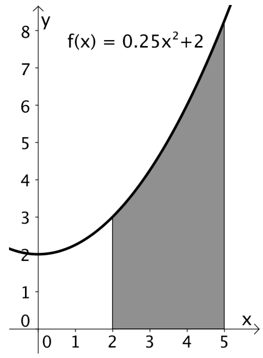
$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a).$$

In Worten:
Integral (also die Summe aller Änderungen) = Endwert – Anfangswert

Merkregel
Integrale berechnen.
***1** Stammfunktion ermitteln*
***2** obere minus untere Grenze*

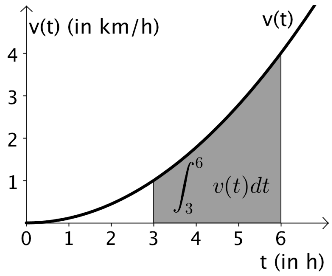
- Diese Regel kann man noch genauer unter die Lupe nehmen. Zuerst wenden wir sie aber an!
- Auch der TR kann Integrale berechnen. Das ist praktisch.

Praktische Schreibweise mit eckigen Klammern: $\int_a^b f(x)\cdot dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$



Beispiel 11 **Anwenden der Regel**

a) Berechnen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche in der Abbildung rechts.



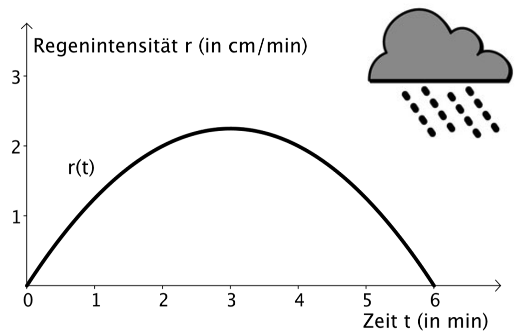
b) Gegeben ist die Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = \frac{1}{9}t^2$.

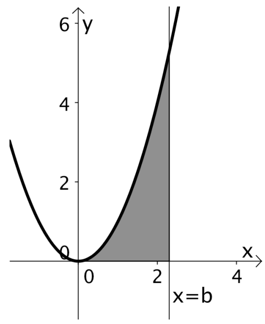
Berechnen Sie das angegebene Integral und interpretieren sie es.

c) Der Platzregen dauerte 6 Minuten. Die Regen*intensität* wird beschrieben durch

$r(t) = -0.25t^2 + 1.5t$ ($r(t)$ in cm/min, t in min).

- Wie viel Regen ist insgesamt gefallen?
- Berechnen Sie, wie viel Regen zwischen der 2. und der 5. Minute fiel und veranschaulichen Sie Ihr Resultat.





d) Es ist $f(x) = x^2$.

Berechnen Sie b so, dass gilt: $\int_0^b f(x)\cdot dx = 3$.

Beispiel 12 **Heissluftballon**

Ein Heissluftballon ändert seine Flughöhe h mit der Geschwindigkeit

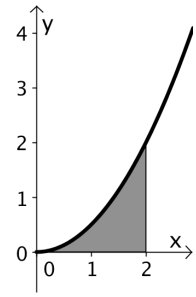
$h'(t) = -0.12t^2 + 1.2t$ (h' in m/min, t in min).

a) Berechnen und interpretieren Sie mit Einheiten den Wert $h'(2)$.

b) Berechnen und interpretieren Sie das Integral $\int_0^5 h'(t)\cdot dt$.

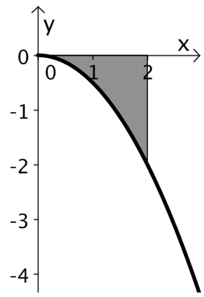
c) Der Ballon befand sich zu Beginn auf einer Höhe von 520 m.
Wie hoch ist er nach 5 Minuten, wie hoch nach 8 Minuten, wie hoch nach t Minuten?

Fläche unterhalb der x-Achse – Integral als Bilanz



Beispiel 13 **Fläche unterhalb der x-Achse**

a) Abbildung oben. Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 0.5x^2\,dx$.



b) Abbildung unten. Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 -0.5x^2\,dx$.

Überrascht Sie das Ergebnis? Wie ist es zu interpretieren?

Fläche unterhalb

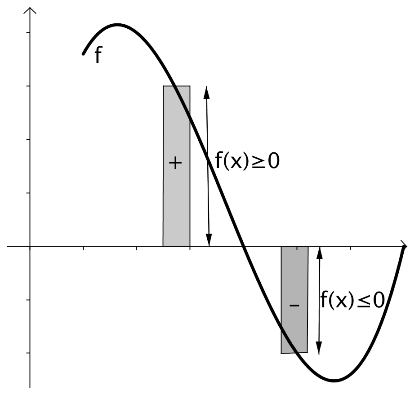
Verläuft der Graph von f(x) unterhalb der x-Achse, so ist das zugehörige Integral **negativ**.

Warum?

Das Integral ist definiert als Produktsumme:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x$$

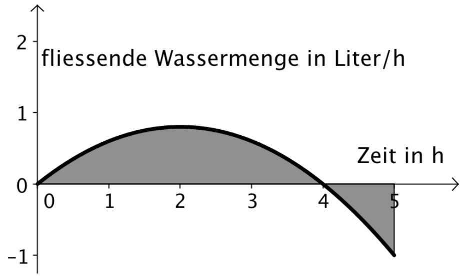
Ist f(x) negativ, so wird auch der Produktsummand f(x)·dx negativ.



Das folgende Beispiel zeigt, wie nützlich diese Eigentümlichkeit des Integrals ist.

Beispiel 14 **Integral als Bilanz**

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. –abfluss eines Behälters geregelt.
Die Fliessgeschwindigkeit ist graphisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).



Zu Beginn ist der Behälter leer.
Die Änderungsrate ist gegeben durch $f'(t) = -0.2t(t-4)$.

a) Wann hatte es am meisten Wasser im Behälter und wie viel?

b) Wie viel Wasser hat es nach 5 Stunden im Behälter? (Man spricht auch von **Flächenbilanz**. Erklären Sie!)

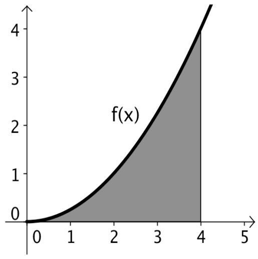
c) Skizzieren Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf der Gesamtwassermenge im Behälter.

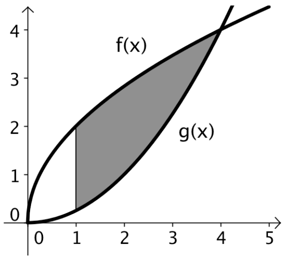
Rechnen mit Integralen

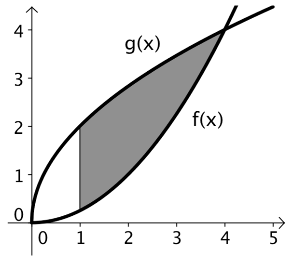
Ein Integral ist eine Zahl. Mit Zahlen kann man „rechnen“, ebenso mit Integralen.

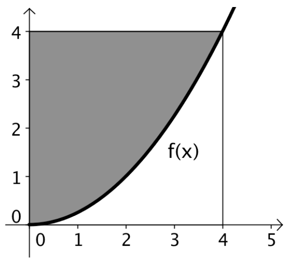
Beispiel 15 **Flächeninhalte und Integrale**

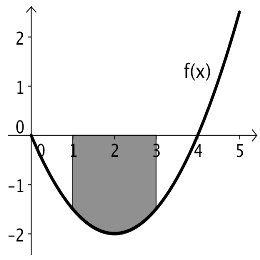
Drücken Sie folgende Flächeninhalte mit Hilfe von Integralen aus.

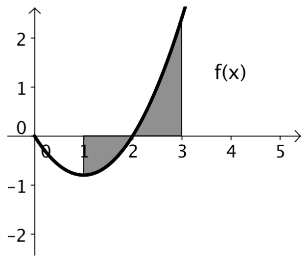
a)


b)


c)


d)


e)


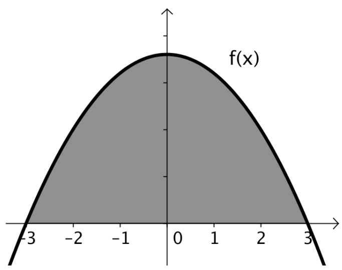
f)


Manchmal lassen sich Integrale vereinfachen. Dazu sind folgende **Rechenregeln** praktisch:

- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$ bzw. $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

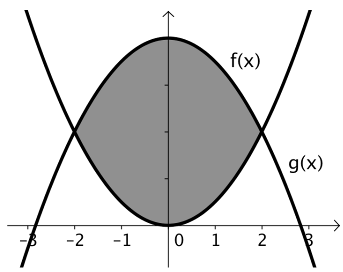
Finden Sie die Begründungen für diese Regeln!?

Beispiel 16 **Rechenregeln für Integrale**



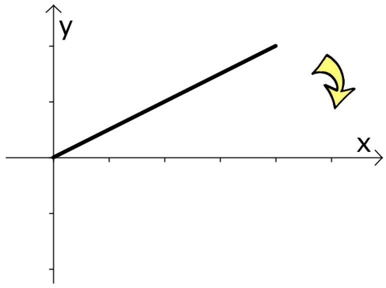
a) Vgl. Abbildung rechts oben. Was ist richtig? Was ist einfacher?

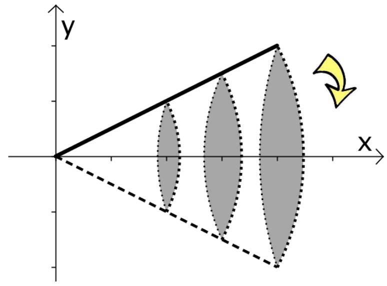
- Schüler X sagt: Flächeninhalt = $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$
- Schülerin Y sagt: Flächeninhalt = $2 \cdot \int_0^3 f(x)\,dx$

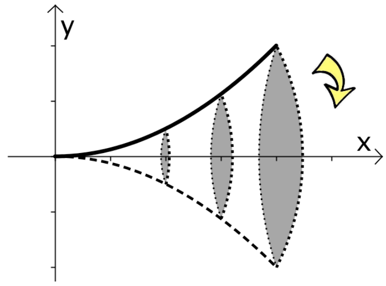


b) Vgl. Abbildung rechts unten.
Berechnen Sie – möglichst einfach! – den gefärbten Flächeninhalt.
Es ist $f(x) = -0.5x^2 + 4$ und $g(x) = 0.5x^2$.
Hinweis *Zuerst Integrationsgrenzen bestimmen!*

Weitere Anwendungen des Integrals: Volumen und Mittelwert







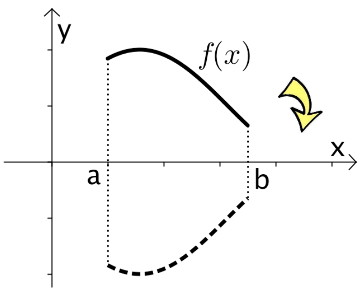
Volumen (Rotation um die x-Achse)

Die dick ausgezogene Linie „rotiert“ um die x-Achse.

- Was entsteht für ein Körper? Beschreiben Sie in Worten.
- Die Linie kann auch „krumm“ (Bild unten) sein.
  Was entsteht für ein Körper? Beschreiben Sie in Worten.
- Zeichnen Sie selbst eine Linie. Was entsteht für ein Körper bei Rotation um die x-Achse?
- Wie lässt sich sein Volumen berechnen?
  Was hat das mit dem Integral zu tun bzw. was wird „summiert“?

  (Beim bisherigen Flächenintegral haben wir Rechtecke summiert, die ganz dünn waren, also gewissermassen einzelne „Strecken“; bildlich: aus „Fäden“ wird durch Summation ein „Teppich“.)
- Leiten Sie eine Formel für ein solches „Rotationsvolumen“ her!

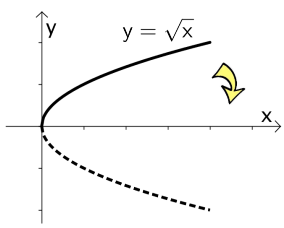
Formel (bei Rotation um die x-Achse)



Rotiert der Graph einer Funktion f(x) auf dem Intervall [a;b] um die x-Achse, dann hat der entstehende Körper das Volumen:

$$\mathbf{V} = \int_a^b \pi \cdot \mathbf{f(x)}^2\,\mathbf{dx} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{V} = \pi \cdot \int_a^b \mathbf{f(x)}^2\,\mathbf{dx}$$

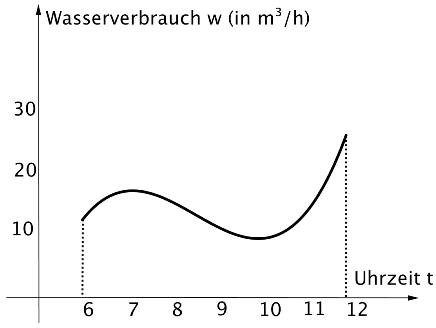
Beispiel 17 **Körper bei Rotation um die x-Achse**



a) Abgebildet ist die Kurve $y = \sqrt{x}$ auf dem Intervall [0;4].
Lässt man die Kurve um die x-Achse „rotieren“, entsteht ein Drehkörper, den man Paraboloid nennt. Bestimmen Sie sein Volumen.

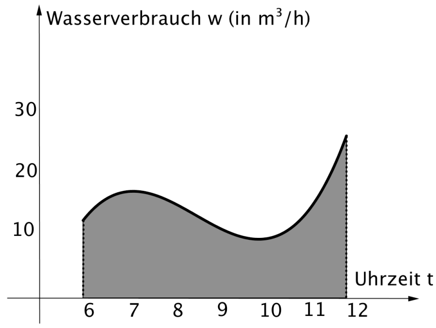
b) Rotiert die Kurve $y = -0.25x^2 + x$ über dem Intervall [0;4] um die x-Achse, dann entsteht ein Ball, wie man ihn im „American Football“ benutzt. Bestimmen Sie sein Volumen. (Alle Angaben in dm.)

Mittelwert



Der Wasserverbrauch w (in $\frac{m^3}{h}$) einer Wohnsiedlung ändert sich im Laufe eines Tages kontinuierlich.

Die Frage, die wir beantworten wollen:
Wie gross ist der *mittlere* Wasserverbrauch?



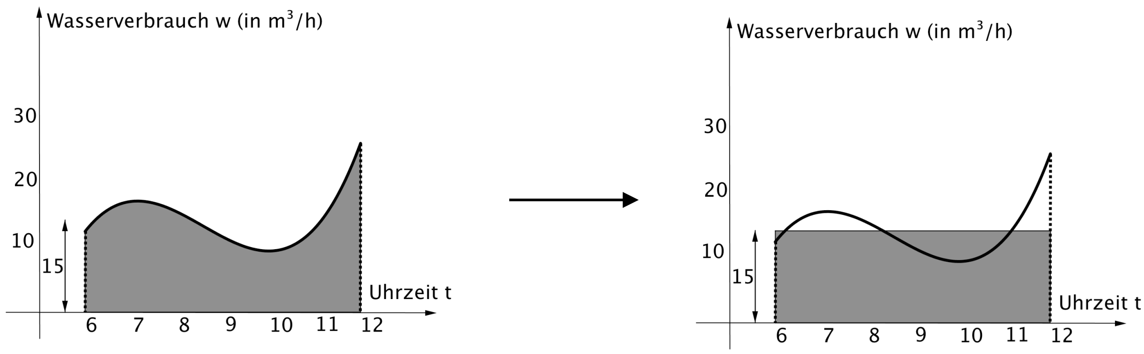
Den Gesamtverbrauch (in m^3) an Wasser zwischen 6 Uhr und 12 Uhr können wir problemlos mit Hilfe eines Integrals berechnen:

Gesamter Wasserverbrauch W = $\int_6^{12} w(t)\,dt$ = ... = 90 m^3

Damit können wir aber auch den *mittleren* Wasserverbrauch während diesen 6 h berechnen:

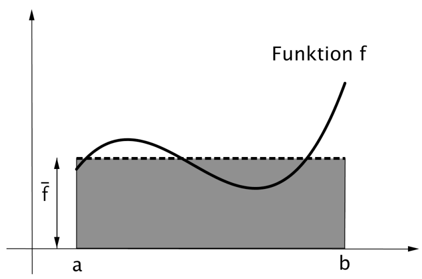
Er beträgt: $\overline{w} = \dfrac{\int_6^{12} w(t)\,dt}{6} = \dfrac{90}{6}\,\dfrac{m^3}{h} = 15\,\dfrac{m^3}{h}$

Anschaulich können wir uns dies mit Hilfe eines *„Flächenausgleichs“* vorstellen:



Die Gesamtfläche könnten wir auch mit einem Rechteck berechnen. Die *Höhe* dieses Rechtecks entspricht gerade dem *mittleren* Wasserverbrauch $\overline{w}$ = 15.

Formel (mittlerer Funktionswert)

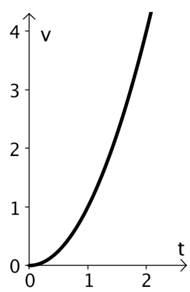


Der mittlere Funktionswert $\overline{f}$ einer Funktion f(x) lässt sich wie folgt berechnen:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Beachte *Vergleichen Sie die Formel mit dem arithmetischen Mittel!*

Beispiel 18 mittlerer Funktionswert



Ein Körper bewegt mit der Geschwindigkeit $v(t) = t^2$ (t in s, v in m/s).

- Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ im Zeitintervall $[0;2]$.
- Überprüfen Sie die Einheiten und tragen Sie diesen Wert in nebenstehender Abbildung ein!

* Vertiefung: Integralfunktion, Hauptsatz der Differenzial– und Integralrechnung

Sei eine Funktion f(x) gegeben.

- Wir kennen die *Ableitungsfunktion* von f(x).
  Sie gibt für jedes x die „Ableitung“ (Steigung) von f(x) an – ihre *Funktionswerte* sind also *Ableitungen*.

- Gibt es auch eine *Integralfunktion* von f(x)?
  Sie sollte dann für jedes x ein Integral (Fläche) von f(x) angeben – ihre *Funktionswerte* wären *Integrale*.

Wofür brauchen wir die Integralfunktion?
Wir werden mit ihrer Hilfe

- die „Regel zur Berechnung von Integralen“: $\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a)$ auf andere Art begründen.
- den sog. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung formulieren.

Integralfunktion

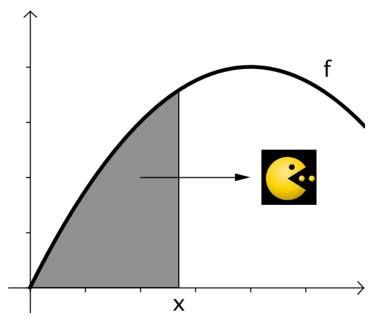
Ein Integral $\int_a^b \ldots$ besitzt zwei „Grenzen“: eine untere Grenze a und eine obere Grenze b.

Das Integral bzw. die „Fläche“ hatte bisher etwas statisches, etwas unbewegliches.
Das ändern wir und gestalten das Integral dynamisch. Dazu gehen wir wie folgt vor:

Wir wählen als untere Grenze 0 und als obere Grenze „x“: $\int_0^x \ldots$.

Damit haben wir unsere Integralfunktion!
Sie berechnet den Flächeninhalt von 0 bis zu einer (variablen!) Grenze x.
Die Integralfunktion „„frisst“ sich gewissermassen – ausgehend von 0 – durch die Fläche bis hin zu x. Sie hat folgende Form:

$$\mathbf{I(x) = \int_0^x f(t)\,dt}$$



Beachte *Es steht <u>nicht</u>* $\int_0^x f(x)\,dx$ *, sondern* $\int_0^x f(t)\,dt$ *. Warum?*

Beispiel 19 Integralfunktion skizzieren, Eigenschaft

a) Zeichnen Sie den Graphen einer Funktion f(x) in ein Koordinatensystem.
Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Integralfunktion.

Hinweis *„Ich stelle mir vor, die von f berandete Fläche wird mit Farbe angestrichen. Gehe ich beim Streichen gleichmässig von 0 nach rechts, so ist der Bedarf an Farbe proportional zum Funktionswert von f an der Stelle, wo ich mich gerade befinde.“*

b*) Geben Sie sich *nochmals* den Graphen einer Funktion f vor und skizzieren Sie die zugehörige Integralfunktion I.
Welcher *Zusammenhang besteht zwischen Funktion und Integralfunktion*?
Haben Sie eine Vermutung? Begründen Sie sie!

Beispiel 20 **Begründung der Regel zum Berechnen von Integralen**

Sei f(x) gegeben. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a)$$

, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist.

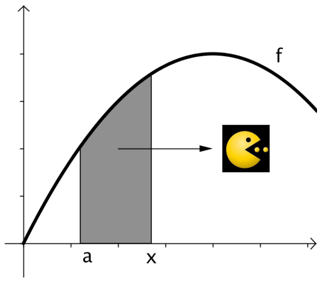
Begründen Sie diese Regel mit Hilfe der Integralfunktion.

Beachte *Wir kennen diese „Regel“ bereits. Worin besteht nun der eigentliche Unterschied in der Herleitung?*

Beispiel 21** **Zusammenhang: Integralfunktion(en) und Stammfunktion(en)**

Eine Integralfunktion I kann, aber muss nicht, bei der unteren Grenze 0 beginnen. Allgemeiner definiert man die Integralfunktion zur unteren Grenze a wie folgt:

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



a) Wie unterscheiden sich Integralfunktionen zu verschiedenen unteren Grenzen a untereinander?

b) Zeigen Sie: Eine Integralfunktion hat immer (mindestens) eine Nullstelle.

c) Wir wissen: Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion.
Ist umgekehrt auch jede Stammfunktion eine Integralfunktion?

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung klärt den Zusammenhang zwischen der Ableitungs- und der Integralfunktion. Er besteht aus zwei Teilen.

(1) **Ableitungsfunktion der Integralfunktion:**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Oder: Differenzieren macht Integrieren rückgängig.

(2) **Integralfunktion der Ableitungsfunktion:**

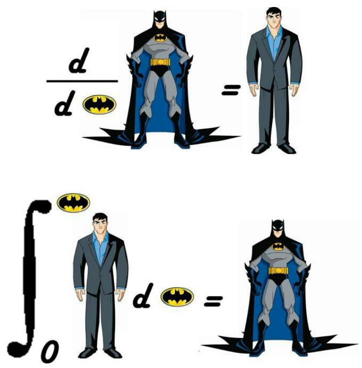
$$\int_a^x \frac{d}{dt}F(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Oder: Integrieren macht Differenzieren rückgängig .
(bis auf eine additive Konstante)

Beispiel 22 **Differenzieren und Integrieren...**

„Differenzieren und Integrieren sind zueinander inverse Operationen.“

Erklären Sie!



3 Zusammenfassung

Das Integral ist eine Summe $\int \ldots$ von Produkten f(x)·dx, bei denen sich der erste Faktor ändern darf und der zweite klein sein muss. Man sagt dann:

$$\int_{\ldots}^{\ldots} f(x)\cdot dx \text{ ist eine Produktsumme.}$$

Beispiele für Produktsummen:

- Flächeninhalt = Summe von Produkten „Höhe × Streifenbreite“
- Gesamte (integrale) Änderung = Summe von Produkten „Änderungsrate × Schrittlänge“

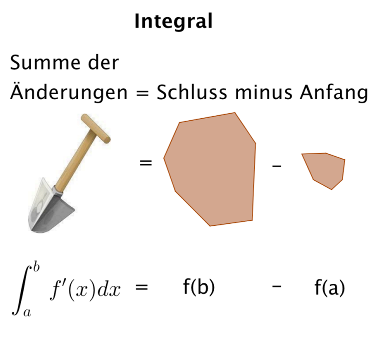
Ist eine Stammfunktion F bekannt, lassen sich Integrale wie folgt berechnen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ist f negativ (verläuft der Graph von f unterhalb der x-Achse), dann wird auch das entsprechende Produkt negativ. Das Integral – als Summe – zieht die Bilanz.

Integrale lassen sich vielfältig einsetzen:

- Volumen = Summe von Produkten „Querschnitt × Scheibchendicke“
- mittlerer Funktionswert = „Summe aller Werte ÷ Anzahl Werte“



Integrieren und Differenzieren stehen zueinander in enger Beziehung.

Wenn die Funktion eine Ableitung (Änderungsratenfunktion) ist, dann bedeutet die Produktsumme die Änderung auf dem gegebenen Intervall, also die durch die Änderungsraten insgesamt bewirkte Zu– oder Abnahme des „Bestandes“ gegenüber dem Anfangsbestand:

$$\int_a^b f'(x)\cdot dx = f(b) - f(a) \quad \text{bzw.} \quad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\cdot dx$$

Ein Beispiel ist die durch die (momentane) Geschwindigkeit bewirkte Wegänderung.

Die inverse Beziehung kommt auch in den Begriffen „Differenzenquotient“ und „Produktsumme“ zum Ausdruck:

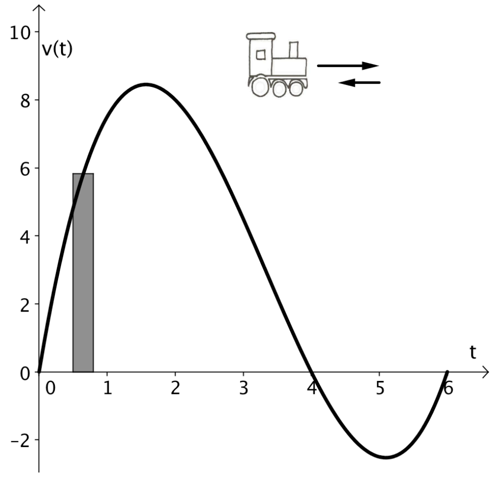
- Differenzieren (dividieren) – Quotient: $f' = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
- Integrieren (multiplizieren) – Produkt: $\Delta f = f'\cdot\Delta x$ und dann summieren...

$$\int_a^b f'\cdot dx \approx \sum_a^b f'\cdot\Delta x \approx \sum_a^b \frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x = \sum_a^b \Delta f = f(b) - f(a)$$

Grundaufgabe 1 Integral einer Änderungsrate

Eine Rangierlokomotive bewegt sich gemäss

$$v(t) = 0.5t^3 - 5t^2 + 12t \quad \text{(t in sec, s in m).}$$



a) Eingezeichnet ist ein Rechteck.
Welche Bedeutung hat seine Fläche im angegeben Zusammenhang?

b) Berechnen und interpretieren Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^4 v(t)\,dt \quad ; \quad \int_4^6 v(t)\,dt \quad ; \quad \int_0^6 v(t)\,dt$$

c) Zu welchem Zeitpunkt t* hat die Lokomotive 10 Meter zurückgelegt?

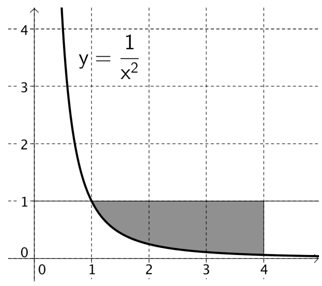
Grundaufgabe 2 Flächenberechnungen

a) Berechnen Sie den Inhalt

- der von $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$ und der x-Achse auf dem Intervall $[-1;3]$ eingeschlossenen Flächenstücke.

  Hinweis *Skizzieren Sie den Graphen von f(x) qualitativ anhand der Nullstellen und des Globalverhaltens.*

- der gefärbten Fläche in der Abbildung rechts.



b) Sei $f(x) = ax^2$. Berechnen Sie a so, dass gilt: $\int_0^a f(x)dx = 10$.

Grundaufgabe 3 Volumenintegral (Rotation um die x-Achse), Mittelwert

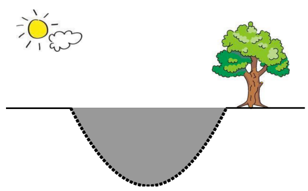
a) Volumenintegral

- Die Kurve $y = 0.5x^2$ rotiert auf dem Intervall $[0;3]$ um die x-Achse.
  Welches Volumen besitzt der dabei entstehende Körper? Skizzieren Sie dazu zuerst die Kurve.

- Ein Kegel mit Grundkreisradius r und Höhe h kann man sich als Rotationskörper vorstellen. Wie?
  Leiten Sie dann das Volumen her mit Hilfe der Integralrechnung.

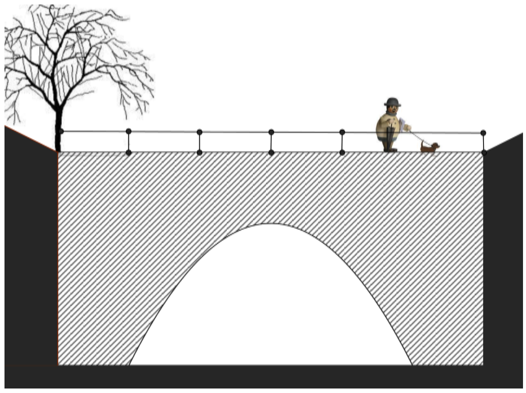
  Hinweis *Der Kegel muss zuerst in Richtung x-Achse „gekippt" werden.*

b) Mittelwert



Der Boden eines Kanals hat eine parabelförmige Gestalt. Der Kanal ist 20 Meter breit und 15 Meter tief. Berechnen Sie seine durchschnittliche Tiefe.

4 Weitere Aufgaben – Lösungen

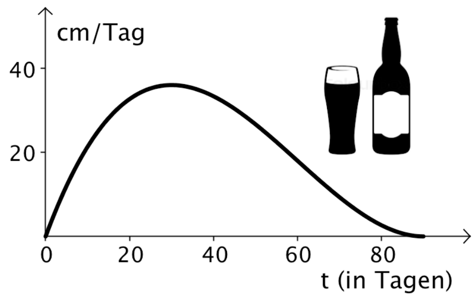


Aufgabe 1 Brücke

Die Brücke ist 6 m lang, 3 m hoch und 2 m breit.
Die Durchfahrt ist parabelförmig mit Höhe 2 m und Breite 4 m.
Wie viel m^3 Material wurde für die Brücke verbaut?

Hinweis *Beschreiben Sie die Durchfahrt zuerst mit Hilfe einer quadratischen Funktion. (1 Einheit = 1m)*

Aufgabe 2 Bier



Hopfenpflanzen braucht man, um Bier zu brauen. Sie haben bis zu vier Meter lange Wurzeln und zeichnen sich durch eine enorme Wachstumsrate aus, die durchschnittlich meist bei 10 cm pro Tag liegt, aber auch sehr viel grösser sein kann.
Die Wachstumsrate einer Hopfenpflanze werde näherungsweise beschrieben durch den folgenden Term:

$$w(t) = \frac{1}{3000}(t^3 - 180t^2 + 8'100t) \quad (0 \le t \le 90)$$

Dabei steht t für die Zeit in Tagen nach der Keimung und w(t) für die Wachstumsrate in cm/Tag .

a) Berechnen Sie w(20) und die Nullstellen von w. Interpretieren Sie diese Werte (mit Einheiten).

b) Berechnen Sie die Höhe der Pflanze zum Zeitpunkt ihrer maximalen Wachstumsrate und wie viel die Pflanze insgesamt gewachsen ist.

Aufgabe 3 Museumsbesuch

Die Funktion $b(t) = 10t^3 - 150t^2 + 500t$, t in Stunden ab 8 Uhr, beschreibt näherungsweise die Änderungsrate der Besucherzahl während eines Tages in einem Museum.
Annahme: Vor 8 Uhr befinde sich noch niemand in Museum.

a) Berechnen Sie Nullstellen und Extrempunkte (ohne Nachweis) von b und skizzieren Sie mit Hilfe dieser Berechnungen, dem TR und gegebenenfalls weiteren Werten den *qualitativen* Verlauf von b.

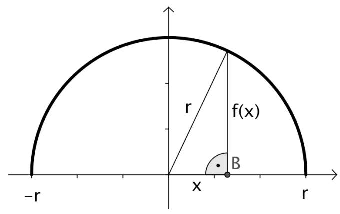
b) Interpretieren Sie (mit Einheiten) den Hochpunkt im Sachzusammenhang.

c) Zu welchem Zeitpunkt halten sich am meisten Menschen im Museum auf?
Berechnen Sie, wie viele Menschen das sind.

d) Berechnen und interpretieren Sie (mit Einheiten) das Integral $\int_0^7 b(t)\cdot dt$ im Zusammenhang.

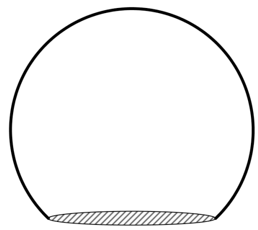
e) Ab dem Zeitpunkt, an dem es mehr als 1000 Besucher hat, müssen auch die WC's im Kellergeschoss geöffnet werden. Um welche Zeit ist das?

Aufgabe 4 Kugelvolumen



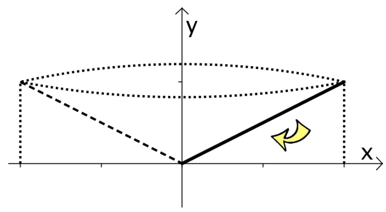
a) Eine Kugel mit Radius r kann man sich als Rotationskörper vorstellen. Wie?
Leiten Sie dann das Volumen her mit Hilfe der Integralrechnung.

Hinweis *... die zugehörige „Randfunktion" $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ beschreibt einen Halbkreis...*



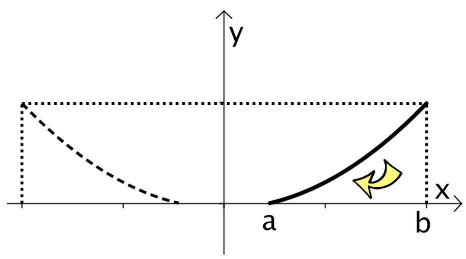
b) Eine Kugel mit Radius 5 dm ist unten abgeflacht (damit sie „stehen" kann).
Der schraffierte Kreis hat den Durchmesser 4 dm. Wie gross ist ihr Volumen?

Aufgabe 5 Rotation um y-Achse



a) Die Fläche unterhalb der dick ausgezogenen Linie „rotiert" um die y-Achse.
Was entsteht für ein Körper? Beschreiben Sie in Worten.

b) Begründen Sie die folgende **Formel (Rotation um die y-Achse)**



Rotiert der Graph einer Funktion f(x) auf dem Intervall [a;b] um die y-Achse, dann hat der entstehende Körper das Volumen:

$$V = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers in a), falls y = 0.5x über dem Intervall [0;2].

Aufgabe 6 Rechenregel

Begründen sie folgende Rechenregel für Integrale:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Aufgabe 7 kontinuierliche Modellbildung eines diskreten Sachverhaltes

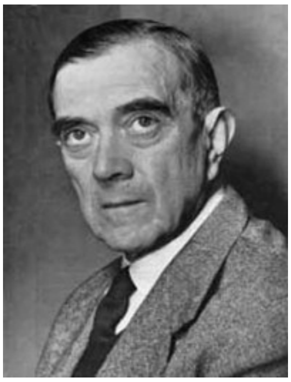
a) Es sei K(t) die Anzahl der berufstätigen Menschen eines Landes, die im Jahr 2012 t Tage aufgrund von Krankheit nicht am Arbeitsplatz erschienen.

- Was bedeutet $\int_0^{365} K(t)\cdot dt - \int_1^{365} K(t)\cdot dt$?
- Stellen Sie die mittlere Krankheitsdauer der berufstätigen Menschen dieses Landes im Jahre 2012 mit Hilfe von Integralen dar!

b) Es sei Z eine Funktion, deren Funktionswerte Z(f) die Anzahl der Personen eines Landes mit einem Einkommen von f Franken angibt.

- Was bedeutet $\int_{f_1}^{f_2} Z(f)\cdot df$?
- Stellen Sie das Einkommen jener Menschen, die höchstens f_1 verdienen, mit Hilfe eines Integrals dar.
- Stellen Sie das mittlere Einkommen jener Menschen, die mindestens f_1 verdienen, mit Hilfe eines Integrals dar.

Aufgabe 8 Mass für Ungleichheit, Gini-Koeffizient



Corrado Gini (1884 – 1965)

Nicht alle Menschen verfügen über dasselbe Einkommen. So haben etwa die ärmsten 10% der Schweizer weniger als 2% des Gesamteinkommens, während die reichsten 10% ungefähr 25% des Gesamteinkommens beziehen.
Die Einkommensverteilung kann mit einer sog. *Lorenz-Kurve* veranschaulicht werden: Auf der x-Achse wird der prozentuale Anteil der Bevölkerung eingetragen (zunächst jener mit geringem Einkommen), auf der y-Achse der zu dieser Gruppe gehörige Anteil am Einkommen.
Definitions- und Wertebereich der Kurve sind also jeweils [0;1].
Würde jeder Einwohner dasselbe Einkommen haben, so wäre die Lorenz-Kurve die Winkelhalbierende w(x) = x.
Die Fläche zwischen der Kurve f und der Winkelhalbierenden w ist offenbar ein Maß für die Ungleichverteilung von Einkommen einer Bevölkerung.
Daher wird der *Gini-Koeffizient* (Koeffizient der Ungleichverteilung) verwendet, um die Einkommensverteilung zwischen verschiedenen Gesellschaften vergleichen zu können.

Er ist definiert als

$$\frac{\text{Fläche zwischen Lorenz} - \text{Kurve und Winkelhalbierenden}}{\text{Flächeninhalt der Winkelhalbierenden } w(x) = x}$$

Für ein kleines Land sei die Lorenz-Kurve näherungsweise gegeben durch

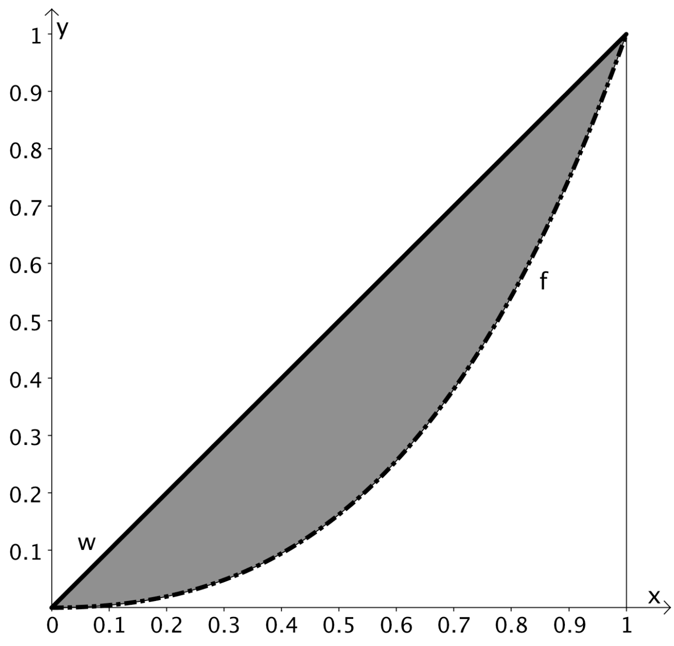
$$f(x) = 0.2x^4 + 0.4x^3 + 0.4x^2$$

In der Abbildung ist f(x) und w(x) dargestellt.

a) Wie viel Prozent des Gesamteinkommens haben die ärmsten 20%, wie viel die ärmeren 50% und wie viel die reicheren 20% der Bevölkerung?

b) Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten zur oben genannten Lorenz-Kurve.

c) Begründen Sie, warum das Flächenmass zwischen zwei Kurven in einem Schritt als Integral über die Differenz der beiden Terme g(x) – f(x) berechnet werden kann, wobei g den oberen Graphen beschreibt, f den unteren.



Lösungen

Aufgabe 1 Brücke

Quadratische Funktionsgleichung bestimmen (Koordinatenursprung z.B. Mitte unten): $y = -0.5x^2 + 2$

Brücke Querschnitt = $6 \cdot 3 - \int_{-2}^{2} y \cdot dx = 18 - 5.33 = 12.67\ m^2$

Gesamtes Material (unter Berücksichtigung der Breite) = $2\ m \cdot 12.67\ m^2 = 25.33\ m^3$

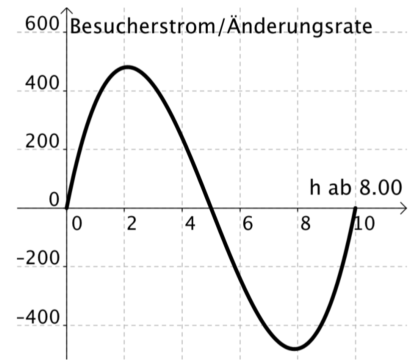
Aufgabe 2 Bier

a) w(20) = 32.7 , nach 20 Tagen beträgt die Wachstumsrate ca. 33 (!).

Nullstelle: $t_1 = 0$ und $t_2 = 90$, an diesen Tagen ist die Wachstumsrate Null;
nach 90 Tagen dürfte die Pflanze ausgewachsen sein.

b) $\int_0^{30} w(t) \cdot dt \approx 7.4$ m bzw. $\int_0^{90} w(t) \cdot dt \approx 18.2$ m

Aufgabe 3 Museumsbesuch

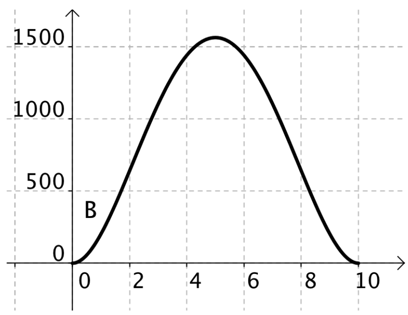


a) Nullstellen: $t_1 = 0$; $t_2 = 5$; $t_3 = 10$
Hochpunkt H(2.1/481.1); Tiefpunkt T(7.9/–481.1)

b) Kurz nach 10 h ist der Andrang am grössten.
Pro Stunde strömen gegen 500 Personen (**netto!**) ins Museum.

c) Um 13 Uhr, ca. $\int_0^{5} b(t) \cdot dt = 1'550$ Personen

d) $\int_0^{7} b(t) \cdot dt = 1102.5$. Um 15 Uhr befinden sich ca. noch 1'100 Besucher im Museum.



e) $\int_0^{t^*} b(t) \cdot dt = 1000 \Rightarrow t^* = 2.8\ (7.2;\ 11.7)$

Die WC's müssen kurz vor 11 Uhr geöffnet werden.

Beachte *Die entsprechende Gleichung hat auch die Lösungen 7.2 und 11.7.*
Wie sind diese Lösungen zu interpretieren?

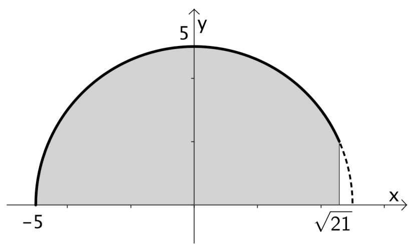
Aufgabe 4 Kugelvolumen

a) Kugelvolumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

b) Zuerst die obere Integrationsgrenze berechnen:

$$\sqrt{25 - x^2} = 2 \Rightarrow x = \sqrt{21} \approx 4.58$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-5}^{\sqrt{21}} \sqrt{25 - x^2}^{\,2}\, dx = \ldots = 165.8\pi\ dm^3$$



Aufgabe 5 Rotation um die y-Achse

a) Aschenbecher; „Antikegel“

b) „Rechtecksstreifen“ ergeben bei Rotation um die y-Achse „Hohlzylinder“. Diese werden aufsummiert.

c) $V = \frac{8}{3}\pi$

Aufgabe 6

Sei a < b. Dann ist „dx“ auf der rechten Seite negativ und damit wechselt das Vorzeichen des Integrals.

Aufgabe 7 kontinuierliche Modellbildung eines diskreten Sachverhaltes

a) • Das erste Integral gibt die Anzahl aller berufstätigen Menschen dieses Landes an, das zweite Integral die Anzahl jener berufstätigen Menschen, die mindestens einen Tag krank waren. Die Differenz gibt somit die Anzahl der berufstätigen Menschen dieses Landes an, die im Jahr 2012 nie krank waren.

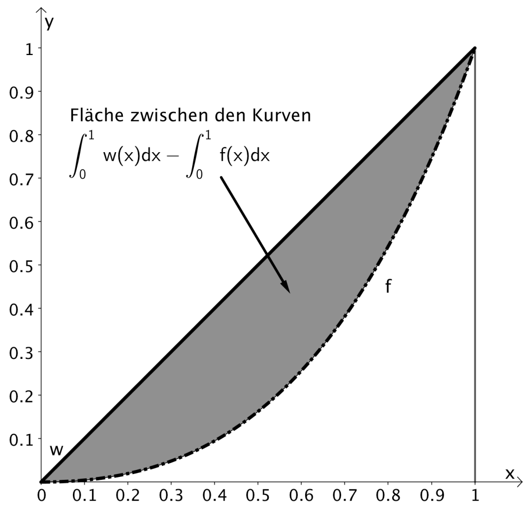
• mittlere Krankheitsdauer = $\frac{\text{Anzahl aller Krankheitstage}}{\text{Anzahl aller Berufstätigen}} = \frac{\int_1^{365} t \cdot K(t)\,dt}{\int_0^{365} K(t)\,dt}$

b) • Alle Menschen, die zwischen f1 und f2 Franken verdienen.

• $\int_0^{f_1} f \cdot Z(f) \cdot df$

• $\frac{\int_{f_1}^{+\infty} f \cdot Z(f) \cdot df}{\int_{f_1}^{+\infty} Z(f) \cdot df}$

Aufgabe 8 Gini-Koefizient



a) f(0.2) = 0.02: Die ärmsten 20% der Bevölkerung verfügen über 2% des Einkommens.
f(0.5) = 0.16: Die ärmere Hälfte verfügt über 16% des Einkommens, d.h. auch: Die reichere Hälfte verfügt über 84%!
1 – f(0.8) = 0.46: Die reichsten 20% der Bevölkerung verfügen über 46% des Einkommens.

b) $\int_0^1 w(x) \cdot dx - \int_0^1 f(x) \cdot dx = 0.227$

⇒ Gini-Koeffizient = 0.227 : ½ = 0.453

c) Bei b) dürften wir auch rechnen: $\int_0^1 w(x) \cdot dx - \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 (w(x) - f(x)) \cdot dx$

Dies besagen ja gerade die Rechenregeln für Integrale. Wir führen noch einmal aus:

$\int_0^1 w(x) \cdot dx - \int_0^1 f(x) \cdot dx = W(1) - W(0) - (F(1) - F(0)) = W(1) - F(1) - (W(0) - F(0)) = \int_0^1 (w(x) - f(x)) \cdot dx$

Anhang 1 Schreibweise von Leibniz

Gottfried Leibniz (1646 – 1716)

Die Schreibweise des Integrals geht auf Gottfried Leibniz zurück.
Er erfasste die Fläche unter einem Funktionsgraphen durch immer schmalere Rechtecke.
Heute sagen wir: Wenn es immer mehr schmalere Rechtecke sind, nähert sich die Summe ihrer Flächeninhalte immer mehr dem eigentlichen Flächeninhalt an.

Leibniz stellte sich vor, dass man irgendwann „unendlich viele unendlich schmale“ Rechtecke hätte.

Deshalb bezeichnete er diesen Flächeninhalt mit $\int_a^b f(x)dx$.

Das Integralzeichen $\int \ldots$ sollte an den Buchstaben „S“ für Summe erinnern. Und f(x)dx stand für das Produkt aus der Höhe f(x) und der „unendlich kleinen Breite“ dx des jeweiligen Rechtecks.
Insgesamt bedeutet das Symbol:
Der Flächeninhalt unter dem Graphen ist die Summe der Inhalte aller unendlich schmalen Rechtecke.

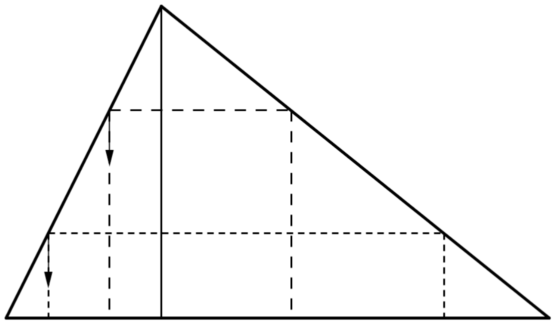
Diese Schreibweise hat seit Leibniz zu einem immensen Fortschritt in der Mathematik geführt und sie erweist sich bis heute als praktisch. Die ihr zugrunde liegende Vorstellung von unendlich schmalen Rechtecken ist zwar „anschaulich“, aber heikel.

Wie breit wären solche Rechtecke denn? Kann man sich sie als Strecken vorstellen? Haben sie also die Breite 0 und damit den Flächeninhalt 0? Und wie viel ist dann unendlich mal null?

Wie vertrackt die Rede vom „unendlich Kleinen“ ist, zeigt das folgende Beispiel.

Ein Dreieck wird durch die Höhe in ungleiche Teile zerlegt.

Zu *jeder* senkrechten Strecke im rechten Dreieck lässt sich eine gleich lange Strecke im linken finden. Das rechte Dreieck enthält keine einzige Strecke mehr als das linke!
Ergäben sich die Inhalte der Teildreiecke aus den Strecken, dann wären beide Flächeninhalte gleich gross!



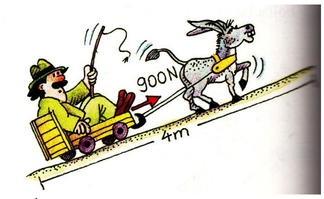
Problem „unendlich mal null“

Denken Sie sich in nebenstehender Tabelle in jeder Zeile für x immer grösser werdende Zahlen eingesetzt.
Begründen Sie, dass dann das Produkt beider Faktoren, letztlich also „unendlich gross“ mal „unendlich klein“, in jeder Zeile zu einem anderen Ergebnis führt...

Faktor, der beliebig gross wird	*Faktor, der beliebig klein wird*	*Produkt („unendlich mal null“)*
x	$\frac{1}{x}$	...
x^2	$\frac{1}{x}$	...
x	$\frac{1}{x^2}$	...

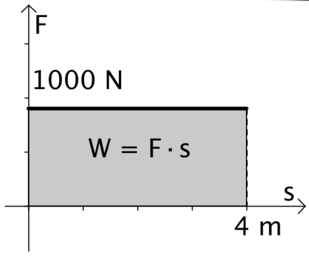
Das Problem der „unendlich kleinen Grössen“ wird heute in der Mathematik mit Hilfe von **Grenzwerten** gelöst. Grenzwerte ermöglichen eine saubere, wenn auch sehr technische Rechtfertigung des Vorgehens der Analysis, also sowohl der Differenzial-, wie auch der Integralrechnung.

Anhang 2 Arbeitsintegral



Aus dem Physikunterricht kennen wir die Formel:

Arbeit = Kraft × Weg.



Wird z.B. ein Wagen mit konstanter Zugkraft von 900 N (Newton) eine s = 4 m (Meter) lange Rampe hochgezogen, so beträgt die verrichtete Arbeit W = F·s = 900 N · 4m = 3600 Nm = 3600 J (Joule).

Betrachtet man hier die Arbeit als (konstante) Funktion des Weges s, so kann die Arbeit W = F·s als (Rechtecks-)Fläche unter der Kraftkurve interpretiert werden.
Verändert sich die Kraft mit dem zurückgelegten Weg s, ist also F eine nicht-konstante Funktion, so wird die Sache wieder komplizierter... , aber wir haben die Idee des Integrals!

Wir stellen uns den vom Körper zurückgelegten Weg in n kleine Wegstücke Δs zerlegt vor.
Für jedes dieser Wegstücke rechnen wir mit einer „durchschnittlichen Kraft“ $F(s_i)$.
Die in einem solchen Wegstück verrichtete Arbeit beträgt dann angenähert $W_i = F(s_i)\cdot\Delta s$.
Für die gesamte Arbeit gilt demnach:

$$W \approx W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} W(s_i)\cdot\Delta s$$

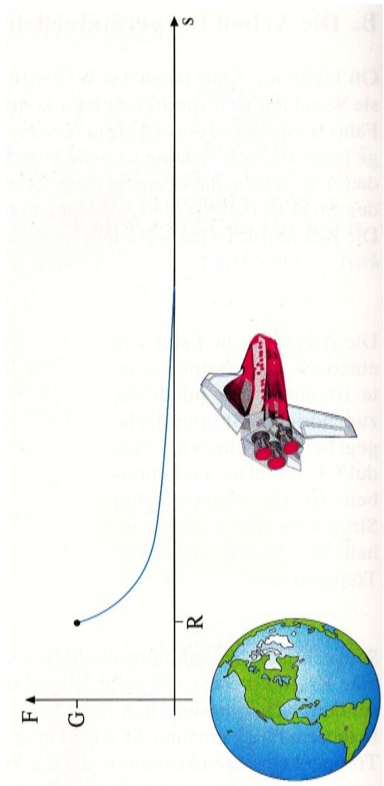
Je kürzer die Wegstücke (also $\Delta s \to 0$), desto genauer die gesamte Arbeit.

Das Integral liefert den exakten Wert: $W = \lim\limits_{\Delta s\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(s_i)\cdot\Delta s$. Damit kommen wir auf die

Formel für die verrichtete Arbeit

$W = \int_a^b F(s)\cdot ds$, wenn ein Körper von a nach b verschoben wird.

Beispiel **Raumfähre ins All**



Die Raumfähre Columbia hat eine Startmasse von 2000 Tonnen. Welche Arbeit muss theoretisch aufgebracht werden, um sie in eine 240 km hohe Umlaufbahn zu bringen?

Lösung

Die Anziehungskraft F der Erde ändert sich mit dem Abstand s vom Ermittelpunkt nach der Formel $F(s) = \frac{M\cdot m\cdot G}{s^2}$

(M = Erdmasse, m = Masse des Körpers, G = Gravitationskonstante)

$$W = \int_a^b F(s)\cdot ds = \int_a^b \frac{M\cdot m\cdot G}{s^2}\cdot ds = M\cdot m\cdot G \int_a^b \frac{1}{s^2}\cdot ds = M\cdot m\cdot G\left[-\frac{1}{s}\right]_a^b$$

$$= M\cdot m\cdot G\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

Mit M = Erdmasse = $6\cdot 10^{24}$ *kg; G =* $6.67\cdot 10^{-11}$ m^3/kgs^2*; m =* $2\cdot 10^6$ *kg und den Grenzen* $a = R_{Erde} = 6.37\cdot 10^6$ *m und b =* $6.61\cdot 10^6$ *m erhalten wir für die Arbeit ungefähr* $W = 4.5\cdot 10^{12}$ *J.*

Gelungene Integration