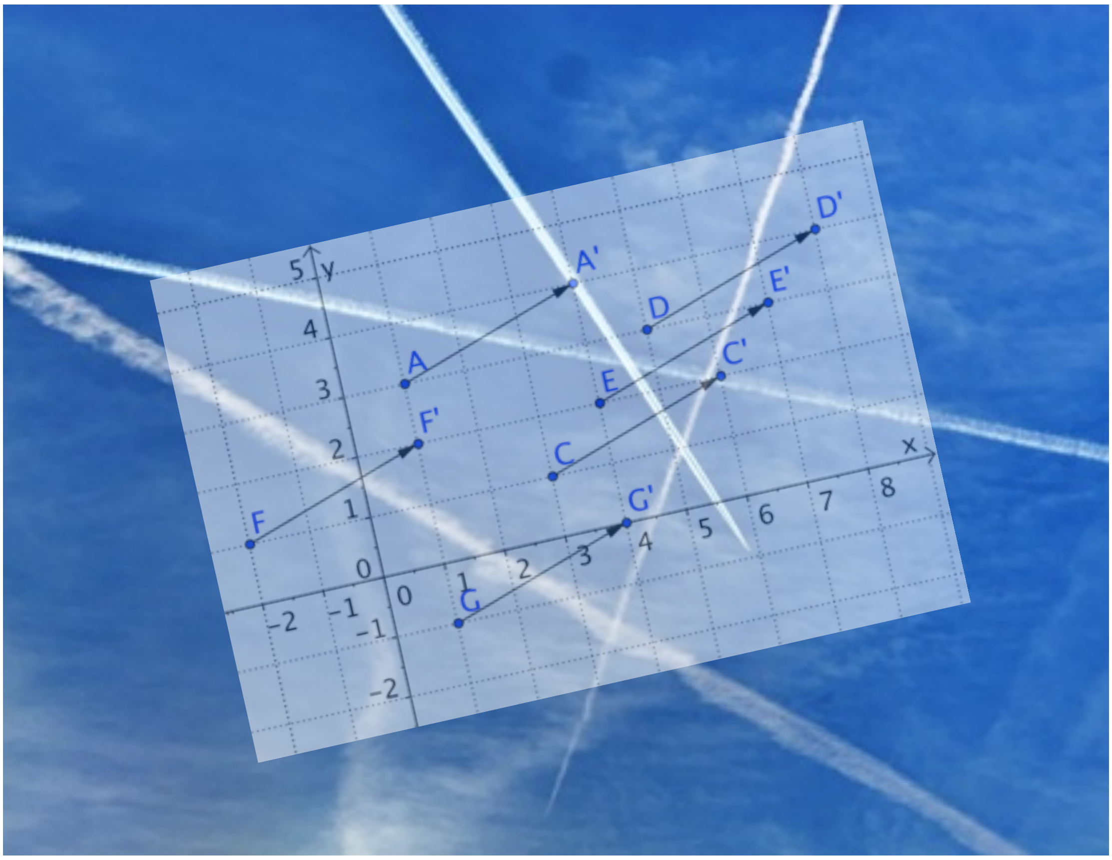
Datum Name



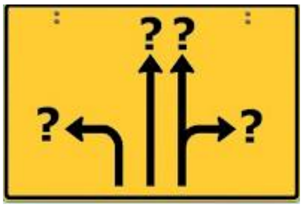
Vektorgeometrie

Gerade 3D

Aufgaben & Lösungen

Inhalt

0 Repetition – Gerade 2D



Es gibt ***3 Grundaufgaben*** im Zusammenhang mit Geraden.

Alle weiteren Aufgaben lassen sich auf diese Grundaufgaben zurückführen!

Grundaufgabe 1 Punkte und Gerade

a) Punkttest und laufender Punkt

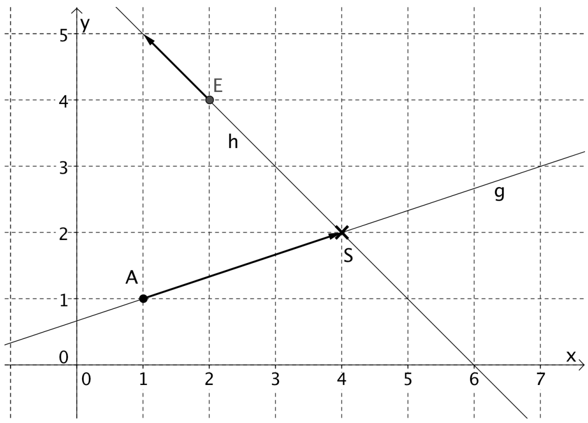
Gegeben sei die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Liegt der Punkt P(7/2) auf der Geraden g?
- Welche Form, abhängig von t, hat ein Punkt L auf g (L heisst auch *laufender Punkt*) ?

b) Gerade durch zwei Punkte

Wie lautet die Parametergleichung der Geraden h durch die Punkte C(2/4) und D(1/5)?

Grundaufgabe 2 Schnittpunkt und Schnittwinkel



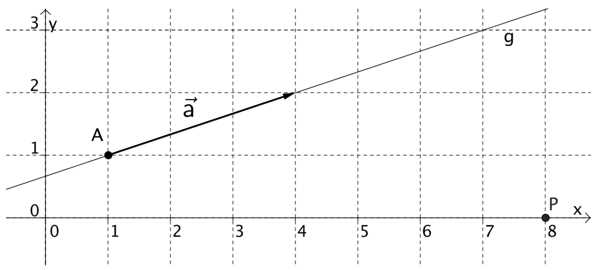
Vgl. Abbildung:
Wie lauten die Gleichungen der Geraden von g und h?

Berechnen Sie den

a) den Schnittpunkt

b) den Schnittwinkel von g und h.

Grundaufgabe 3 Abstand Punkt–Gerade



Vgl. Abbildung:
Wie lautet die Gleichung der Geraden g?

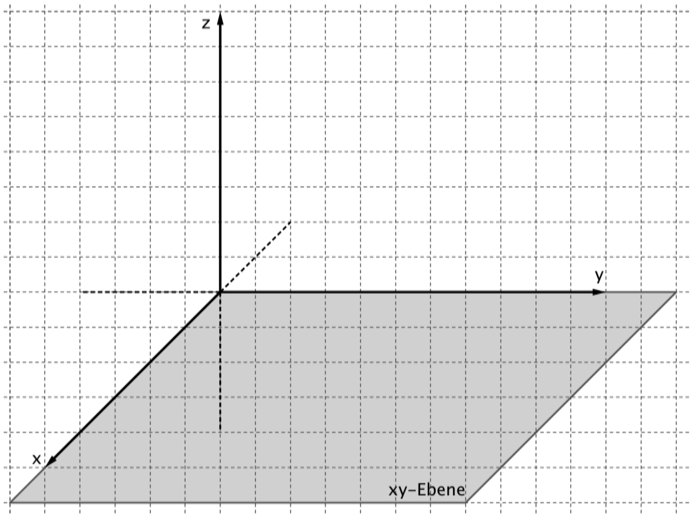
a) Welcher Punkt auf der Geraden g hat vom Punkt P(8/0) den Abstand 4?

b) Berechnen Sie den Abstand von P zur Geraden g.

Zusatzfrage
Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Werten für t in a) und b)?

1 Einstieg

3D Koordinatensystem



Bisher haben wir uns mit Punkten und Vektoren in der *Ebene* befasst, also *2-dimensional*.

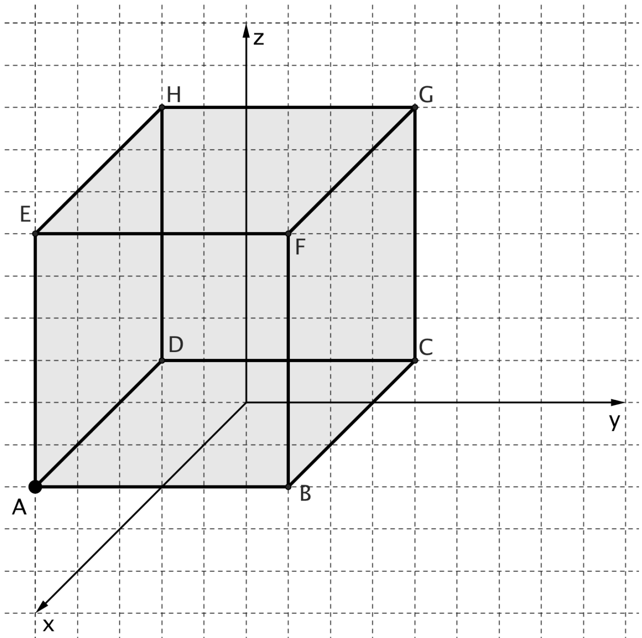
Nun wenden wir uns diesen Objekten im *Raum* zu, also *3-dimensional*.
Behilflich ist uns, wie immer, ein Koordinatensystem.

In einem *räumlichen Koordinatensystem* brauchen wir eine „dritte" Dimension, also eine dritte Achse: die ***„z-Achse"***.

Beispiel 1 **mein erstes 3D-Koordinatensystem ☺, Punkte einzeichnen**

Zeichnen Sie in ein dreidimensionales Koordinatensystem folgende Punkte (x/y/z) ein:
P(1/4/0) Q(2/3/2) R(–1/–2/1) S(4/1/–1)

Beispiel 2 **Punkte ablesen**



Der Punkt A des Würfels hat die Koordinaten A(1/–2/–0.5).

Bestimmen Sie die anderen Koordinaten der Eckpunkte des Würfels.

Beispiel 3 **Projektionen**

a) Zeichnen Sie in ein räumliches Kordinatensystem den Punkt P(2/3/4) und dessen Projektionen...

- die Projektion P' auf die xy-Ebene
- die Projektion P'' auf die yz-Ebene
- die Projektion P''' auf die xz-Ebene.

b) Wie weit ist P vom Ursprung entfernt?

Beispiel 4 **Wo liegt P?**

Finden Sie die fehlende Koordinate.
Geben Sie dann die Koordinaten des Spiegelpunktes P* an.

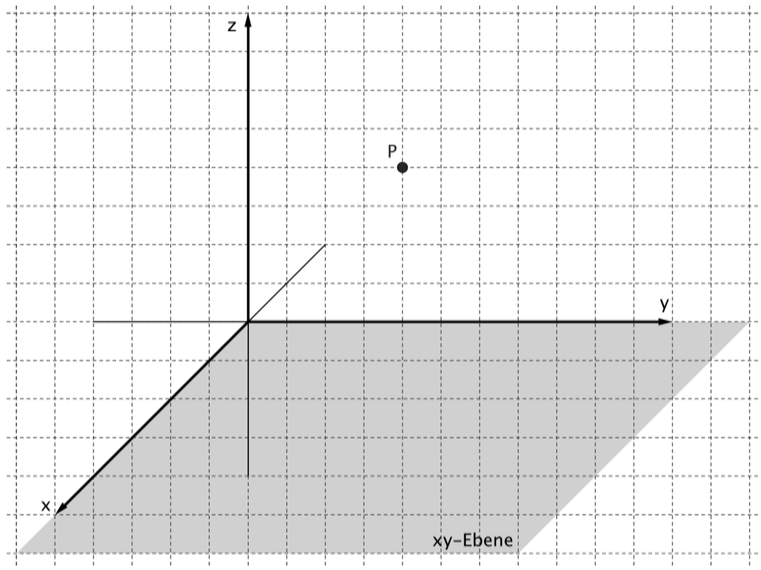
a) P(2/3/z) und P*(x/y/z)
bei Spiegelung an der xy-Ebene.

b) P(0/2/z) und P*(x/y/z)
bei Spiegelung an der xz-Ebene.

c) P(x/y/4) und P*(x/y/z)
bei Spiegelung an der yz-Ebene.

d) P(–4/y/z) und P*(x/y/z)
bei Spiegelung an der xz-Ebene.

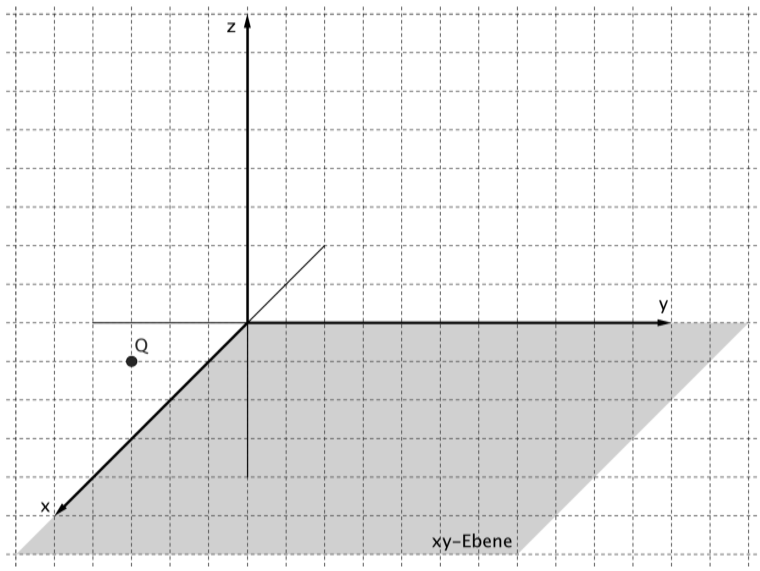
e) P(1/y/z) und P*(x/y/z)
bei Spiegelung an der x-Achse



Beispiel 5 **Wo liegt …?**

a) Abgebildet ist ein Punkt Q.
Wo könnte Q liegen?

- Geben Sie verschiedene Möglichkeiten an.
- Wie viele solcher Möglichkeiten gibt es?
- Welche Gemeinsamkeiten haben diese Punkte?

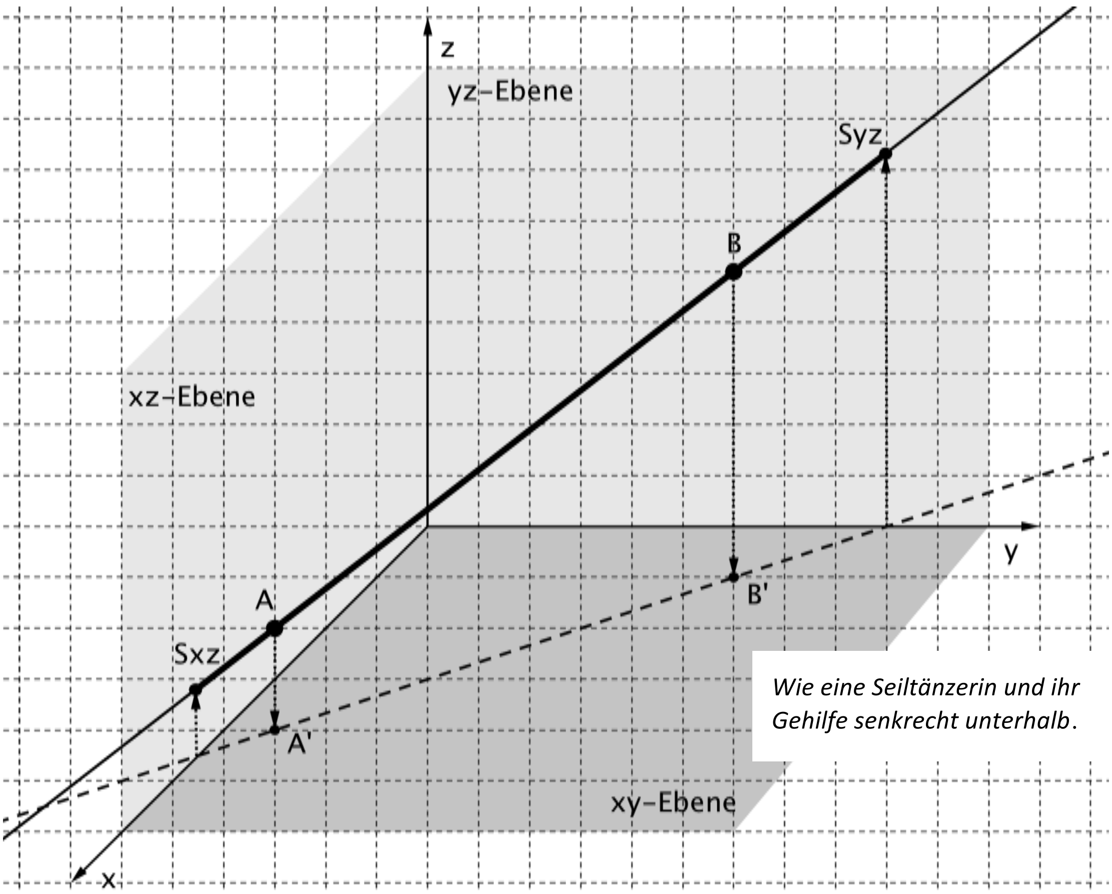


b) Beschreiben Sie präzise, wo sich die Punkte in einem 3D Koordinatnensystem befinden.

P(x/0/0) Q(0/y/z) R(0/y/4) S(0/a/a)

Geraden im 3D zeichnen

Die Punkte A und B und deren Projektion A' und B' auf die xy-Ebene einzeichnen und verbinden:



Wichtig ist zu unterscheiden zwischen echten und scheinbaren Schnittpunkten. Im Beispiel oben schneidet die Gerade die z-Achse nicht, obwohl sich die Geraden in der Zeichnung „schneiden".

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen heissen *Spurpunkte* und sind wichtig für die „Orientierung".
Der *sichtbare* Teil der Geraden AB ist das Stück zwischen den Spurpunkten.

Beispiel 6 Geraden

a) Gegeben sind die Punkte A(2/1.5/3) und B(4/4.5/1).

- Zeichnen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem und legen Sie die Gerade durch A und B.
- Welcher Teil der Gerade ist „sichtbar"?

b) Die Gerade g(AB) geht durch die Punkte A(4/0/1.5) und B(2/2/2.5) und die Gerade h(CD) durch C(1/–2/3) und D(1/6/3). Zeichnen Sie die Geraden ins Koordinatensystem.

- Welcher Teil der Geraden ist sichtbar?
- Schneiden sich die beiden Geraden?

2 Gerade 3D

Ist Vektorgeometrie im Raum schwieriger als in der Ebene? Nein!

Aus „Schiffen“ werden „Flugzeuge“ (siehe Titelblatt), aber: Vorgehensweisen im Zusammenhang mit Vektoren, die wir im 2D kennengelernt haben, können wir *problemlos* auch im 3D anwenden.

Dies zeigt die unglaubliche „*Rechenkraft*“ von Vektoren.

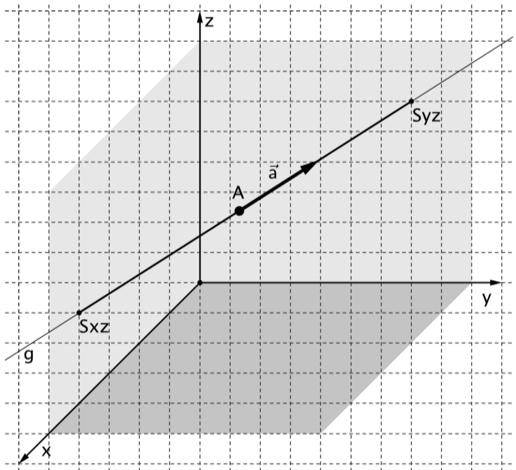
Wir werden nur ein einziges neues Problem lösen müssen – den Abstand von sog. *windschiefen Geraden*. Aber dazu später...

Geben Sie ein Beispiel an eines 3-dimensionalen Vektors. Wie lang ist er?
Geben Sie ein Beispiel an eines 4 (!)-dimensionalen Vektors. Wie lang ist er?

Wie lautet wohl die allgemeine Parametergleichung einer Geraden im 3-dimensionalen Raum? Machen Sie ein Beispiel!

Eine Gerade hat keinen Anfang und kein Ende, aber:
„zeigt“ die Gerade des Beispiels nach „oben“ oder nach „unten“?

(„Startet“ das Flugzeug oder „landet“ es?)



In völliger Analogie zum 2-dimensionalen Fall behandeln wir die ***3 Grundaufgaben*** im Zusammenhang mit Geraden

Grundaufgabe 1 Punkte und Gerade

a) Punkttest und laufender Punkt

Gegeben ist die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Liegt der Punkt P(5/4/2) auf g? Liegt der Punkt Q(0/–11/7) auf g?
- Welche „Form“ haben die Punkte auf g? *(„laufender“ Punkt*)

b) Gerade durch zwei Punkte

- Gegeben sind die Punkte A(–2/1/5) und B(4/2/–5). Wie lautet eine Gleichung von g(AB)?
- h geht durch A(2/–1/5) und schneidet die x-Achse bei x = 5. Wie lautet eine Gleichung von h?

Grundaufgabe 2 Schnittpunkt und Schnittwinkel

Berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der beiden Geraden.

a) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hinweis *verschiedene Parameter einführen!*

Grundaufgabe 3 Abstandsproblem

a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(2/–3/5) von der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Welcher Punkt L auf g hat von P den Abstand 6? Gibt es mehrere Lösungen?

Nun zur „neuen“ Aufgabe! Lesen Sie selber!

c) Abstand von (windschiefen) Geraden

Voraussetzung
Sie können das Abstandsproblem Punkt/Gerade lösen

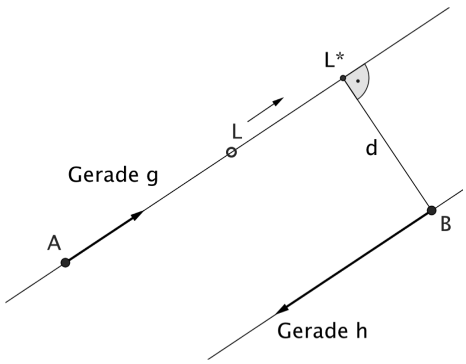
Ziel
Sie können das Abstandsproblem Gerade/Gerade lösen

Wir unterscheiden zwei Fälle

1. Fall Geraden sind parallel

Dieser Fall ist einfach.
Wir können nämlich einen beliebigen Punkt auf der einen Geraden wählen und dann haben wir ein Abstandsproblem Punkt/Gerade.

Wir wählen der Einfachheit halber den Ausgangspunkt B der Geraden h und bestimmen dann den Abstand dieses Punktes B zur Geraden g mit Hilfe des laufenden Punktes L. Tun Sie dies bei folgender Aufgabe.



parallele Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

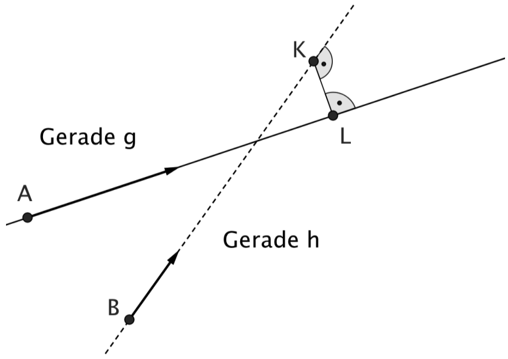
- Zeigen Sie, dass die Geraden g und h parallel sind!
- Berechnen Sie den Abstand der Geraden g und h.

2. Fall Geraden sind windschief (= kein Schnittpunkt, nicht parallel)

Dieser Fall ist schwieriger.

Stellen Sie mit zwei Stiften windschiefe Geraden dar!

Auch hier gilt: eine *kürzeste* Strecke (= Abstand) muss sowohl auf g, als auch auf h *senkrecht* stehen!



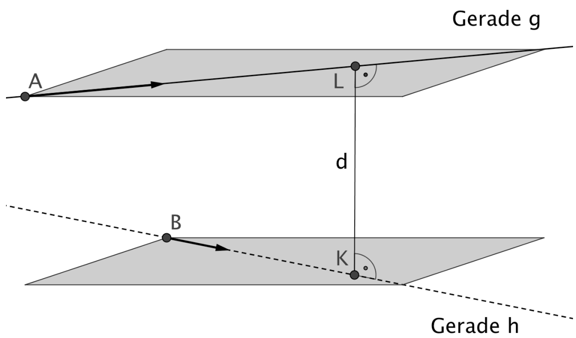
Wir müssen also zwei Punkte K und L mit dieser Eigenschaft finden (vgl. Abbildung oben).

Aber: Gibt es überhaupt solche Punkte mit dieser Eigenschaft?

Idee *zwei windschiefe Geraden lassen sich IMMER in zwei parallele Ebenen „legen"!*

Versuchen Sie, sich dies vorzustellen!
(= Hauptschwierigkeit dieser Aufgabe)

Hinweis *Projizieren Sie die eine Gerade auf die andere...*



Jetzt ist aber klar, dass es solche Punkte K und L (und damit eine senkrecht stehende Strecke auf beide Geraden) gibt. Wir bestimmen also diese beiden Punkte L und K und können dann den Abstand berechnen.

Wir haben also die **Lösungsidee** gefunden:

- laufender Punkt L auf g *und* laufender Punkt K auf h
- Vektor $\overrightarrow{LK}$ muss senkrecht auf g *und* h stehen, also zwei Bedingungen:
  $\overrightarrow{LK} \cdot \vec{a}_g = 0$ *und* $\overrightarrow{LK} \cdot \vec{a}_h = 0$
- Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die Parameter t und s und damit den Abstand

Nun sind Sie bereit für den

Abstand von windschiefen Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind!
- Berechnen Sie den Abstand der windschiefen Geraden g und h.

windschiefes Haus

Weitere Aufgaben

Beispiel 7 Geraden

a) Gegeben sind die Punkte A(–2/1/5) und B(4/2/–5). Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden g, die durch

- A und B verläuft.
- den Mittelpunkt der Strecke AB und *parallel* zur x-Achse verläuft.

b) Gegeben sind A(3/2/5) und B(–1/4/7). Weisen Sie nach, dass der Punkt P(1/3/6) auf der Geraden g(AB) liegt. Was lässt sich über die Lage von P in Bezug auf A und B aussagen?

c) Gegeben sind die beiden Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind und berechnen Sie deren Abstand.

Beispiel 8 zwei Würfel

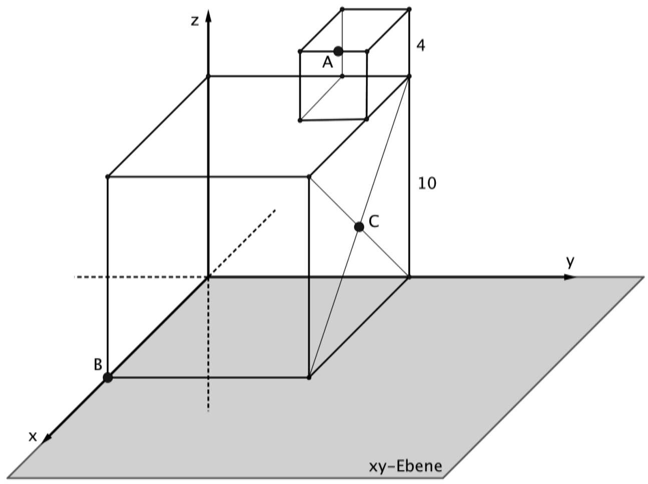
Zwei Würfel sind gegeben, A ist Kantenmittelpunkt.

a) Bestimmen Sie Parametergleichungen der Geraden g(AB) und g(BC).

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel dieser Geraden.

c) In welchem Punkt durchstösst die Gerade g(AB) den Würfel?

d) Berechnen Sie den Abstand von A zu g(BC).



Beispiel 9 Schatten

Ein Flugzeug fliegt frühmorgens Richtung Landeplatz. Der Flug wird beschrieben durch

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Wo trifft das Flugzeug auf den Landeplatz (der sich in der xy-Ebene befindet)?

b) Die Sonne scheint tief in Richtung $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Trifft der Schatten des Flugzeugs den im Punkt (10/12/0) frühstückenden Herr Bucher?

Beispiel 10 abstrakt

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(4/2/1) und B(0/6/3).

a) Bestimmen Sie eine *möglichst einfache* Parametergleichung der Geraden g.

b) Die Gerade h ist gegeben durch h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel von g und h.

c) Stellen Sie den in b) berechneten Sachverhalt in einer *qualitativen* Skizze dar.

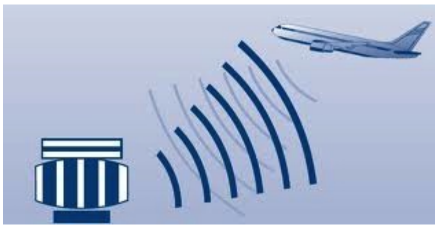
d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P(2/1/8) von der Geraden g.

e) Welche spezielle Lage hat die Gerade h?

f) In welchem Punkt durchstösst die Gerade g die xy-Ebene?

g) Geben Sie eine Gerade i an, welche durch den Punkt (4/–2/10) geht und

- parallel zur Geraden g
- senkrecht zur Geraden g verläuft.



Beispiel 11 Flugbahn

In einem Koordinatensystem beschreibt die xy-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet.
Die x-Achse weist in Richtung Osten und die y-Achse in Richtung Norden.

Das Flugzeug F_1 steigt unmittelbar nach dem Abheben im Pistenpunkt P(–10/0/0) längs der Geraden:
g_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf. Flugzeug F_2 fliegt entlang der Geraden g_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Längeneinheit beträgt 1 km, t in min ab 7.30.

a) Ermitteln Sie, in welche Himmelsrichtung F_1 fliegt und begründen Sie, dass F_2 konstante Flughöhe hält.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs F_1 und den Steigungswinkel der Flugbahn F_1.

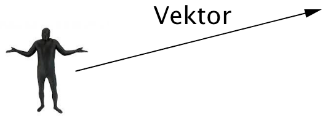
c) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass sich die Flugbahnen der Flugzeuge senkrecht schneiden.

d) Kommt es zu einer Kollision der beiden Flugzeuge?

e) F_1 überfliegt in der Höhe von 6 km eine Radarstation R in der xy-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten der Radarstation R.

f) Das Radar in R erfasst alle Objekte bis zu einer Entfernung von 50 km. Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke von F_2 im Überwachungsbereich des Radars.

3 Zusammenfassung



Was ist ein Vektor?

... ein sehr allgemeiner Begriff...

... ein Vektor ist ein **n-dimensionales Zahlentupel („Zahlenturm“)**.

„vehere“ (latein) = tragen, fahren, ziehen, schleppen, befördern

... ein Vektor ist ein **Vehikel**.

Sie kennen **Algebra** und **Geometrie**...

Was ist der Unterschied?

Was haben Vektoren damit zu tun?

„Jede geometrische Figur kann in eine algebraische Gleichung umgewandelt werden und jede algebraische Gleichung in eine geometrische Form.“

„Für mich sind alle Dinge Mathematik.“

René Descartes (1596-1650),
„Erfinder“ des kartesischen Koordinatensystems.

Wie lassen sich **Geraden** – ein grundlegendes, geometrisches Objekt – mit Hilfe von Vektoren beschreiben?

Gibt es einen Unterschied zwischen den Geraden

- in der Ebene
- im Raum?

Was bringt einem eine solche Beschreibung?

Nennen Sie aus Ihrer Sicht **3 Grundaufgaben** im Zusammenhang mit **Geraden**.

- Erklären Sie, wie Sie diese lösen.
- Diese Aufgaben sollten sie beherrschen, also in vernünftiger Zeit lösen können.

Anhang 1 Schattenwurf

Objekte, die beleuchtet werden, erzeugen einen Schatten.
Wie sieht dieser Schatten aus? Wie lang, wie gross sind diese Schatten?

Ausgangssituation

Im Punkt K(2/3/0) steht ein Stab der Höhe H = 3. Im Punkt L(1/5/4) ist eine Lampe.

- Skizzieren Sie die Situation.
- Zeichnen Sie den Schatten ein, den der Stab wirft. Beachte: die xz-Ebene ist eine Wand!
- Wie lang ist der Schatten?

Variieren der Ausgangssituation

- Was passiert, wenn die „Lampenkoordinaten“ L(1/5/3.5) sind, die Lampe also *tiefer* hängt?
  Berechnen Sie auch für diesen Fall die Schattenlänge!
- Was passiert, wenn die Höhe beliebig *variiert* wird, also L(1/5/h)?
  Für welchen Wert von h trifft der Schatten nicht mehr auf die Wand?
  Berechnen Sie auch für diesen Fall die Schattenlänge (in Abhängigkeit von h!).

Projekt (Zeit 2 h)

Wählen Sie selber ein Objekt (Stab, Würfel, Kühlschrank...), das einen Schatten wirft.

- Bearbeiten Sie zeichnerisch und rechnerisch eine von Ihnen gewählte Aufgabenstellung.
- Variieren Sie diese Aufgabenstellung. Entwickeln Sie diese weiter!
  Verschieben Sie zB Lampenposition, bearbeiten Sie Spezialfälle etc.

Beachten *mathematische Korrektheit und Qualität, Sauberkeit, Originalität.*

Anhang 2 zeichnen & rechnen

Versuchen Sie, die folgenden Aufgaben sowohl *zeichnerisch*, als auch *rechnerisch* zu lösen!

Platzbedarf pro Aufgabe: ↓a, →b, ↕c heisst:

a Einheiten vom oberen Rand, b Einheiten vom linken Rand, c Einheiten vertikaler Platzbedarf

Sichtbarkeit von Geraden

Bestimmen Sie anhand der Spurpunkte die Sichtbarkeit der Geraden g(AB).

a) A(10/–2/6), B(2/6/2) (↓4, →7, ↕11)

b) A(–3/6/3), B(3/4/1) (↓5, →7, ↕15)

Gerade und Würfel

Der Würfel mit der Kantenlänge k = 6, von dem drei Kanten auf den positiven Koordinatenachsen liegen, wird von einer Geraden g(AB) geschnitten.
Heben Sie Sichtbarkeit von Würfel und Gerade hervor.

a) A(12/–3/–2), B(0/9/6) (↓7, →10, ↕14)

b) A(2/4/7), B(12/–1/2) (↓9, →6, ↕14)

c) A(5/12/–3), B(1/0/9) (↓10, →4, ↕16)

Lage von Geraden

Wie können zwei Geraden im Raum zueinander liegen?
Zeichnen Sie die Geraden g und h in ein Koordinatensystem ein. Welche „Lage“ zueinander nehmen sie ein? Bestimmen Sie gegebenenfalls auch die Schnittpunkte (zeichnerisch *und* rechnerisch).

a) g(AB) mit A(2/2/3), B(5/8/6) und h(CD) mit C(2/3/5), D(4/5/3)

b) g(AB) mit A(2/2/3), B(1/1/4) und h(CD) mit C(2/3/5), D(4/5/3)

c) g(AB) mit A(2/2/3), B(2/4/3) und h(CD) mit C(2/3/5), D(4/5/3)

d) g(AB) mit A(1/0/0), B(1/1/1) und h(CD) C(2/4/5), D(3/6/8)

Helikopter

Der Helikopter startet im Punkt A („Abflugpunkt“) in der xy-Ebene.
In der Höhe z = 4 km befindet sich eine Wolkendecke.
An welchem Ort „durchstösst“ der Helikopter die Wolkendecke?

1 Einheit = 1 km; die Flugrichtung des Helikopters wird beschrieben durch den Vektor $\vec{v}$.

a) Start in A(5/7/0), $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Start in A(1/1/0), $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Start in A(0/3/0), $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) Start in A(2/–1.5/0), $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

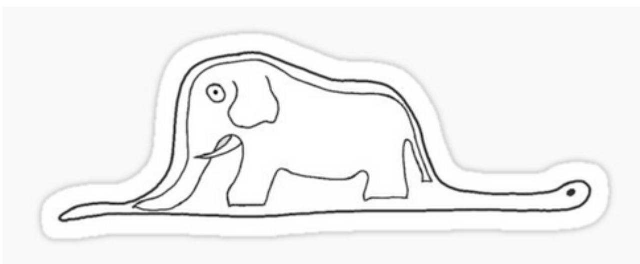
Dreieck

Heben Sie den sichtbaren Teil des Dreiecks ABC farbig hervor.

a) A(7/5/–3), B(4/8/6), C(1/3/3) (↓6, →4, ⇕13)

b) A(6/–2/4), B(10/6/–4), C(2/6/4) (↓5, →5, ⇕14)

c) A(2/–3/4), B(5/6/–2), C(–2/9/–4) (↓5, →5, ⇕10)



Was ist sichtbar?

5 Lösungen

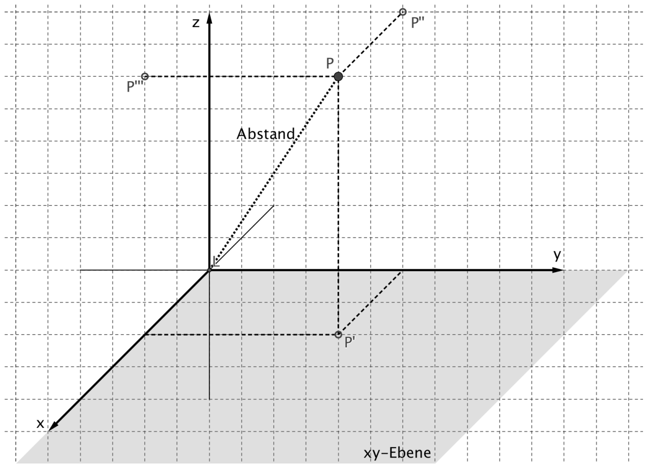
Beispiel 1

Vgl. Unterricht

Beispiel 2

B(1/1/–0.5); C(–2/1/–0.5); D(–2/–2/–0.5); E(1/–2/2.5); F(1/1/2.5); G(–2/1/2.5); H(–2/–2/2.5)

Beispiel 3



a) siehe Abbildung

b) Der Abstand von P zum Ursprung beträgt

d = $\sqrt{2^2+3^2+4^2}$ = $\sqrt{29}$ ≈ 5.4

Diese Formel ist wichtig: es handelt sich um den ***räumlichen Pythagoras***!

Beispiel 4

a) P(2/3/3)	P*(2/3/–3) bei Spiegelung an der xy-Ebene
b) P(0/2/2)	P*(0/–2/2) bei Spiegelung an der xz-Ebene
c) P(4/4/4)	P*(–4/4/4) bei Spiegelung an der yz-Ebene
d) P(–4/0/0)	P*(–4/0/0) bei Spiegelung an der xz-Ebene
e) P(1/2.5/2.5)	P*(1/–2.5/–2.5) bei Spiegelung an der x-Achse

Beispiel 5

a) Möglichkeiten: Q(1/–1/0); Q(3/0/1); Q(–3/–3/–2); etc

Gemeinsamkeit dieser Punkte ist, dass sie alle in der Richtung $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ liegen.

Beachte *Dieser Vektor ist in unserer 2-dimensionalen Zeichung* ***unsichtbar****.*

b) auf der x-Achse; in der yz-Ebene; Höhe 4 über y-Achse; auf der Diagonalen in der yz-Ebene

Beispiel 6

Vgl. Unterricht. Zu b): die Geraden schneiden sich in S(1/3/3).

Beispiel 7

a)

- g(AB): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$
- g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Mittelpunkt: $M = \frac{1}{2}(A + B)$

b) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; für t = 0.5 liegt P auf der Geraden

Lage: P liegt genau in der Mitte von A und B

c)

- g und h besitzen keinen Schnittpunkt. Weiter sind sie nicht parallel, weil die Richtungsvektoren nicht kollinear sind.
- Abstand d = 9 (die Lotfusspunkte sind L(4/4/2) und K(5/8/10))

Beispiel 8

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\gamma = 148.7°$ (oder: 31.3°)

c) $S(5\frac{5}{7} / 5\frac{5}{7} / 10)$

d) $d = \sqrt{80} \approx 8.9$

Beispiel 9

a) (12/14/0)

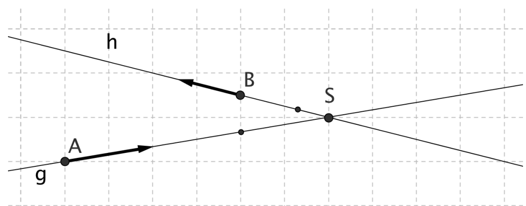
b) Nein

Beispiel 10

a) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) S(–2/8/4), $\gamma = 157.6°$ (oder: 22.4°)

c) bei b) berechnete Werte: $t_g = 3$; $t_h = -1.5$; $\gamma = 157.6°$



d) Abstand d = $\sqrt{45} \approx 6.7$
e) h liegt parallel zur xy-Ebene
f) $S_{xy}(6/0/0)$

g) parallel: i: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht: i: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel 11 Flugbahn

a) F_1 fliegt Richtung Nordosten; F_1 hält seine Höhe, weil die z-Komponente des Richtungsvektors gleich null ist.

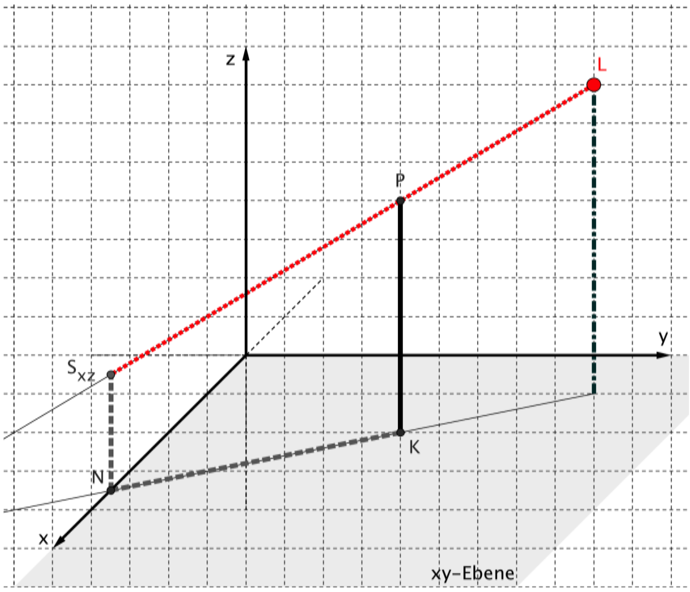
b) $v_1 = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 7.14 \frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 428.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; Steigungswinkel = 8° (Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$)

d) Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren gibt null: $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

e) Der Schnittpunkt ist S(40/50/10).
Es erfolgt keine Kollision, weil die beiden Flugzeuge den Schnittpunkt nicht zum gleichen Zeitpunkt erreichen: F_1 befindet sich bei S um 7.40, F2 um 7.32.
f) R(20/30/0)
g) 80 km

Idee laufender Punkt L auf F_2, dann $\left|\overrightarrow{RL}\right| = 50 \Rightarrow t_{1,2} \Rightarrow$ Eintritts – und Austrittspunkt

Lösungen Anhang 1

- 

- Schattenlänge s = $S_{xz}N + NK = 1.5 + \sqrt{11.25} = 4.85$

- der Schatten wird länger. S_{xz} „steigt" nach oben.
  Schattenlänge s = $S_{xz}N + NK = 2.25 + \sqrt{11.25} = 5.60$

- für h = 5; *mögliche Rechnung*

  $$g(LP): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L + t\overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ h \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3-h \end{pmatrix}$$

  aus $y = 0 \;\Rightarrow\; t = 2.5$
  aus $z = 0 \;\Rightarrow\; h + 2.5(3 - h) = 7.5 - 1.5h = 0 \;\Rightarrow\; h = 5$

  die Schattenlänge in Abhängigkeit von h beträgt (sofern $h \le 5$):
  $s(h) = S_{xz}N + NK = 7.5 - 1.5h + \sqrt{11.25} = -1.5h + 10.85$ (*lineare Abhängigkeit*)

  Was passiert mit dem Schatten, wenn h > 5 ist? Er wandert von N immer näher zu K...

  $$g(LP): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L + t\overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ h \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3-h \end{pmatrix}$$

- aus $z = 0 \;\Rightarrow\; h + t(3 - h) = 0 \Rightarrow t = \frac{-h}{3-h} = \frac{h}{h-3} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ h \end{pmatrix} + \frac{h}{h-3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{2h-3}\!/_{h-3} \\ {}^{3h-15}\!/_{h-3} \\ 0 \end{pmatrix}$

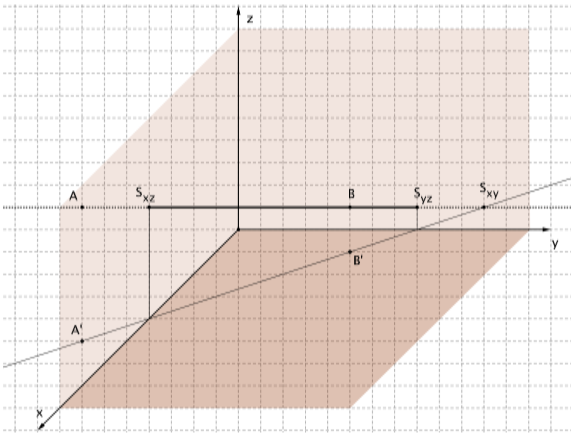
  die Schattenlänge in Abhängigkeit von h beträgt (sofern h > 5)

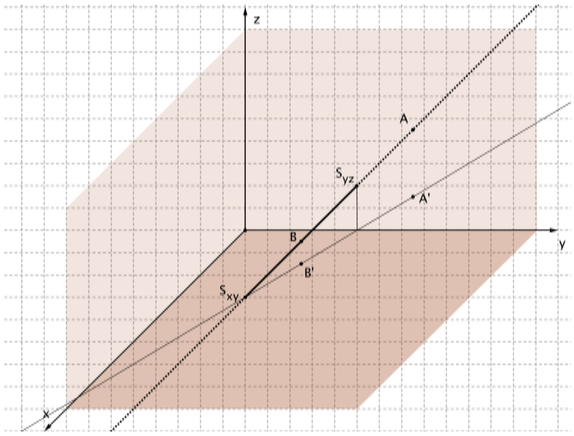
  $$s(h) = S_{xy}K = \left|\begin{pmatrix} {}^{-3}\!/_{h-3} \\ {}^{6}\!/_{h-3} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{{}^{45}\!/_{(h-3)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{h-3}$$ (*keine lineare Abhängigkeit*)

Lösungen Anhang 2

Sichtbarkeit von Geraden

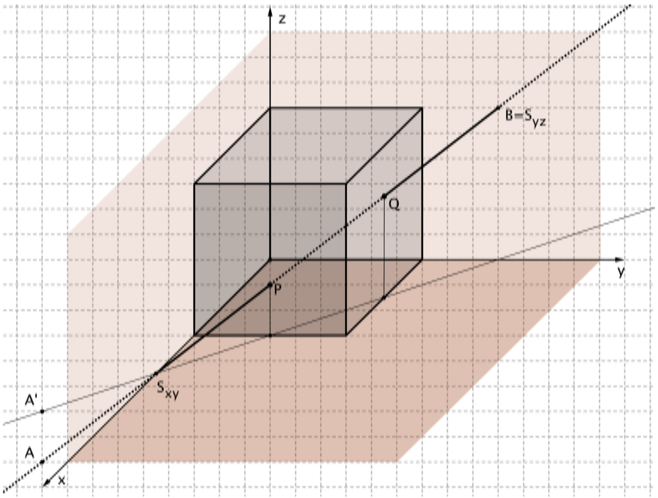
a) Spurpunkte: $S_{xy}(-2/10/0)$, $S_{yz}(0/8/1)$, $S_{xz}(8/0/5)$; sichtbarer Teil ist die Strecke $S_{yz}S_{xz}$
b) Spurpunkte: $S_{xy}(6/3/0)$, $S_{yz}(0/5/2)$, $S_{xz}(15/0/-3)$; sichtbarer Teil ist die Strecke $S_{xy}S_{yz}$

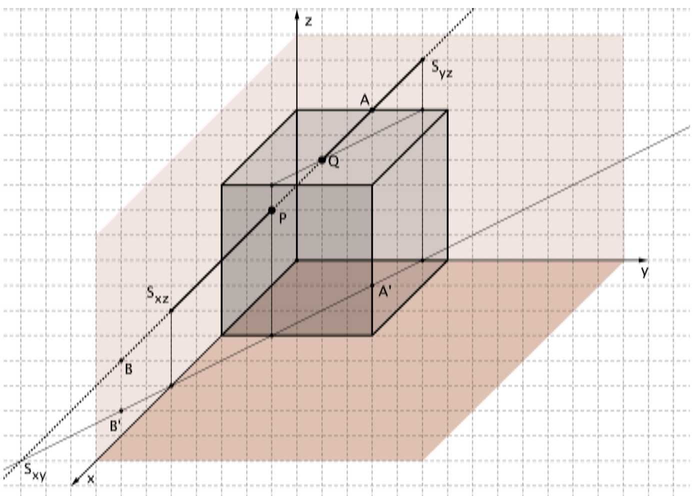


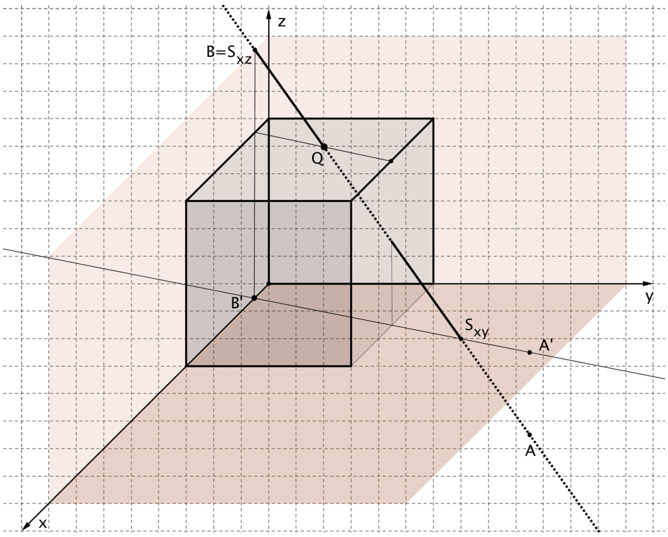


Gerade und Würfel

a) g(AB): $S_{xz}(9/0/0)$, S_{yz} = B; Schnittpunkte P(6/3/2), Q(3/6/4)
b) g(AB): $S_{yz}(0/5/8)$, $S_{xz}(10/0/3)$; Schnittpunkte P(6/2/5), Q(4/3/6)
c) g(AB): $S_{xy}(4/9/0)$, S_{xz} = B; Schnittpunkte P(3/6/3), Q(2/3/6)

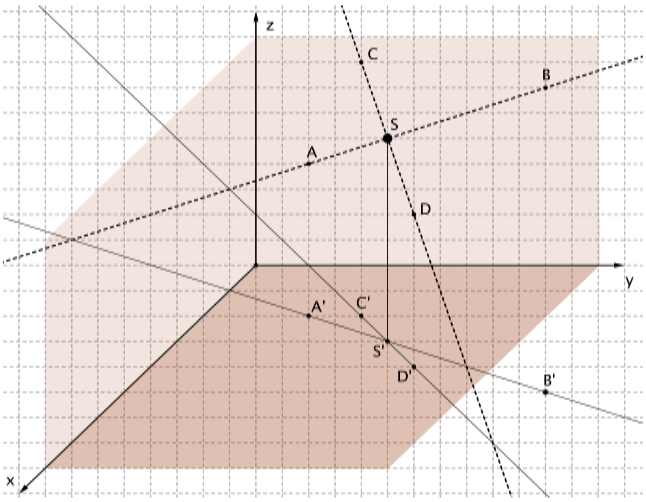




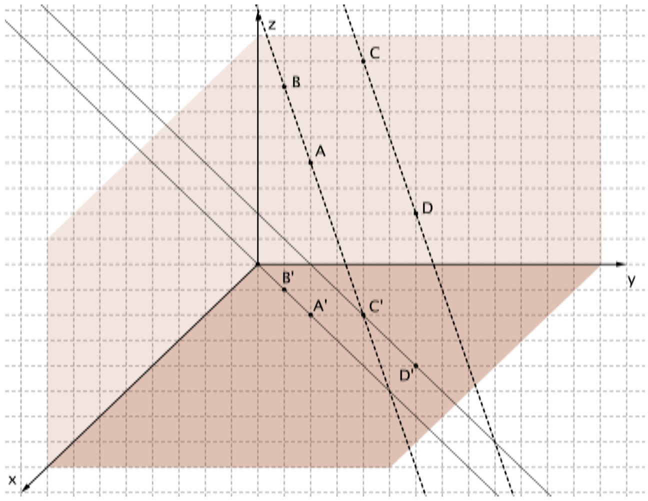


Lage von Geraden

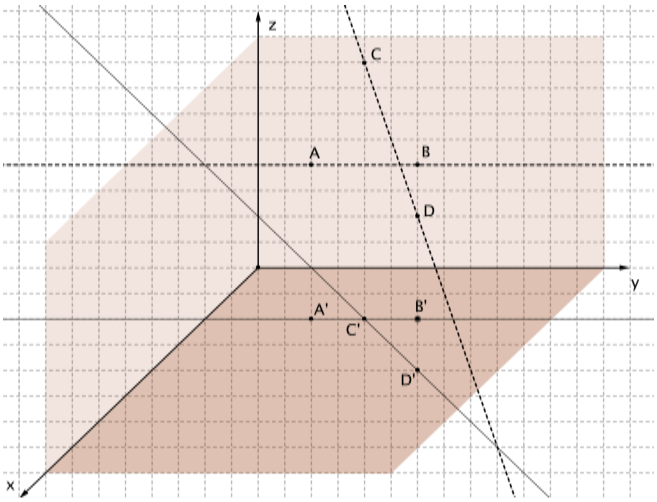
a) g und h schneiden sich: Schnittpunkt S(3/4/4)



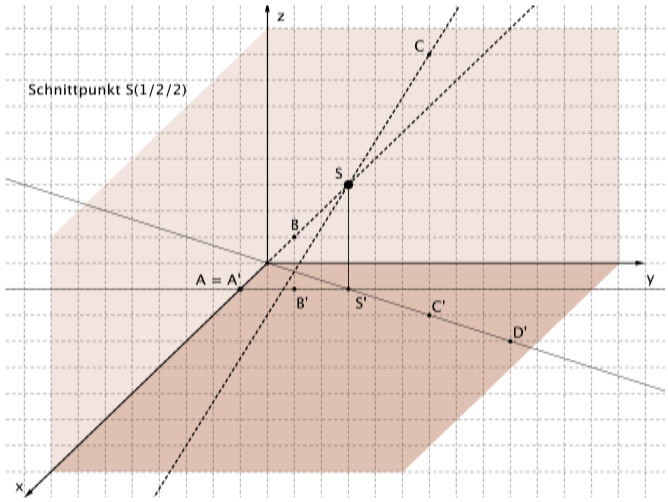
b) die Geraden g und h sind parallel



c) die Geraden g und h sind windschief

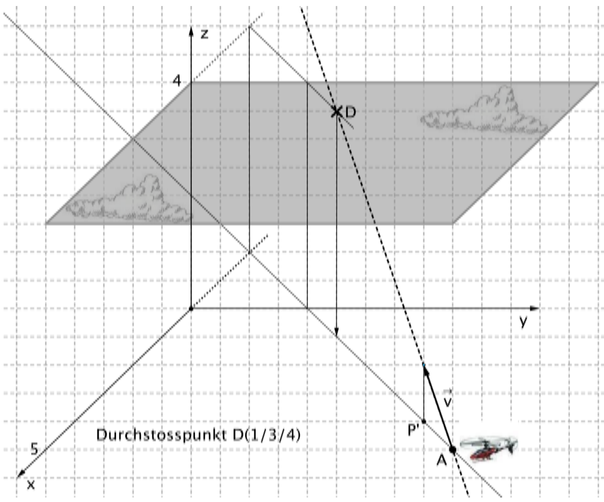


d) g und h schneiden sich: Schnittpunkt S(1/2/2)

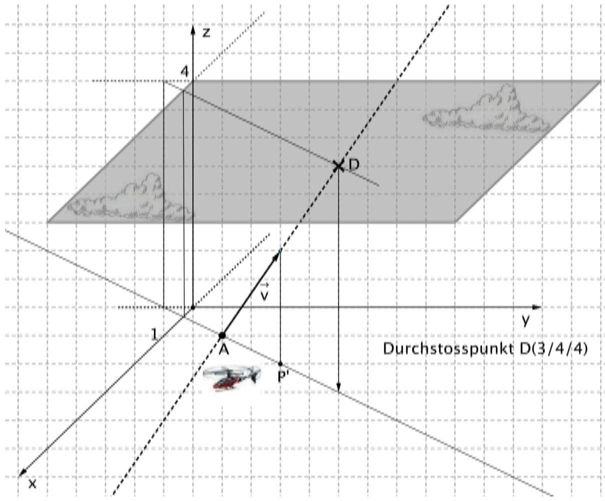


Helikopter

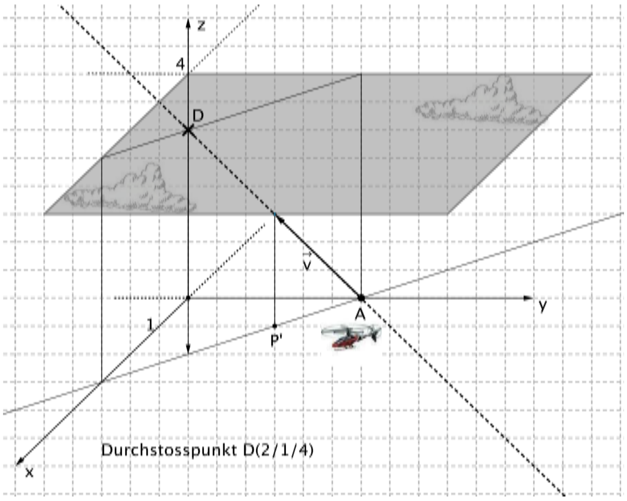
a) D(1/3/4)



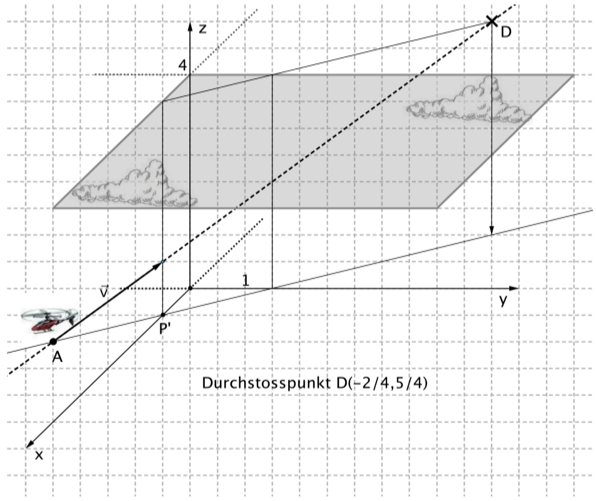
b) D(3/4/4)



c) D(2/1/4)

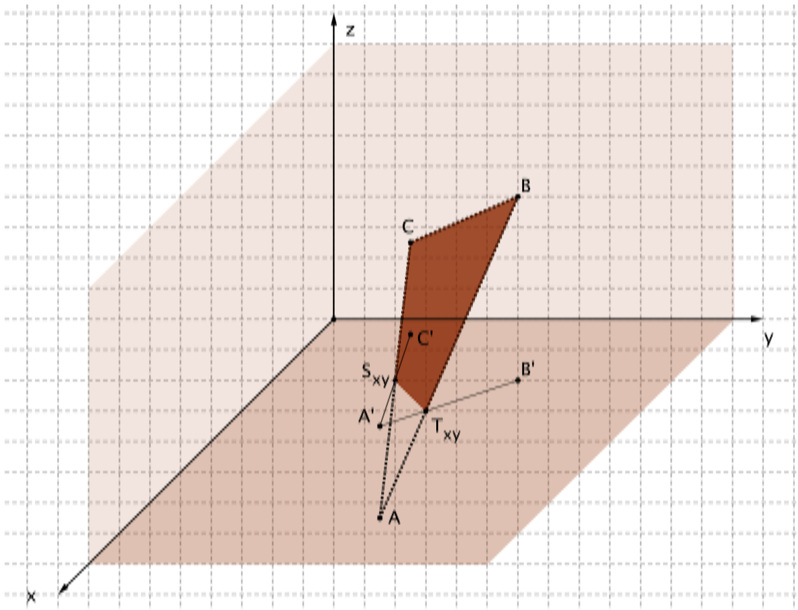


d) D(−2/4.5/4)

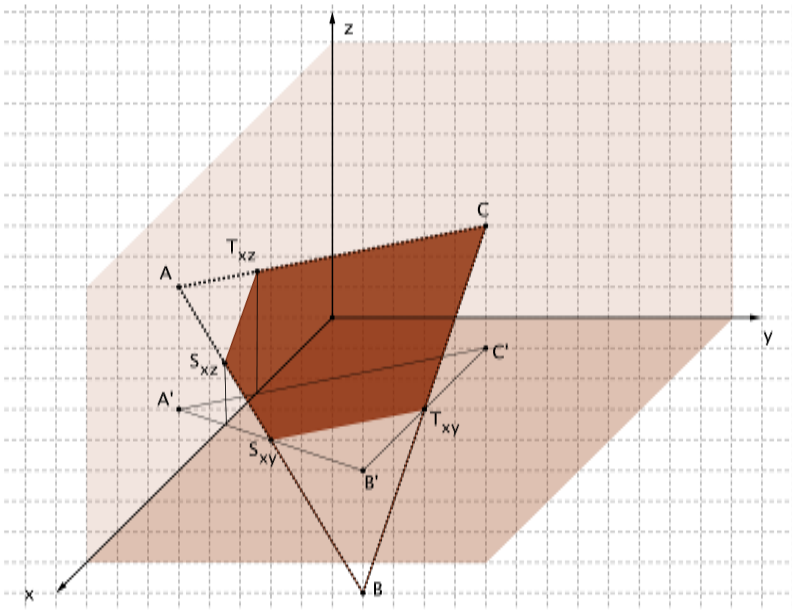


Dreieck

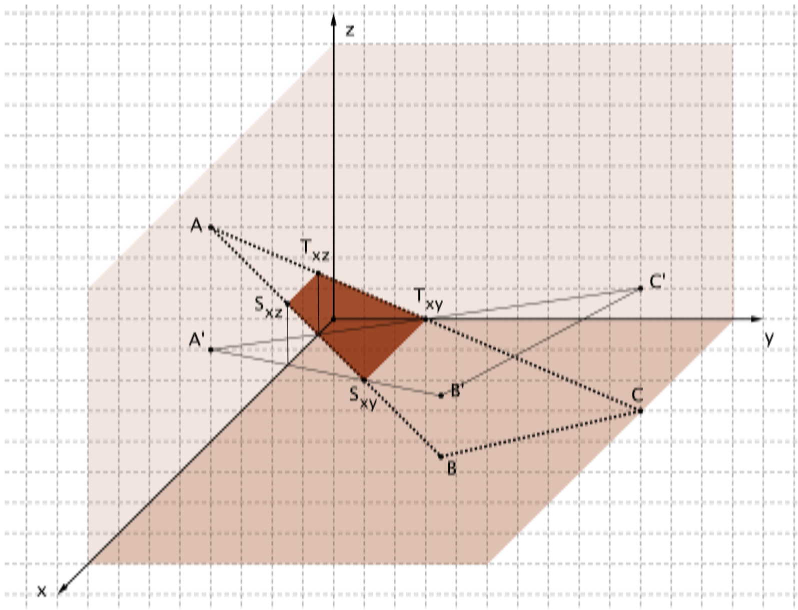
a) sichtbarer Teil
$S_{xy}(4/4/0) \rightarrow T_{xy}(6/6/0) \rightarrow B$
$\rightarrow C \rightarrow S_{xy}(4/4/0)$

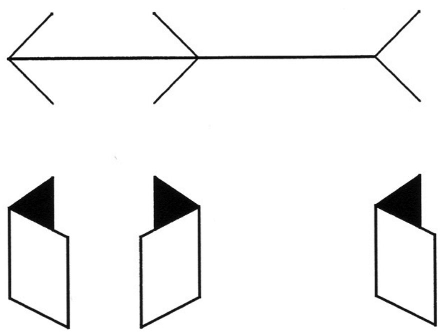


b) sichtbarer Teil
$S_{xy}(8/2/0) \rightarrow T_{xy}(6/6/0) \rightarrow C$
$\rightarrow S_{xz}(8/2/0) \rightarrow T_{xz}(5/0/4)$
$\rightarrow S_{xy}(8/2/0)$



c) sichtbarer Teil
$S_{xz}(3/0/2) \rightarrow S_{xy}(4/3/0)$
$\rightarrow T_{xy}(0/3/0) \rightarrow T_{xz}(1/0/2)$
$\rightarrow S_{xz}(3/0/2)$






HIER – DU SOLLTEST WOHL WISSEN, WIE MAN SOWAS BEDIENT!
1016
PERSCHEID