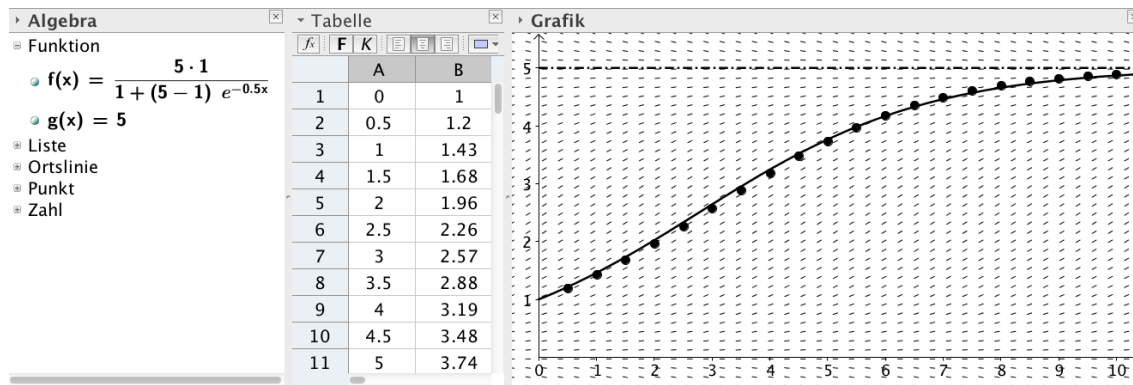
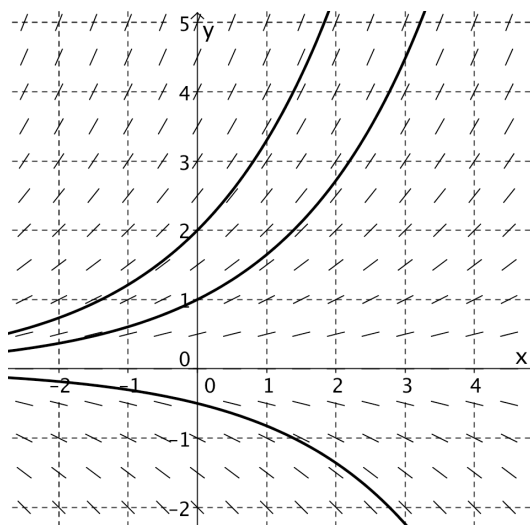
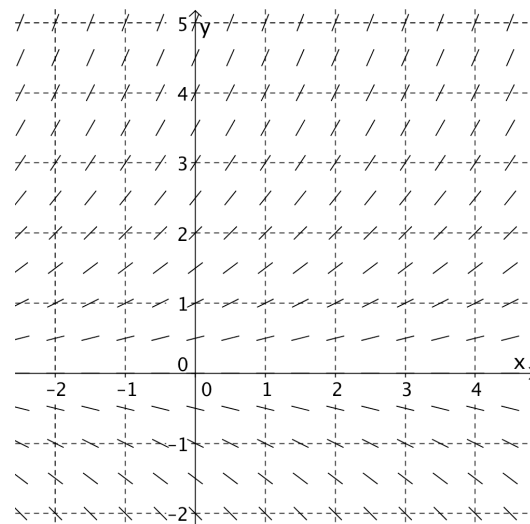
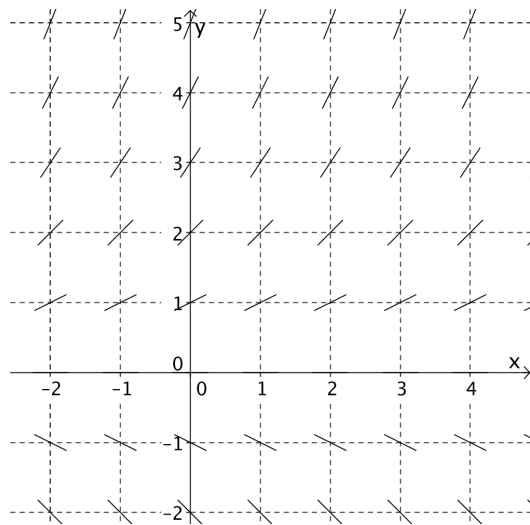


Differenzialgleichungen

Einführung



lineare Differenzialgleichungen
logistische Differenzialgleichung
Richtungsfeld
Separation der Variablen
Euler-Verfahren



Der Geist der Lösungskurve lauert im Richtungsfeld und wartet darauf, sichtbar zu werden.

0	Repetition	3
	<ul style="list-style-type: none">• Rund um e^x• Aufwärmen	
1	Einstieg	5
2	Differenzialgleichungen	
	Teil 1 Beispiele von Differenzialgleichungen	6
	<ul style="list-style-type: none">• Natürliches Wachstum• Newton'sches Abkühlungsgesetz• Logistisches Wachstum• Ein (un-)wichtiger Begriff: die Wachstumsrate*	
	Teil 2 Lösungsmethoden	15
	<ul style="list-style-type: none">• Richtungsfeld• Separation der Variablen• Euler-Verfahren	
3	Ausfliessen*	31
	Anhang	34
	<ul style="list-style-type: none">• Integration von $\frac{1}{x}$• Begründung des Vorgehens bei der Separation der Variablen• Lösen der logistischen Differenzialgleichung	

Repetition



Rund um e^x

Du kennst die Funktion

$$f(x) = e^x.$$

Frage Was ist an dieser Funktion besonders?

Beispiel 0 Graphen von e-Funktionen

a) Skizziere – mit unterschiedlichen Farben – die Graphen von

- $f(x) = e^x$
- $g(x) = e^{-x}$... und nenne Eigenschaften dieser Kurven.

b) Die „Mutterfunktion“ $f(x) = e^x$ wird im Folgenden variiert. Mache dir die Änderungen *bewusst*.

- Skizziere die Graphen von $f(x) = e^x$ und $g(x) = 2 \cdot e^x$.
Allgemein: $f(x) = C \cdot e^x$.
Benenne den „Effekt“ der Konstanten C auf das Aussehen der Kurve. Beachte auch $C < 0$.
- Skizziere die Graphen von $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^x + 2$.
Allgemein: $f(x) = e^x + D$. Benenne den „Effekt“ der Konstanten D auf das Aussehen der Kurve.
- Skizziere die Graphen von $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{2x}$.
Allgemein: $f(x) = e^{ax}$. Benenne den „Effekt“ des Parameters a auf das Aussehen der Kurve.

c) Skizziere qualitativ die beiden Kurven. Denke sie dir „zusammengesetzt“ aus der Mutterfunktion...

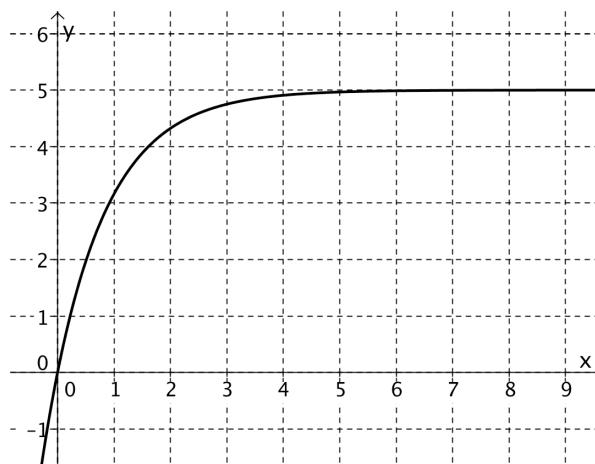
- $f(x) = 4 \cdot e^{0.2x} - 6$
- $y = 6 - 4 \cdot e^{-0.5x}$

d) Abgebildet ist eine Kurve der Form $y = C \cdot e^{ax} + D$.

- Treffe Aussagen über C, a und D.
- Leite y ab.
Hinweis Kettenregel!

Die Funktion $f(x) = e^x$ heisst **natürliche Exponentialfunktion**.

Warum dieser Name?
Was soll an der Basis „e“ natürlich sein?
Du wirst es erfahren.





Aufwärmen

In der Welt verändern sich Dinge dauernd. Die Mathematik hilft uns, diese Veränderungen besser zu verstehen. Den Schlüssel zum Erfolg kennst du bereits: es ist die Idee der **Funktion**.

Beispiel 1 Joghurt

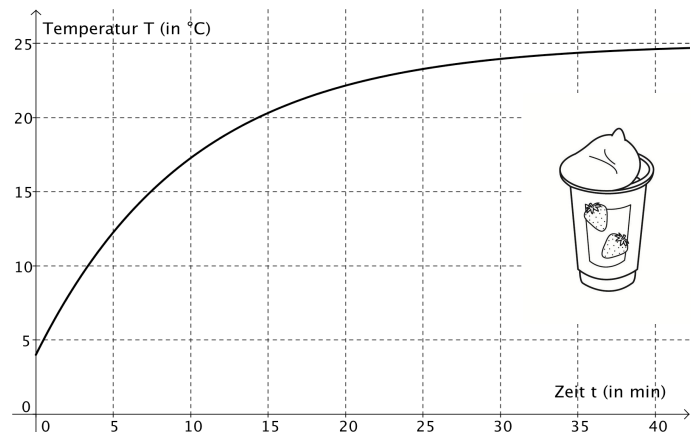
a) Lola nimmt ein Joghurt aus dem Kühlschrank. Für die Temperatur gilt:

$$T(t) = 25 - 21 \cdot e^{-0.1t},$$

wobei die Temperatur T in $^{\circ}\text{C}$ und die Zeit t seit der Entnahme in Minuten gemessen werden.

Berechne und interpretiere – mit Einheiten –

- den Funktionswert $T(5)$.
- die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ im Intervall $[5;20]$.
- die momentane Änderungsrate $T'(5)$.
- den Grenzwert von $T(t)$ für $t \rightarrow +\infty$.



b) Sei $T'(t) = 3e^{-0.2t}$. Wie lautet die Stammfunktion $T(t)$, für welche gilt: $T(0) = 0$?

Wir haben die Erwärmung des Joghurts mathematisch mit Hilfe einer Funktion beschrieben. Wir haben also für diesen Vorgang ein *Modell* erstellt bzw. diesen Vorgang *modelliert*.

Frage Was ist, was soll ein Modell?

Merke

- Mit **Funktionen** können wir Vorgänge beschreiben. Oft verändert sich etwas im Laufe der Zeit. Dann wählen wir den Buchstaben t (für das englische Wort *time*) anstelle von x .
- Ist die unabhängige Variable die Zeit t , dann erfasst die **Ableitungsfunktion** die momentane Änderungsrate (interpretierbar als „Geschwindigkeit“) eines Vorganges.
- Ist die Ableitungsfunktion gegeben, erhalten wir durch **Integrieren** die ursprüngliche Funktion – bis auf eine Konstante – zurück.

Vielleicht hast du dich auch schon gefragt, wie man auf Funktionen wie $T(t) = 25 - 21 \cdot e^{-0.1t}$ kommt. Auch dies wirst du bald erfahren!

1 Einstieg – Was *ist* eine Differenzialgleichung?

Du kennst bereits Differenzialgleichungen!

Die Gleichung

$$f'(x) = -x + 3$$

ist eine Differenzialgleichung.

Bisher war es eine Gleichung bzw. die Ableitungsfunktion, mit der Du die momentane Änderungsrate berechnet hast.

Wir ändern jetzt den Blickwinkel und sagen:

$$f'(x) = -x + 3$$

ist eine Gleichung mit einer unbekanntem Funktion $f(x)$.

Auch die Lösung, die wir durch Integrieren finden, kennen wir:

$$f(x) = -0.5x^2 + 3x + C.$$

Damit haben wir unsere erste Differenzialgleichung gelöst! Die Lösung ist eine Funktion. Wir haben es also mit einer neuen Art von Gleichung zu tun!

Merke

- Eine Gleichung, in der die Ableitung einer Funktion auftritt, heisst **Differenzialgleichung**.
- Eine **Lösung einer Differenzialgleichung** ist keine Zahl, sondern eine **Funktion**. Eine Lösung finden wir durch geschicktes Raten oder durch Integration.

Beispiel 2 Gleichungen

Gleichungen sind ein zentrales Werkzeug der Mathematik.

a) Du hast bisher Gleichungen gelöst, wie zB.

$$x - 2 = 5$$

- Wie gehst du vor, um eine solche Gleichung zu lösen? Wie überprüfst du die Lösung?
- Es gibt kompliziertere Gleichungen, die kompliziertere Lösungsmethoden brauchen. Beispiel?

b) Löse die folgende Differenzialgleichung. Überprüfe die Lösung durch Einsetzen.

$$f'(t) + t = 5 + 2t^2.$$

Natürlich sind Differenzialgleichungen noch viel mehr.

In einer Differenzialgleichung tritt nämlich in der Regel neben der Ableitung der Funktion auch die Funktion selber auf! Dies erfahren wir im nächsten Abschnitt!

2 Differenzialgleichungen

Teil 1 Beispiele von Differenzialgleichungen



Natürliches Wachstum

Die Differenzialgleichung

$$f'(x) = a \cdot f(x)$$

ist die *Mutter* aller Differenzialgleichungen und heisst **Differenzialgleichung des natürlichen Wachstums**.

Unser **Ziel** ist:

- diese Gleichung zu verstehen (!)
- diese Gleichung zu lösen

Mutter und Wachstum. Das hat etwas mit Fortpflanzung zu tun. Und so ist es auch.

Wir nehmen unser Lieblingstier: den Hasen.

Wir nehmen mehrere Hasen und sprechen vornehm von einer Hasen*population*.

Hasen vermehren sich im Laufe der *Zeit* – wir haben also eine Funktion:

$$P(t) = \text{Anzahl Hasen zum Zeitpunkt } t$$



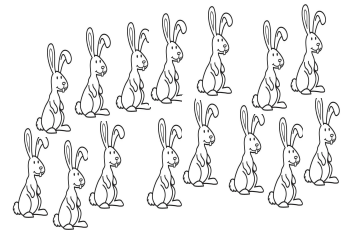
Frage 1 Was bedeutet – bei den Hasen – $P'(t)$?

Frage 2 Sie sehen zwei verschiedene Hasenpopulationen – zu einem bestimmten Zeitpunkt t .

linke Hasenpopulation P_L



rechte Hasenpopulation P_R



Was ist richtig?

$P_L(t) < P_R(t)$

$P_L(t) > P_R(t)$

$P_L'(t) < P_R'(t)$

$P_L'(t) > P_R'(t)$



Beispiel 3 natürliches Wachstum einer Population

Die Differenzialgleichung des natürlichen (Hasen-) Wachstums lautet:

$$P'(t) = a \cdot P(t) \quad (a \text{ ist ein „Modellparameter“})$$

a) Erkläre diese Gleichung! Formuliere diese Gleichung in einem „prägnanten“ Satz.

b) Wie lautet eine Lösung dieser Gleichung? Überprüfe die Lösung durch Einsetzen!

c) Macht dieses Modell in deinen Augen Sinn? Wenn ja, warum, wenn nein, warum nicht?

Beispiel 4 Wachstum & Zerfall

a) Von einer Population $P(t)$, t in Jahren, ist bekannt, dass die momentane Änderungsrate ein Fünftel der vorhandenen Population beträgt.

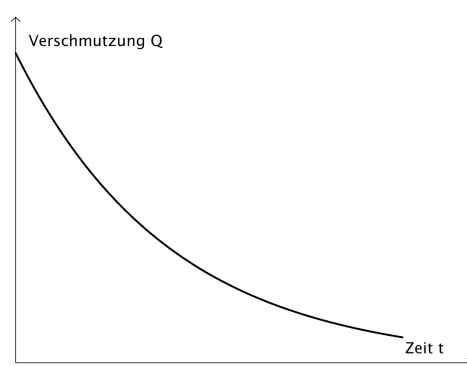
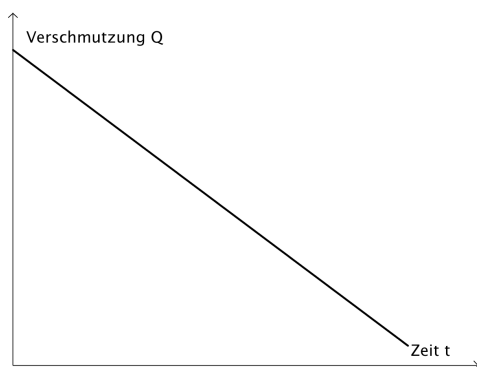
- Wie lautet die zugehörige Differenzialgleichung?
- Welche Funktionen lösen diese Differenzialgleichung? Wie lautet also die *allgemeine* Lösung?
- Um die Konstante C zu bestimmen brauchen wir eine zusätzliche Information über die Grösse der Population zu einem bestimmten Zeitpunkt – einen sogenannten *Anfangswert*. Wir nehmen an, dass zu Beginn (also für $t = 0$) 500 Lebewesen gab. Wie gross ist C ? Skizzieren Sie dann diese *spezielle Lösung* qualitativ
- Wie gross ist die Population nach 3 Jahren? Wann ist ihr Bestand grösser als 3000?

Merke

- Die **allgemeine Lösung** einer Differenzialgleichung enthält noch eine Konstante C .
- Eine **spezielle Lösung** wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, wenn wir der Konstanten C einen festen Zahlenwert zuweisen, etwa aufgrund eines vorgegebenen *Anfangswertes*.

b) Durch einen Unfall wird ein See verschmutzt. Dabei gibt Q die Masse des Giftstoffes in kg an. Aus einem Fluss gelangt frisches Wasser in den See, wird dort mit dem verschmutzten Wasser vermischt und dann über einen anderen Fluss abgeführt. Sei t die seit dem Unfall vergangene Zeit in Tagen.

- Die Verschmutzung nimmt ab, Q ist also fallend. Messungen zeigen weiter, dass Q nicht stets um den gleichen Wert abnimmt, sondern zu Beginn schneller, dann langsamer. Sie nimmt also *umso langsamer ab, je kleiner sie ist*. Welcher Graph bringt dies zum Ausdruck?



- Die zugehörige Differenzialgleichung trägt dem Rechnung (beachte das *Vorzeichen!*):
$$Q'(t) = -a \cdot Q(t) \quad (a > 0).$$
Wir wählen $a = 0.05$. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung?
- Der „Anfangswert“ der Verschmutzung beträgt $Q(0) = 12$ kg. Wie lautet die spezielle Lösung?
- Berechne die sogenannte *Halbwertszeit*, also die Zeit, die es braucht, bis sich die Verschmutzung auf den *halben* Wert gesenkt hat. Ist die Halbwertszeit vom Anfangswert abhängig?

Wir wenden uns im folgenden Beispiel noch einigen „technischen“ Aspekten unserer Differenzialgleichung bzw. deren Lösung zu.

Beispiel 5 technische Aspekte

a) Wir hätten die Differenzialgleichung in Beispiel 4b) auch wie folgt aufschreiben können:

$$Q'(t) = a \cdot Q(t) \quad (\text{und } a < 0!).$$

Wir wählen aber a immer positiv und schreiben demnach „ $-a$ “, wenn die Situation einen negativen „Modellparameter“ erfordert. Sehen Sie den Vorteil dieser Festlegung?

b) Wir wissen, dass die Funktionen $f(x) = C \cdot e^{ax}$ die Differenzialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x)$ lösen.

Ist auch die Funktion $f(x) = e^{ax} + C$ eine Lösung der Differenzialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x)$?

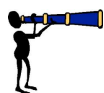
c*) Warum dürfen wir von einer *allgemeinen* Lösung sprechen? Es wäre doch denkbar, dass diese Differenzialgleichung weitere Lösungen besitzt – mit uns unbekanntem Funktionen.

Dem ist aber nicht so!

Zeige dazu, dass *jede* Lösung der Differenzialgleichung $f'(x) = a \cdot f(x)$ die Form $f(x) = C \cdot e^{ax}$ besitzt!

Hinweis Nimm an, dass $g(x)$ ebenfalls eine Lösung ist und betrachte die Funktion $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

Zeige jetzt, dass $h'(x) = 0$ gilt. Was heisst dies nun für $h(x)$? Was folgt damit für $g(x)$?



Beispiel 6 Rückblick

Ergänzen Sie den Lückentext!

Funktion , $f(x) = C \cdot e^{ax}$, Anfangswert , Ableitung , spezielle , Konstante C , $f'(x) = a \cdot f(x)$, Wachstums

Eine Differenzialgleichung ist eine Gleichung, in der die _____ der gesuchten Funktion auftritt.

Die Lösung einer Differenzialgleichung ist keine Zahl, sondern eine _____ .

Als wichtiges Beispiel haben wir die Differenzialgleichung des natürlichen _____ kennengelernt. Sie lautet:

und besitzt die allgemeine Lösung

Ist ein _____ vorgegeben, dann können wir die _____ berechnen.

Wir erhalten dann eine _____ Lösung der Differenzialgleichung.

Wir merken uns den wichtigen Satz:



Eine Differenzialgleichung stellt eine Beziehung auf zwischen der momentanen Änderung einer Grösse und der Grösse selbst.



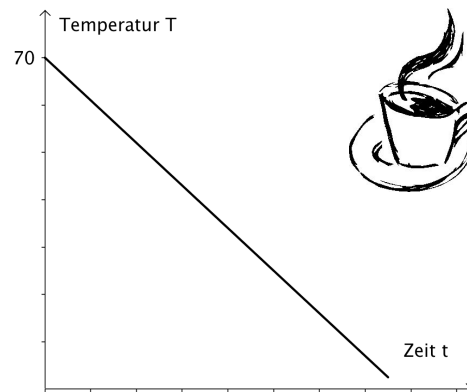
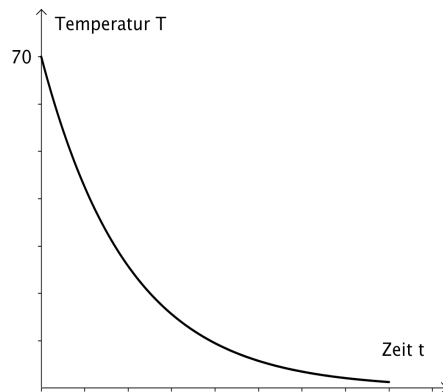
Newton'sches Abkühlungsgesetz

Beispiel 7 Kaffee

Wir stellen einen 70 °C heißen Kaffee nach draussen, wo es 0° ist. Was passiert?

Der Kaffee kühlt sich ab. Aber wie?

Welcher der beiden Graphen beschreibt den Abkühlungsvorgang wohl zutreffender? Nenne Gründe.



Der linke Graph erinnert uns an die Differenzialgleichung

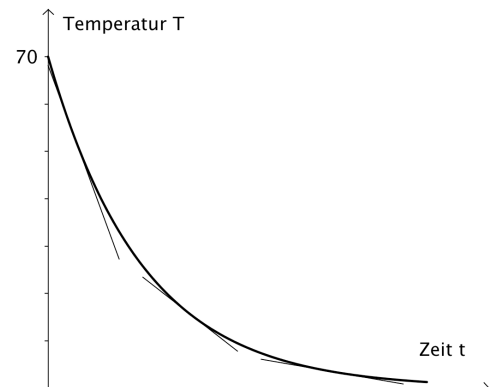
$$T' = -a \cdot T \quad (a > 0)$$

In Worte übersetzt besagt sie hier:

Ein heisser Kaffee kühlt sehr schnell ab. Je kälter er wird, umso langsamer erfolgt die Abkühlung.

Dies lässt sich an den Tangentensteigungen (Änderungsraten) sehen.

Je kälter der Kaffee, um so weniger schnell wird er kälter.



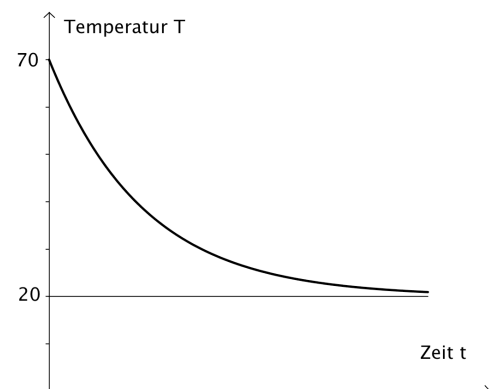
Wir stellen nun einen gleich heissen Kaffee nach draussen, jetzt aber bei einer Aussentemperatur von 20 °C.

Wie kühlt sich der Kaffee jetzt ab?

Zuerst einmal wird der Kaffee sicher nicht kälter als 20 °C.

Aber sonst wird dies in derselben Art wie oben geschehen.

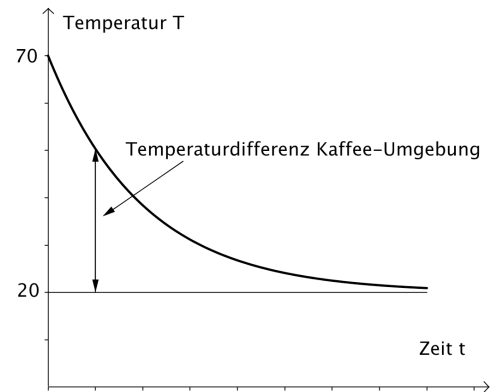
Die Abkühlung erfolgt zuerst schnell, dann immer langsamer.



Es ist das Verdienst des Physikers *Isaac Newton* (1643 – 1727) hinter der Abnahme der Temperatur eine Gesetzmässigkeit zu vermuten und diese experimentell zu bestätigen. Das zu seinen Ehren benannte „**Newtonsche Abkühlungsgesetz**“ lässt sich wie folgt formulieren:

Die **Abkühlgeschwindigkeit** eines Objektes ist **proportional zur Differenz** zwischen seiner Temperatur und der **Umgebungstemperatur**.

Die Abkühlungsgeschwindigkeit des Kaffees ist also proportional zum Temperaturunterschied von Kaffeetemperatur und Aussentemperatur.

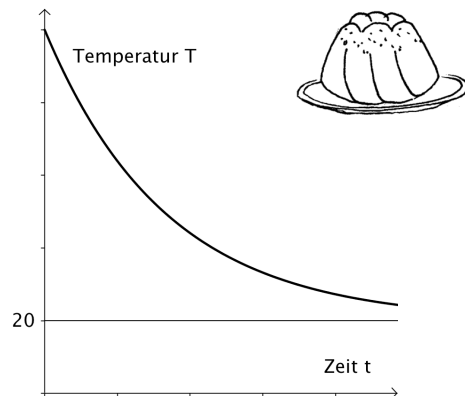
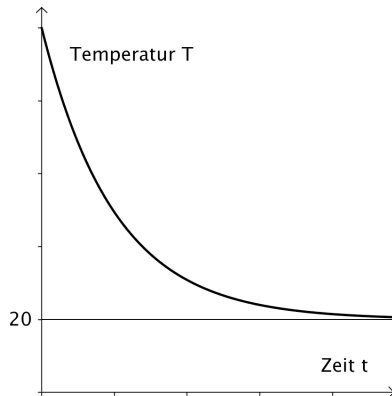


Beispiel 8 Newton'sches Abkühlungsgesetz

a) „Übersetze“ das Newton'sche Abkühlungsgesetz in eine Differenzialgleichung!
Wähle für die Umgebungstemperatur den Buchstaben U.

b) Nicht nur Kaffee kühlt sich ab. Zum Kaffee gibt es Kuchen.

- Stelle die Differenzialgleichung für einen abkühlenden Kuchen gemäss dem Newtonschen Abkühlungsgesetz auf. Wähle als Umgebungstemperatur $U = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$.



- In der Abbildung sind mögliche Temperaturkurven skizziert. Bei welcher Kurve ist der Parameter a grösser?
(Der Modellparameter hängt bei einem konkreten Abkühlungsvorgang von verschiedenen Begebenheiten ab ... von welchen zum Beispiel?)

c) Später werden wir uns näher mit Lösungsmethoden befassen. Mit ein bisschen Intuition gelingt uns aber bereits jetzt die Lösung dieser Gleichung!

Wenn wir nämlich die obigen Graphen betrachten, können wir vermuten, dass $T(t)$ einfach eine um U verschobene Exponentialfunktion ist...

- Wie lautet die allgemeine Lösung (zur Umgebungstemperatur $U = 20$)?
- Frisch aus dem Ofen hat der Kuchen zu Beginn ($t = 0$) eine Temperatur von $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Wie lautet die spezielle Lösung?

Beispiel 9 Nachweis

Zeige, dass die Funktionen $T(t) = C \cdot e^{-at} + U$ die Differenzialgleichung $T'(t) = -a \cdot (T(t) - U)$ lösen.

Beispiel 10 Kaffee – Abkühlen

Die Funktion $T(t)$ modelliert das Abkühlen von heissem Kaffee (T in $^{\circ}\text{C}$, t in Minuten).

a) Stelle die Differenzialgleichung für $T(t)$ auf gemäss dem Newtonschen Abkühlungsgesetz auf. Wähle als Aussentemperatur 20°C und für den Modellparameter $a = 0.2$.

b) Gib die (allgemeine) Lösung dieser Differenzialgleichung an. Überprüfe deine Lösung durch Einsetzen. (Tun! Linke Seite, rechte Seite ...)

c) Die Anfangstemperatur des Kaffees beträgt 70°C .

- Wie lautet die spezielle Lösung?
- Wie warm ist der Kaffee nach 10 Minuten?
- Wie lang dauert es, bis er eine Temperatur von 30°C hat?

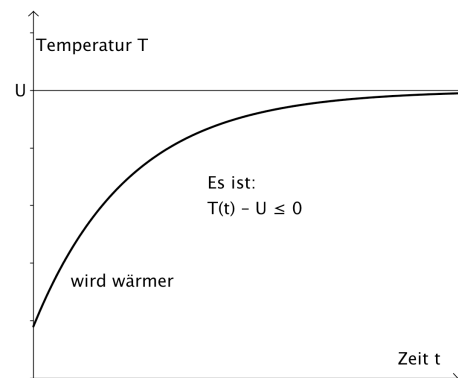
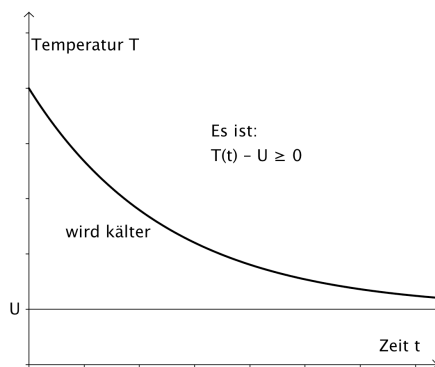
d) Für welchen Wert von t gilt: $T'(t) = 0$? Interpretiere deine Lösung!

Das Gesetz von Newton und die daraus resultierende Differenzialgleichung

$$T'(t) = -a \cdot (T(t) - U) \quad (a > 0),$$

können wir auch benutzen, wenn sich etwas *erwärmt*.

Beachte dabei, dass das negative Vorzeichen bestehen bleibt, obwohl $T'(t) > 0$ ist. Warum?



Wenn sich etwas erwärmt, dann ist die Umgebungstemperatur U grösser als $T(t)$ und somit: $T(t) - U < 0$. Für $a > 0$ ist demnach wieder

$$-a \cdot (T(t) - U) > 0.$$

Das *negative* Vorzeichen interpretieren wir also so, dass die Temperaturdifferenz *abnimmt*.

Beispiel 11 Joghurt (vgl. Einstieg!) – Erwärmen

Lola nimmt ein Joghurt aus dem Kühlschrank und vergisst es auf dem Tisch in der 25°C warmen Küche. Sei t die seit der Entnahme verstrichene Zeit in Minuten. Wir setzen $a = 0.1$.

a) Stelle die Differenzialgleichung auf und interpretiere sie.

b) Wie lautet die (allgemeine) Lösung dieser Differenzialgleichung?

c) Das Joghurt hat zu Beginn eine Temperatur von 4°C .

- Zeichne eine Kurve, welche die Temperatur des Joghurts qualitativ wiedergibt.
- Ab wann ist das Joghurt wärmer als 15°C ?

Beispiel 12 Gleichgewichtslösung

Wir betrachten das Beispiel

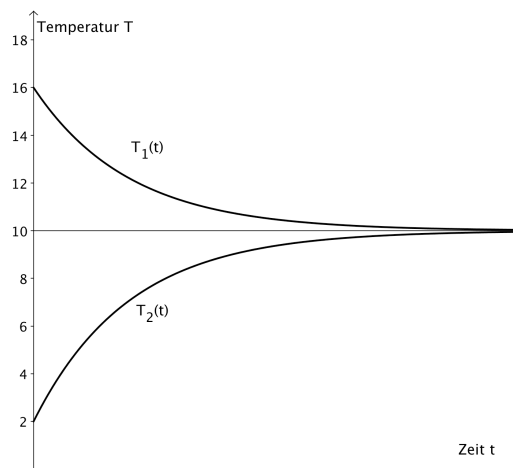
$$T'(t) = -0.25 \cdot (T(t) - 10).$$

Die allgemeine Lösung kennen wir. Sie lautet:

$$T(t) = C \cdot e^{-0.25t} + 10.$$

a) In der Abbildung sind zwei Kurven dargestellt

- $T_1(t) = C_1 \cdot e^{-0.25t} + 10$
mit der Anfangstemperatur $T(0) = 16$
- $T_2(t) = C_2 \cdot e^{-0.25t} + 10$
mit der Anfangstemperatur $T(0) = 2$



Wie lauten die Konstanten C_1 und C_2 ?

b) Die Temperaturkurven verlaufen immer hin zur Umgebungstemperatur von 10°C , unabhängig davon, wie gross die Anfangstemperatur ist.

Aber was passiert eigentlich, wenn bereits die Anfangstemperatur $T(0) = 10^\circ\text{C}$ beträgt?

Klar: es passiert nichts – die Temperatur ändert sich nicht!

Dieser spezielle Fall ist in unserer allgemeinen Lösung enthalten, wenn wir $C = 0$ setzen:

$$T(t) = 10.$$

Diese spezielle Lösung heisst **Gleichgewichtslösung**. Die Gleichgewichtslösung erhalten wir auch *direkt* über die Differenzialgleichung, wenn wir die Gleichung $T'(t) = 0$ lösen:

$$T'(t) = -0.25 \cdot (T(t) - 10) = 0$$

ergibt $T(t) = 10$.

Erkläre nun nochmals in eigenen Worten, was eine Gleichgewichtslösung ist und wie man sie finden kann!

Beispiel 13* lineare Differenzialgleichung

Die Gleichung

$$T'(t) = -a \cdot (T(t) - U)$$

ist ein Beispiel einer *linearen Differenzialgleichung*.

Wenn wir die rechte Seite ausmultiplizieren erhalten wir

$$T'(t) = -a \cdot T(t) + a \cdot U.$$

Wenn wir für a eine beliebige Konstante zulassen und $b = a \cdot U$ setzen, dann erhalten wir die Form

$$T'(t) = a \cdot T(t) + b.$$

Dies erinnert uns von der Form her sehr stark an die *lineare* Funktion $f(x) = a \cdot x + b$. Analog sagen wir:

Eine Differenzialgleichung der Form

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

heisst **lineare Differenzialgleichung**.

a) Löse die lineare Differenzialgleichung

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

in Abhängigkeit von a und b .

b) Überprüfe deine Lösung durch Einsetzen.



Logistisches Wachstum

Zu Beginn haben wir uns mit der Differenzialgleichung des natürlichen Wachstums befasst:

$$P'(t) = a \cdot P(t).$$

Diese Differenzialgleichung haben wir auf „natürliche“ Art hergeleitet, indem wir die folgende Annahme getroffen haben:

Die Änderungsrate ist proportional zur Grösse der Population.

Diese Annahme leuchtet ein, aber sie greift zu kurz. Warum?

Die Population kann sich nicht *beliebig* ausbreiten – irgendwann ist nicht mehr genügend Platz oder genügend Nahrung vorhanden!

Wir sagen: die Population stösst *ressourcenbedingt* an eine (obere) Sättigungsgrenze G .

Wir müssen also unser Modell ändern, wenn wir diesem Gedanken Rechnung tragen wollen. Nur wie? Dem Mathematiker Pierre-Francois Verhulst (1804 – 1849) verdanken wir das folgende Modell, das diesem Umstand Rechnung trägt. Es heisst *logistisches Wachstumsmodell* und lautet:

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0).$$

Verhulst hat die Differenzialgleichung des natürlichen Wachstums also um den Faktor $\left(1 - \frac{P(t)}{G}\right)$ „erweitert“.

Welchen Einfluss hat dieser Faktor?

Beispiel 14 Einfluss des Faktors

Ergänze den Lückentext!

natürlichen , 0 , *ungehindert* , 1 , *verlangsamt* , 1 , *starken* , 0 , $a \cdot P(t)$, *geringen* , 0

a) Ist $P(t)$ klein im Vergleich zu G , dann ist $\frac{P(t)}{G} \approx$ _____ , also $\left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \approx$ _____ . Damit ist

$P'(t) \approx$ _____ . Das heisst: zu Beginn hat der Faktor einen _____ Einfluss.

Das logistische Wachstum entspricht in dieser Phase dem _____ Wachstum.

Die Population wächst _____ .

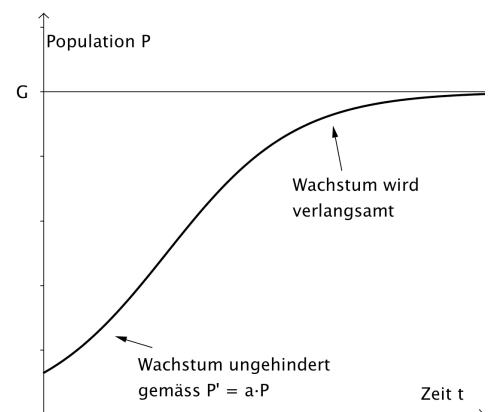
b) Ist $P(t)$ nahe bei G , dann ist $\frac{P(t)}{G} \approx$ _____ , also $\left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \approx$ _____ . Damit ist $P'(t) \approx$ _____ .

Das heisst: nähert sich $P(t)$ der Sättigungsgrenze G , hat der Faktor

einen _____ Einfluss.

Das Wachstum wird immer mehr _____ .

Der Faktor „drückt“ die Änderungsrate zu Boden.
Der Faktor bewirkt also genau das, was wir wollen!

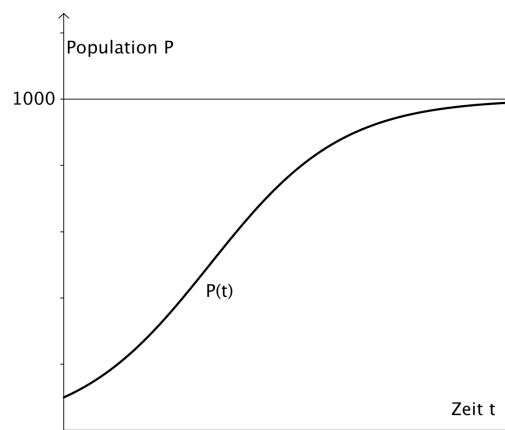


Beispiel 15 logistische Kurve

a) Stelle die Differenzialgleichung eines logistischen Wachstumsprozesses auf mit $a = 0.01$ und $G = 1000$.

b) Die Abbildung zeigt qualitativ den typischen Verlauf einer logistischen Kurve.

- Beschreibe deren Verlauf.
- Betrachte die in a) aufgestellte Differenzialgleichung. Was passiert, wenn die Population P zu Beginn bereits grösser ist als die Sättigungsgrenze G ?



Das logistische Wachstumsmodell

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0).$$

ist eine wichtige Differenzialgleichung. Viele Vorgänge lassen sich mit dieser Gleichung modellieren.

Multiplizieren wir sie aus, dann sehen wir, dass es sich *nicht* um eine lineare Differenzialgleichung handelt:

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) = a \cdot P(t) - \frac{a}{G} \cdot P(t)^2.$$

Die Lösung ist nicht mehr offensichtlich! Wir werden uns bald eingehender mit Lösungsmethoden befassen...



Ein (un-) wichtiger Begriff: die Wachstumsrate*

Wächst eine Hasenpopulation um 100 Hasen pro Monat, dann können wir nicht sagen, ob es sich bei diesen Hasen um eine schnell wachsende Art handelt – ob sie also sehr viele oder nur wenige Junge bekommen pro Monat. Warum?

Weil wir nicht wissen, wie viele Hasen es zu Beginn des Monats waren! Waren es nämlich zu Beginn

- 100 Hasen,
dann würden sich die Hasen schnell vermehren – wir hätten eine Verdoppelung jeden Monat.
- 1'000 Hasen,
dann würden sich die Hasen weniger schnell vermehren. Nur jeder zehnte Hase gebärt ein Junges.

Wie ist das jetzt zu verstehen?

Wenn wir hier von „schnell“ bzw. „weniger schnell“ sprechen, meinen wir dies immer *relativ* – also im Verhältnis – zur bereits vorhandenen Anzahl. Wir betrachten also den *Quotienten*

$$\frac{P'(t)}{P(t)},$$

der auch *Wachstumsrate* genannt wird.

Beispiel 16* (relative) Wachstumsrate

a) Was kannst du über die Wachstumsrate beim *natürlichen* (exponentiellen) Wachstum aussagen?

Hinweis Dividiere die Differenzialgleichung durch $P(t)$.

b) Was kannst du über die Wachstumsrate aussagen beim *logistischen* Wachstum?

c) Was kannst du über die Wachstumsrate aussagen beim *linearen* Wachstum?

Teil 2 Lösungsmethoden

Wie Du weisst, ist die *Lösung* einer Differenzialgleichung eine *Funktion*, welche die Gleichung erfüllt.

Funktionen lassen sich auf unterschiedliche Arten darstellen. Die Lösungsmethoden, die wir hier besprechen, entsprechen dabei in gewisser Weise diesen Darstellungsarten.

	Darstellungsart	Lösungsmethode
1	Graph (als Kurve)	Richtungsfeld
2	Funktionsgleichung	Separation der Variablen
3	Wertetabelle	Euler-Verfahren



Richtungsfeld – graphische Lösung

Diese Methode hilft uns, den ungefähren Verlauf der Lösung einer Differenzialgleichung zu bestimmen – mit ihr erhalten wir eine Vorstellung vom Graphen der Lösungsfunktion.

Wir beginnen mit dem Beispiel

$$f'(x) = 0.5 \cdot f(x).$$

Wir kennen die Lösung! Es sind die Funktionen

$$f(x) = C e^{0.5x}.$$

Wir interpretieren nun diese Differenzialgleichung auf *geometrische* Weise:

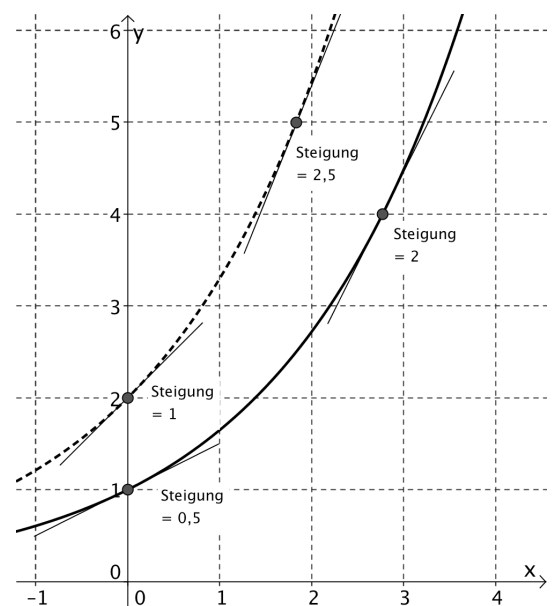
Diese Gleichung sagt, dass für jede Stelle x die momentane Änderungsrate $f'(x)$ – geometrisch also die Steigung der Tangente an die Lösungskurve – gerade halb so gross ist wie der Funktionswert $f(x)$ – also der y -Wert – an dieser Stelle.

In der Abbildung sind zwei Lösungskurven mit einigen ihrer Tangentenstücken gezeichnet und zwar

- für die Konstante $C = 1$ die Kurve $f(x) = e^{0.5x}$.
- für die Konstante $C = 2$ die Kurve $f(x) = 2e^{0.5x}$.

Wenn wir die Steigungen in den einzelnen Punkten betrachten, ist es genau so, wie in der Differenzialgleichung verlangt: Sie beträgt in jedem Punkt gerade die Hälfte des y -Wertes in diesem Punkt!

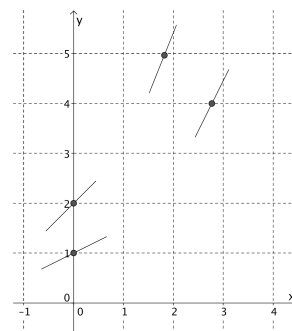
Im Punkt mit der y -Koordinate 4 beträgt die Steigung also $f'(x) = 0.5 \cdot 4 = 2$.



Jetzt ist es nicht mehr weit zum Richtungsfeld.

Wenn wir die eingezeichneten Kurven weglassen und nur noch die Steigungen stehen lassen, ergibt sich das nebenstehende Bild.

Aussagekräftig ist das noch nicht – obwohl man mit ein wenig Fantasie die beiden Kurven „sieht“.



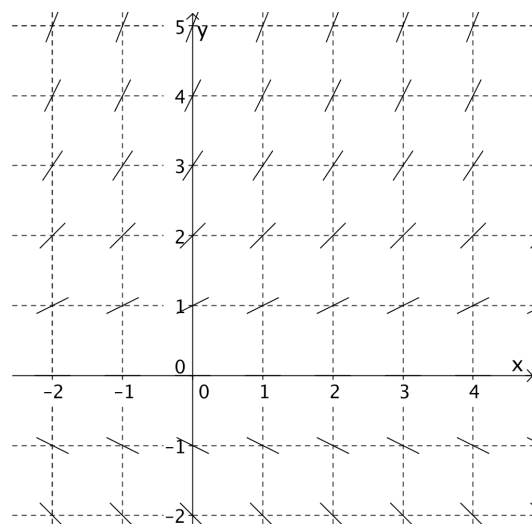
Wenn wir aber diese Steigungssegmente für weitere Punkte einzeichnen, wird das Ganze eindrucksvoller.

Im Punkt (2/3) hat das Liniensegment also die Steigung des halben y-Wertes an diesem Punkt, also 1.5.

Eine solche Darstellung heisst *Richtungsfeld*.

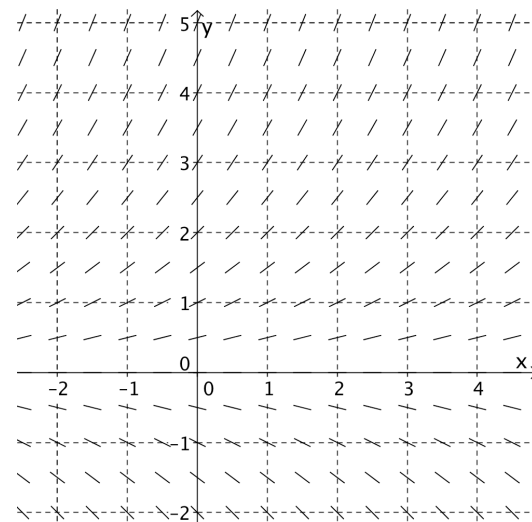
Eine Lösungskurve verläuft in jeden Punkt der Ebene in Richtung des dort eingetragenen Steigungssegmentes.

In diesem Beispiel sind die Steigungen auf jeder Horizontalen immer gleich gross. Das ergibt sich aus der zugehörigen Differenzialgleichung $f'(x) = 0.5 \cdot f(x)$, denn die Steigung $f'(x)$ hängt nur von $f(x)$ – also vom y-Wert – ab.



Natürlich können wir das Richtungsfeld auch engmaschiger zeichnen.

In einem Richtungsfeld können wir sehen, wo „**der Geist der Lösungskurve lauert**“ und durch das Festlegen eines „Anfangspunktes“ darauf wartet, sichtbar zu werden.

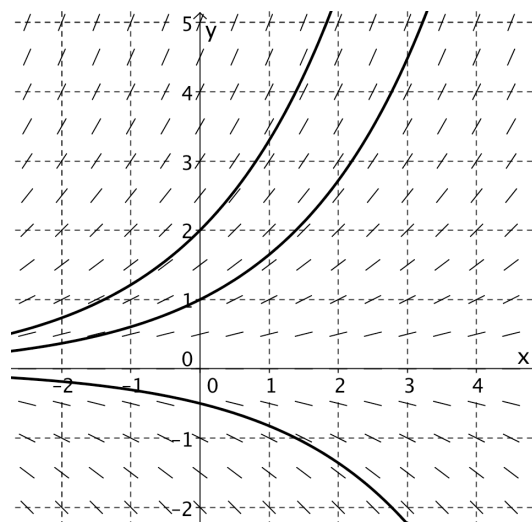


Unsere beiden Kurven von oben „liegen“ in unserem Richtungsfeld.

Eingezeichnet ist eine weitere Kurve, welche durch den Punkt (0/-0.5) verläuft.

Beim Einzeichnen können wir bei einem beliebigen Punkt der Ebene starten und in die Richtung gehen, die uns das Richtungsfeld vorgibt.

Nach jedem (kleinen!) Schritt passen wir – falls nötig – die Richtung an.



Merke

Die oben beschriebene Methode, den Verlauf der Lösungskurven mit Hilfe von Steigungssegmenten zu veranschaulichen, heisst

Richtungsfeld.

Das Richtungsfeld ermöglicht qualitative Aussagen über Lösungskurven, etwa über mögliche Asymptoten.

Beispiel 17 Richtungsfelder I

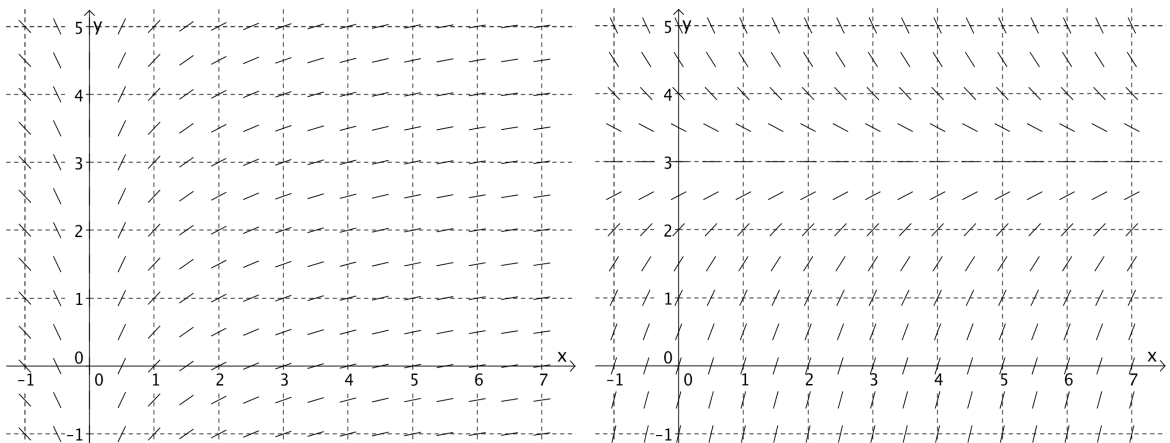
a) $f'(x) = -0.25 \cdot f(x)$

- Zeichne ein Richtungsfeld im Bereich von $(-2/-2)$ bis $(4/4)$.
- Zeichne die Lösungskurve, welche durch den Punkt $(2/1)$ verläuft.
- Warum sind die Steigungen auf jeder Horizontalen gleich gross?

b) $f'(x) = -0.25x$.

- Zeichne ein Richtungsfeld im Bereich von $(-2/-2)$ bis $(4/4)$.
- Zeichne die Lösungskurve, welche durch den Punkt $(4/0)$ verläuft.
- Die rechte Seite der Differenzialgleichung hängt nur von der Variable x ab. Wie macht sich dies im Richtungsfeld bemerkbar?

c) Abgebildet sind die Richtungsfelder für die Differenzialgleichungen $f'(x) = -f(x) + 3$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$.



- Welches Feld gehört zu welcher Gleichung?
- Zeichne jeweils die Lösungskurve ein, welche durch den Punkt $(1/0)$ verläuft.
- Zeichne jeweils die Lösungskurve ein, welche durch den Punkt $(0/3)$ verläuft.
- Was denkst du: Besitzen die Kurven Asymptoten?
Oder anders gefragt: Lässt sich etwas aussagen über das Langzeitverhalten von y für $x \rightarrow \infty$?

Das Richtungsfeld gibt uns also einen *Eindruck* vom Verlauf der Lösungskurven.

Das werden wir nun am Beispiel der logistischen Differenzialgleichung

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0).$$

„sehen“.

Beispiel 18 Richtungsfeld bei logistischer Kurve

Wir betrachten die logistische Differenzialgleichung

$$P'(t) = 0.6 \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{6}\right).$$

a) Zeichne ein Richtungsfeld im Bereich von (0/0) bis (10/6).

Hinweis

Weil die Gleichung komplizierter ist als die bisherigen, können wir uns die einzelnen Steigungen zuerst in einer Steigungstabelle notieren und zeichnen sie dann ein!

Lege eine Steigungstabelle wie angegeben an und fülle sie aus.

Steigungstabelle

Punkt (t/P)	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6
P = 0	0	0	0	0	0	0	0
P = 1	0.5	0.5	...				
P = 2	0.8	...					
P = 3	...						
P = 4							
P = 5							
P = 6							

Die Steigungen bleiben hier auf jeder Zeile (Horizontale!) gleich. Du weißt jetzt auch warum!

b) Zeichne – so gut wie möglich! – die Lösungskurve ein, welche im Punkt (0/1) beginnt.

c) Wie lautet die Asymptote? Begründe mit Hilfe

- des Richtungsfeldes
- der Differenzialgleichung.

d) An welcher Stelle steigt die Kurve am stärksten an?

Oder: wann besitzt die Lösung die maximale Wachstumsgeschwindigkeit?

Zum Schluss dieses Abschnittes wenden wir uns noch zwei Beispielen von Differenzialgleichungen zu, bei denen auf der rechten Seite auch die Variable x auftritt.

Solche Gleichungen haben wir bisher noch nicht angetroffen; sie sind aber nicht weiter aussergewöhnlich.

Beispiel 19 Richtungsfeld II

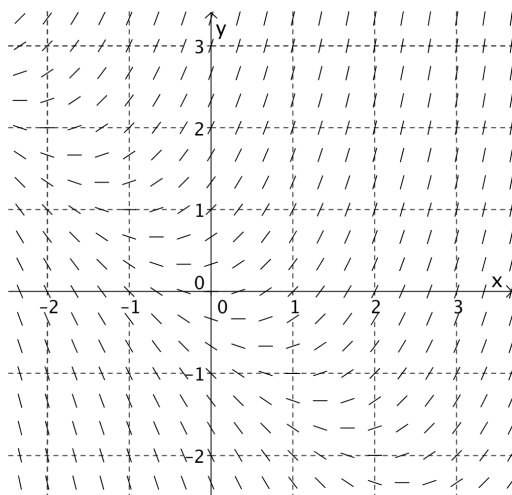
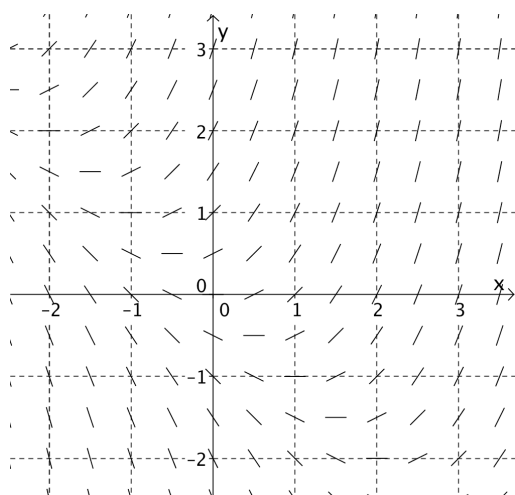
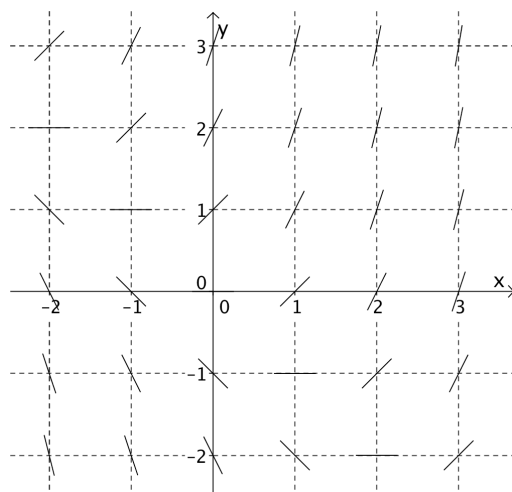
a) Wir betrachten die Differentialgleichung
 $f'(x) = f(x) + x.$

Beachte

Das ist eine Differentialgleichung, für die wir noch keine Lösung kennen. Trotzdem können wir das zugehörige Richtungsfeld zeichnen.

Das Richtungsfeld ist nebenan gezeichnet.

- Überprüfe die Richtigkeit der Zeichnung. Berechne dazu die Steigungen an von dir gewählten Punkten und vergleiche.
- Natürlich könnten wir – mit entsprechendem Aufwand – das Richtungsfeld wiederum engmaschiger zeichnen...



... und sehen, wie die Lösungskurven immer deutlicher zu Tage treten.

Wir können problemlos einen Punkt wählen und die dazugehörige Lösungskurve einzeichnen...

- Zeichne eine Lösungskurve ein, welche durch den Punkt (2/-1) verläuft.
- Eine spezielle Lösungskurve hat eine besonders einfache Gestalt. Siehst du sie? Gib ihre Gleichung an und überprüfe durch Einsetzen, ob sie die Differentialgleichung löst!

b) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f'(x) = -f(x)^2 \cdot x.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir oft y anstelle von $f(x)$ schreiben, weil das einfach kürzer und bequemer ist. Die obige Gleichung hat dann die Form

$$y' = -y^2 \cdot x.$$


- Zeichne ein Richtungsfeld zu $y' = -y^2 \cdot x$. Erstelle dazu zuerst eine Steigungstabelle.
- Zeichne diejenige Lösungskurve ein, welche durch den Punkt (2/2) verläuft.



Separation der Variablen – analytische Lösung

Mit dem Richtungsfeld können wir uns der Lösung „nur“ zeichnerisch annähern.
Die Methode der *Separation der Variablen* hilft uns nun, gewisse Differenzialgleichungen analytisch zu lösen: Wir erhalten damit die exakten *Gleichungen* der Lösungsfunktionen!

Zuerst rufen wir uns eine bekannte **Integrations- bzw. Ableitungsregel** in Erinnerung:



$$\frac{1}{x} \xrightarrow{\int} \ln|x| + C$$

$$\xleftarrow{\frac{d}{dx}}$$

Diese Regel ist **grundlegend** für diesen Abschnitt.

Beachte

Dieser Zusammenhang lässt sich auf *zwei* Arten „lesen“:

- 1 Die Stammfunktionen von $\frac{1}{x}$ sind $\ln|x| + C$
- 2 Die Ableitung von $\ln|x| + C$ ist $\frac{1}{x}$

Eine Herleitung dazu findest du im **Anhang 1**.

Beispiel 20 grundlegende (!) Integrationen

a) Integriere! (Bilde die Stammfunktionen!)

Natürlich spielt es keine Rolle, mit welchem Buchstaben wir die Integrationsvariable bezeichnen.

• $\int \frac{1}{x} dx =$	$\int \frac{1}{x^2} dx =$	$\int \frac{5}{x} dx =$
• $\int \frac{1}{t} dt =$	$\int \frac{1}{t^3} dt =$	$\int \frac{a}{t} dt =$
• $\int \frac{1}{y} dy =$	$\int \frac{8}{y^2} dy =$	$\int \frac{a}{y} dy =$

b) Führe folgende Integrationen aus. Vorsicht.

Bist du sicher? Wie kannst du dein Ergebnis überprüfen? Leite es ab!

• $\int \frac{1}{x+5} dx =$	$\int \frac{1}{x+b} dx =$
• $\int \frac{1}{2x+b} dx =$	$\int \frac{1}{ax+b} dx =$
• $\int \frac{4}{2x+b} dx =$	$\int \frac{1}{ay+b} dy =$

Hinweis

$\ln|ax + b|$ ist eine **verkettete** Funktion.
Für die Ableitung braucht es die **Kettenregel!**

Jetzt beherrschen wir die für nötigen Integrationsregeln: wir sind also bereit weiter zu gehen!

Wir beginnen wiederum mit dem Beispiel

$$f'(x) = 0.5 \cdot f(x)$$

und bestimmen – mit Hilfe einer Integration – die Funktion $f(x)$.

Zuerst noch ein bisschen Kosmetik!

Anstelle des schwerfälligen „ f von x “ – also von $f(x)$ – schreiben wir kürzer und schlanker nur noch y .

Die obige Gleichung lautet also:

$$y' = 0.5 \cdot y$$

Alles klar? Wir wollen also y – genauer die *Funktion* y – bestimmen.

Natürlich kennen wir die Lösung bereits (erinnerst du dich?) Aber wir holen sie uns jetzt, indem wir die Gleichung integrieren! Wir gehen jetzt Schritt für Schritt vor. Merke dir ALLES.

Schritt 1 Separation der Variablen (die Namensgebung wird später noch erläutert; wir teilen durch y)

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 0.5$$

Schritt 2 Integration (wir bilden auf beiden Seiten die Stammfunktion):

$$\int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int 0.5 dx$$

Achtung jetzt! Es ist doch $y' = \frac{dy}{dx}$ (der sogenannte *Differenzialquotient*... remember?)

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int 0.5 dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int 0.5 dx$$

Wir können nun „ dx “ kürzen!

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 0.5 dx$$

Kommt dir das *unheimlich* vor?
Lies **Anhang 2!**

$$\ln |y| + C_1 = 0.5x + C_2$$



Wir bringen nun die beiden Konstanten auf eine Seite und fassen Sie zu einer zusammen: ($D = C_2 - C_1$).

$$\ln |y| = 0.5x + D$$

Das merken wir uns: Es genügt immer, die Konstante auf einer Seite – hier: rechts – hin zu schreiben.

Schritt 3 Auflösen nach y (wir wollen ja die Funktion y bekommen)

$$e^{\ln|y|} = e^{0.5x + D}$$

$$|y| = e^{0.5x + D} = e^{0.5x} \cdot e^D$$

Wir kürzen die Konstante e^D durch L ab:

$$|y| = L \cdot e^{0.5x}$$

Jetzt „stören“ nur noch die Betragsstriche.

Wir lassen die Betragsstriche weg, wodurch sich höchstens das Vorzeichen ändert, d.h.

$$y = \pm L \cdot e^{0.5x}$$

Wir kürzen die Konstante $\pm L$ durch C ab:

$$y = C \cdot e^{0.5x}$$

et voilà!

Dieses Resultat haben wir bereits früher durch „Raten“ gefunden. Jetzt haben wir aber gerechnet und damit verbindet sich die Hoffnung, auch schwierigere Differenzialgleichungen zu „knacken“.

Beispiel 21 Differenzialgleichungen lösen / Separation der Variablen

Löse die folgenden Differenzialgleichungen, indem du – langsam! – die oben ausgeführten Schritte durchgehst. Übe dabei auch den sicheren Umgang mit den auftretenden Konstanten.

a) $y' = 3 \cdot y$

b) $f'(x) = a \cdot f(x)$

c) Löse das folgende Beispiel und erkläre, warum diese Methode wohl „**Separation der Variablen**“ heisst:

$$y' = x^2 \cdot y$$

Wir lösen noch einmal zwei Beispiele „parallel“ vor. Lies sie aufmerksam durch. Dabei gehen wir ein bisschen schneller vor. Aber: *jede* Zeile, *jede* Umformung muss dir klar sein!

Beispiel 1

Beispiel 2

$$y' = a(y + 2)$$

$$y' = -6x \cdot y^2$$

Schritt 1 Separation der Variablen

$$\frac{1}{y+2} \cdot y' = a$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot y' = -6x$$

Schritt 2 Integration

$$\int \frac{1}{y+2} \cdot y' dx = \int a dx$$

$$\int \frac{1}{y^2} \cdot y' dx = \int -6x dx$$

$$\int \frac{1}{y+2} dy = \int a dx$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -6x dx$$

$$\ln|y + 2| + C_1 = ax + C_2$$

$$-\frac{1}{y} + C_1 = -3x^2 + C_2$$

$$\ln|y + 2| = ax + D$$

$$-\frac{1}{y} = -3x^2 + D$$

Schritt 3 Auflösen nach y

$$y = C \cdot e^{ax} - 2$$

$$y = \frac{1}{3x^2 + C}$$

Merke

Diese oben beschriebene Methode, eine Differenzialgleichung analytisch zu lösen, heisst **Separation der Variablen**.

Beispiel 22 Separation der Variablen

Drei der vier folgenden Differenzialgleichungen lassen sich mit der Separation der Variablen lösen, eine nicht. Löse diejenigen, die möglich sind und sage, warum sich eine nicht mit dieser Methode lösen lässt.

a) $y' = 6x^2 \cdot y$

b) $y' = (x + 1) \cdot y^2$

c) $f'(x) = x^2 \cdot (f(x) + 1)$

d) $y' = x^2 + y$

Beispiel 23 Lineare Differenzialgleichung (mit konstanten Koeffizienten) lösen

Löse die folgenden Differenzialgleichungen mit der Separation der Variablen.

a) $y' = y + 5$

b) $T' = 2T + 3$

Hinweis Schritt 1 führt auf $\frac{1}{y+5} \cdot y' = 1$.

c) $P'(t) = 0.5P(t) + b$

d) $y' = ay + b$

e) $T' = -a(T - U)$

Wir widmen uns nun der logistischen Differenzialgleichung

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0).$$

Diese Gleichung haben wir bereits mit dem „Richtungsfeld“ gelöst!

Sie lässt sich auch mit der „Separation der Variablen“ lösen, die Integration ist aber schwieriger als bisher. Wenn du neugierig bist, dann sieh dir die Herleitung im **Anhang 3** an.

Wir begnügen uns hier mit der Angabe der Lösung.

Dazu betrachten wir ein konkretes Beispiel einer logistischen Gleichung.

Gegeben sei die logistische Gleichung:

$$P'(t) = 0.5 \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{6}\right).$$

Die Lösung lautet:

$$P(t) = \frac{6}{1 + C \cdot e^{-0.5t}}$$

Siehst du, wo die Parameter $a = 0.5$ und $G = 6$ in der Lösung zum Vorschein kommen?
Dann kannst du die folgende Aufgabe lösen!

Beispiel 24 Lösung der logistischen Gleichung

a) Wie lautet (wohl!) die Lösung der logistischen Gleichung

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) ?$$

b) Überprüfe, ob deine in a) gefundene Lösung stimmt. Setze dazu in die linke und in die rechte Seite ein.

Hinweis Zeige zuerst durch Ableiten, dass für die linke Seite gilt: $P'(t) = \frac{G \cdot C \cdot a \cdot e^{-at}}{(1 + C \cdot e^{-at})^2}$

Setze für die rechte Seite $P(t)$ ein und forme um, bis du die linke Seite „bekommst“!

c) Welchen Grenzwert besitzt $P(t)$ für $t \rightarrow +\infty$?

Beispiel 25 logistische Kurve mit Anfangswert A

a) Ist der Anfangswert $P(0) = A$ bekannt, dann lässt sich die logistische Wachstumsgleichung in der Form

$$P(t) = \frac{A \cdot G}{A + (G - A) \cdot e^{-at}}$$

schreiben. Begründe dies!

Hinweis

Löse $P(0) = \frac{G}{1 + C \cdot e^{-0.5 \cdot 0}} = A$ zuerst nach C auf. Ersetze dann C in der Funktionsgleichung und forme um.

b) Wir betrachten die Differenzialgleichung $P'(t) = 0.2 \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{5}\right)$ mit dem Startwert $(0/1)$.

- Wie lautet $P(t)$?
- Skizziere die Kurve $P(t)$ qualitativ.
- Für welches t gilt $P(t) = 4$?



Euler-Verfahren – numerische Lösung

Nicht alle Differenzialgleichungen lassen sich mit Hilfe der Separation der Variablen (oder ähnlichen Methoden) lösen. Dann sind wir auf eine „Näherungslösung“ angewiesen.

Diese folgende Methode hilft uns, eine Differenzialgleichung numerisch, d.h. näherungsweise, zu lösen – mit ihr erhalten wir eine Vorstellung von der Wertetabelle der Lösungsfunktion.

Wir beginnen wiederum mit dem Beispiel

$$f'(x) = 0.5 \cdot f(x).$$

Wir werden noch konkreter, bemühen die Hasen und schreiben die obige Gleichung in der Form

$$P'(t) = 0.5 \cdot P(t),$$

wobei $P(t)$ die Anzahl Hasen in Tausend zum Zeitpunkt t in Monaten angibt.

Wir geben uns einen Anfangswert vor und nehmen an, dass es zu Beginn 1000 Hasen sind, also $P(0) = 1000$.

Wie berechnen wir jetzt die Anzahl Hasen nach einem Monat? Ganz einfach:

Hasen nach einem Monat = Hasen zu Beginn (Anfangswert) + „Zuwachs“ in diesem Monat

Den „Zuwachs“ bzw. die *Änderung* in diesem Monat können wir aber – näherungsweise! – bestimmen. Wie?

Mit Hilfe der Differenzialgleichung!

Die Differenzialgleichung

$$P'(t) = 0.5 \cdot P(t),$$

sagt uns ja, wie gross die Änderungsrate (Geschwindigkeit, mit der die Hasenschar grösser wird) zu einem beliebigen Zeitpunkt t ist.

Zu Beginn, also für $t = 0$, sind es 1000 Hasen. Damit ist für die Änderungsrate zu Beginn:

$$P'(0) = 0.5 \cdot P(0) = 0.5 \cdot 1000 = 500 \frac{\text{Hasen}}{\text{Monat}}$$

Damit können wir nun die Anzahl Hasen nach einem Monat *näherungsweise* bestimmen:

Hasen nach einem Monat \approx Anfangswert + (momentane!) Änderungsrate \times Monat

$$\begin{aligned} &= 1000 + 500 \frac{\text{Hasen}}{\text{Monat}} \times 1 \text{ Monat} \\ &= 1500 \text{ Hasen.} \end{aligned}$$

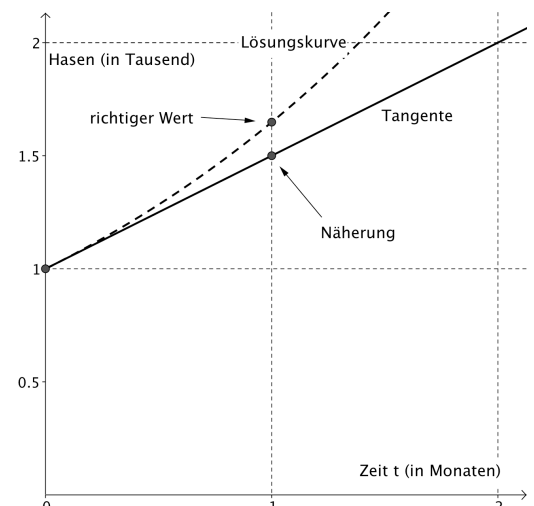
Die Abbildung zeigt uns, was passiert:

Den Wert 1500 erhalten wir, wenn wir uns vom Punkt $(0,1000)$ entlang der Tangente bewegen.

Der Wert 1500 ist dabei aber nur eine Näherung des „richtigen“ Wertes auf der Lösungskurve. Warum?

Weil wir die Änderungsrate in der betrachteten Zeitspanne unverändert lassen, obwohl sie sich *kontinuierlich* ändert.

Die exakte Lösungskurve besitzt ja zu *jedem* Zeitpunkt eine ständig steiler werdende Tangente.



Dazu schreiben wir noch einmal auf, wie wir die Anzahl Hasen nach einem Monat berechnet haben:

$$\begin{aligned} \text{Anzahl Hasen nach einem Monat} &= \text{Anzahl Hasen zu Beginn} + \text{Änderung in diesem Monat} \\ &= \text{Anfangswert} + \text{Änderungsrate} \times 1 \text{ Monat} \end{aligned}$$

bzw.:

$$P(1) = P(0) + P'(0) \times 1 \text{ Monat}$$

und mit Hilfe der Differenzialgleichung:

$$P(1) = P(0) + 0.5 \cdot P(0) \times 1 \text{ Monat}$$

Wir haben also, um $P(1)$ zu berechnen, nur den Wert $P(0)$ verwenden müssen!

Völlig analog können wir jetzt die Anzahl Hasen nach zwei Monaten berechnen, wenn wir die Anzahl nach einem Monat kennen!

$$\text{Hasen nach 2 Monaten} = \text{Hasen nach einem Monat} + \text{Änderung in diesem Monat}$$

bzw.

$$\begin{aligned} P(2) &= P(1) + P'(1) \times 1 \text{ Monat} \\ &= P(1) + 0.5 \cdot P(1) \times 1 \text{ Monat} \end{aligned}$$

Mit dieser Vorgehensweise können wir uns also Zeitspanne um Zeitspanne hochhangeln und damit – mit genügend Ausdauer – die Anzahl Hasen zu jedem beliebigen Zeitpunkt berechnen!

Merke

Diese oben beschriebene Methode, eine Differenzialgleichung schrittweise numerisch zu lösen, heisst **Euler-Verfahren**.

Beispiel 26 Anzahl Hasen mit Euler-Verfahren

Die Differenzialgleichung $P'(t) = 0.5 \cdot P(t)$ mit dem Anfangswert $P(0) = 1000$ beschreibt das Wachstum einer Hasenpopulation (t in Monaten).

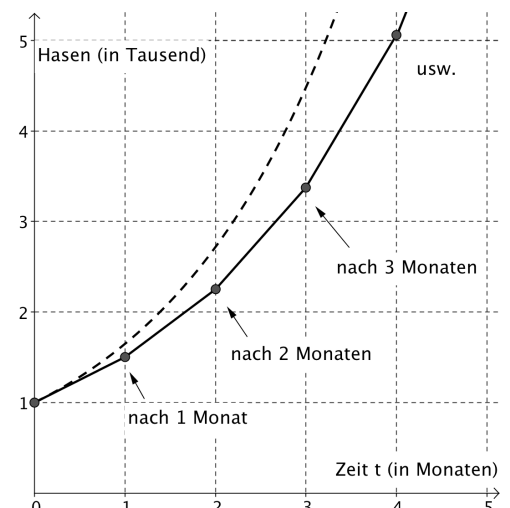
a) Berechne mit dem Euler-Verfahren die angegebenen Werte.

Achte auf deine Darstellung! Gehe genau so vor, wie für den ersten „Schritt“ angegeben:

- $P(1) = P(0) + P'(0) \times \text{Monat} = P(0) + 0.5 \cdot P(0) \times 1 \text{ Monat} = 1000 + 0.5 \cdot 1000 \times 1 = 1500$
- $P(2) = \dots$
- $P(3) = \dots$

b) In der Abbildung siehst du die exakte Lösungskurve (gestrichelt) und die Werte, die man über das Euler-Verfahren bekommt. Stimmen deine Werte in a) mit der Abbildung überein?

In der Abbildung sehen wir, dass die Strecken während einer Zeitspanne (hier ein Monat), gleich steil bleiben, um sich dann in der nächsten Zeitspanne neu anzupassen. Dies erinnert uns nicht zufällig an das Richtungsfeld, wo es auch immer wieder galt, sich neu zu „orientieren“.



Natürlich können wir die Zeitspanne 1 Monat auch anders wählen.
Mit 1 Monat = 4 Wochen können wir das Wachstum der Hasen zum Beispiel Woche um Woche verfolgen.

Nach einer Woche (= 0.25 Monate) sind es

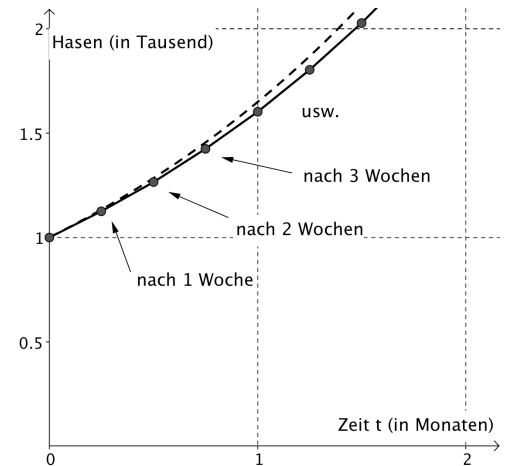
$$P(0.25) = P(0) + P'(0) \times 1 \text{ Woche} = P(0) + P'(0) \times \frac{1}{4} \text{ Monat} = P(0) + 0.5 \cdot P(0) \times 0.25 = 1125 \text{ Hasen}$$

Beispiel 27 „Wochenschritte“

a) Berechne die jeweiligen Werte nach 2,3 und 4 Wochen mit dem Euler-Verfahren, also:

- $P(0.5) = P(0.25) + P'(0.25) \times 1 \text{ Woche} = \dots$
- $P(0.75) = \dots$
- $P(1) = \dots$

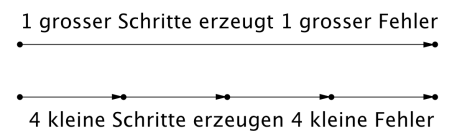
b) Der in a) berechnete Wert nach 4 Wochen stimmt nicht mit dem Wert 1500 überein, den wir in der vorangegangenen Aufgabe mit dem „Monatsschritt“ berechnet haben. Warum?



Bemerkung

Mit dem Euler-Verfahren begehen wir bei jedem Schritt einen Fehler. Dieser Fehler ist umso kleiner, je kleiner die Zeitspanne Δt ist. Je kleiner wir aber Zeitspanne Δt wählen, umso mehr Schritte müssen wir machen, um zum selben Ziel zu gelangen.

Was ist nun besser? Viele kleine Schritte mit vielen kleinen Fehlern oder wenige grosse Schritte mit wenigen grossen Fehlern?



Es lässt sich allgemein zeigen, was du vielleicht vermutest: kleinere Schritte erzeugen in der Summe den kleineren Fehler. Dies bezahlt man allerdings mit dem rechnerischen Aufwand, den viele kleine Schritte mit sich bringen.

Ganz unabhängig, welche Schrittweite wir wählen, das Prinzip bleibt immer gleich:

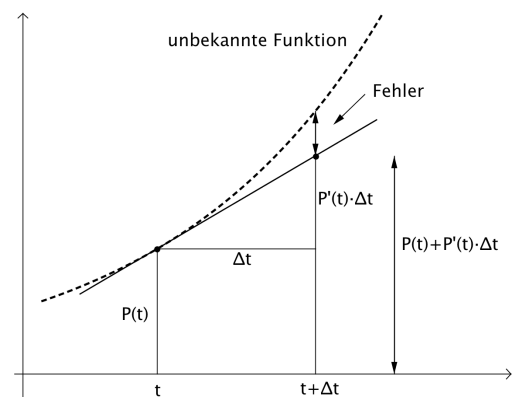
$$\text{Neuer Wert} = \text{momentaner Wert} + (\text{momentane!}) \text{ Änderungsrate} \times \text{verstrichene Zeit}$$

$$P_N(t + \Delta t) = P(t) + P'(t) \cdot \Delta t$$

dabei ist $P_N(t + \Delta t)$ der Näherungswert, mit welchem wir anschliessend beim nächsten Schritt weiter rechnen.

Die momentane Änderungsrate bestimmen wir bei jedem Schritt von neuem mit Hilfe der Differentialgleichung.

Der richtige Wert $P(t + \Delta t)$ stimmt mit dem Näherungswert nicht überein: Er weicht um den Fehler $P(t + \Delta t) - P_N(t + \Delta t)$ von diesem ab, wie dies für den ersten Schritt des Euler-Verfahrens in der folgenden Skizze dargestellt ist. Entsprechend kommen zusätzliche Fehler bei jedem weiteren Schritt hinzu, die sich kumulieren.



Frage

Im Euler-Verfahren „versteckt“ sich der Differenzenquotient! Wo? Erkläre!

Wir üben nun das Euler-Verfahren. Beispiel 28 beinhaltet Beispiele, die uns bereits vertraut sind.

Beispiel 28 Euler-Verfahren bei ...

a) Newtons Gesetz

Wir untersuchen die Differentialgleichung $T'(t) = -0.5(T(t) - 4)$ mit dem Startwert $(0/0)$.

- Berechne mit dem Euler Verfahren näherungsweise die Werte von $T(t)$ im Bereich $0 \leq t \leq 5$ mit der „Schrittweite“ $\Delta t = 1$:

t	T(t)
0	0
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

$T(0) = 0$

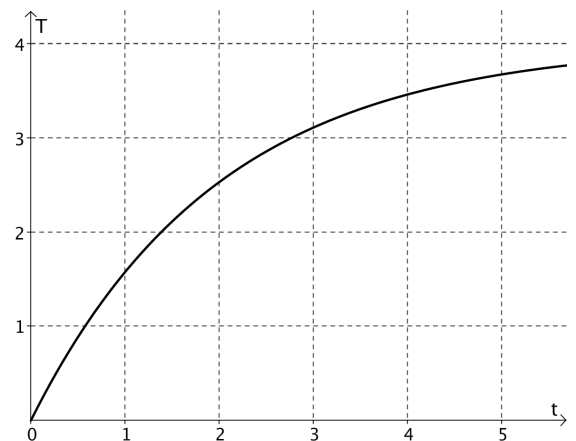
$T(1) = \dots$

$T(2) = \dots$

- Du kennst bereits die exakte Lösung dieser Differentialgleichung. Sie lautet: $T(t) = -4e^{-0.5t} + 4$. Die Kurve ist in der Abbildung eingezeichnet.

Trage die Werte, die du in a) über das Euler-Verfahren erhalten hast, in der Graphik als Streckenzug ein.

Vergleiche mit der eingezeichneten (exakten) Lösungskurve.



b) logistischer Kurve

Wir untersuchen die Differentialgleichung $P'(t) = P(t) \cdot (1 - \frac{P(t)}{5})$ mit dem Startwert $(0/1)$.

- Berechne mit dem Euler Verfahren näherungsweise die Werte von $P(t)$ im Bereich $0 \leq t \leq 2$ mit der „Schrittweite“ $\Delta t = 0.5$.

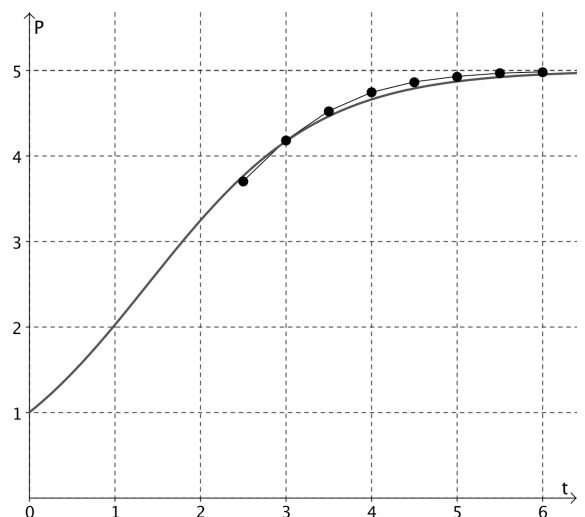
- Du kennst bereits die exakte Lösung dieser Differentialgleichung.

Sie lautet: $P(t) = \frac{5}{1 + 4 \cdot e^{-t}}$.

Die Kurve ist in der Abbildung eingezeichnet.

Trage die Werte, die du in a) über das Euler-Verfahren erhalten hast, in der Graphik als Streckenzug ein.

(Die „Euler-Punkte“ im Bereich $2.5 \leq t \leq 6$ sind bereits eingezeichnet.)



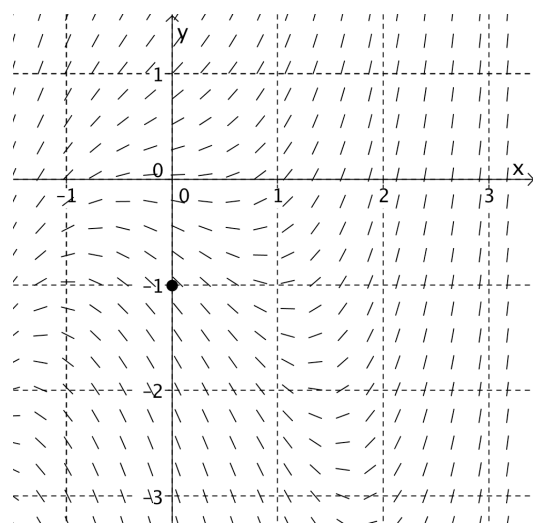
Die folgende Aufgabe zeigt ein Beispiel, das wir nicht mit der Separation der Variablen lösen können (vgl. Beispiel 22d)). Aber für uns ist das *kein Problem* mehr. Wir verfügen jetzt ja über das *Euler-Verfahren*!

Beispiel 29 Euler-Verfahren bei $y' = x^2 + y$

Wir untersuchen die Differentialgleichung $y' = x^2 + y$ mit dem Startwert $(0|-1)$.

a) Berechne mit dem Eulerverfahren näherungsweise die Werte von y im Bereich $0 \leq x \leq 2$ mit der „Schrittweite“ $\Delta x = 0.5$.

b) Neben an ist das zugehörige Richtungsfeld gezeichnet. Schätze ab, ob deine in a) berechneten Werte stimmen können.



Bemerkung

Es gibt ganz viele Differentialgleichungen, die sich nicht analytisch lösen lassen, weder mit der Separation der Variablen, noch mit einer anderen „exakten“ Methode. Deshalb sind Näherungsverfahren, wie das Euler-Verfahren, so wichtig.

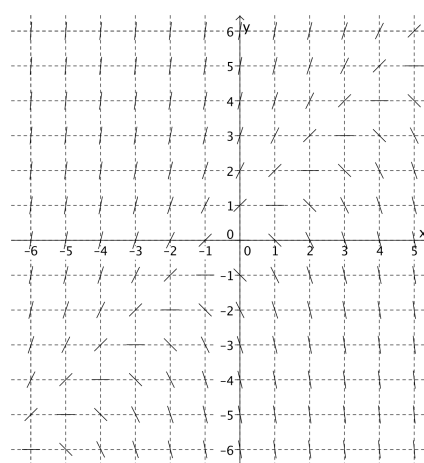
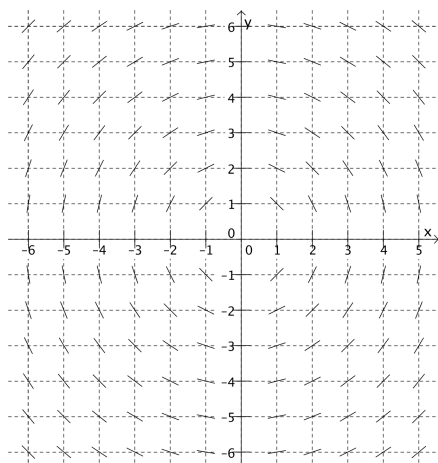


Beispiel 30 verschiedene Lösungsmethoden

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}$$

a) Entscheide, welches der beiden Richtungsfelder zur Gleichung gehört.



Du „siehst“: das Richtungsfeld gibt uns schon einen guten Eindruck von einem möglichen Verlauf der Lösungskurven. Hast du bereits eine Vermutung?

b) Als Startwert nehmen wir den Punkt $(3/4)$. Berechne mit dem Euler-Verfahren den Wert y für $(4/y)$. Wähle als Schrittweite $\Delta x = 0.25$.

c) Lässt sich die vorliegende Differentialgleichung mit der Separation der Variablen exakt lösen? Wenn ja, bestimme die Lösung! Wenn nein, erkläre warum!

d) Zum Euler-Verfahren:

- Wie gross die Abweichung des in b) mit dem Euler-Verfahren berechneten Wertes vom exakten Wert? Wie könnten wir die Abweichung verringern?
- In b) haben wir den Startwert (3/4) gewählt. Was passiert, wenn wir den Startwert (5/0) wählen? Gibt es andere Startwerte, die dem Euler – Verfahren auch Probleme bereiten?



Beispiel 31 Rückblick

Ergänzen Sie den Lückentext!

Euler-Verfahren , Richtungsfeld , Separation der Variablen , $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$,
 1 Separation der Variablen 2 Integration 3 Auflösen nach y

Wir haben **drei verschiedene Lösungsmethoden** kennenlernt:

- eine graphische: _____ .
- eine analytische: _____ .
- eine numerische: _____ .
- Mit dem **Richtungsfeld** lösen wir eine Differentialgleichung graphisch, indem wir die Lösungskurven veranschaulichen. Dabei lässt sich gut sehen, was wir bereits wissen: Die Lösung einer Differentialgleichung besteht aus (unendlich) vielen Kurven. Wählen wir einen „Anfangspunkt“ (x,y), können wir Lösungskurve zeichnen, die durch diesen Punkt verläuft.
- Die Methode der **Separation der Variablen** hilft uns, eine Differentialgleichung analytisch zu lösen, indem wir die Funktionsgleichung bestimmen.
 Die Separation der Variablen lässt sich anwenden, wenn die Differentialgleichung auf die Form

$$y' = (\text{Ausdruck in } x) \cdot (\text{Ausdruck in } y)$$
 gebracht werden kann, denn nur dann ist eine Separation der Variablen möglich.
 Wir gehen in drei Schritten vor:

- Mit dem **Euler-Verfahren** lösen wir Differentialgleichungen numerisch, indem wir eine Wertetabelle der Lösungskurve näherungsweise berechnen. Ist ein Anfangswert $f(x)$ bekannt, können mit der Formel:

von $f(x)$ ausgehend den „folgenden“ Wert $f(x + \Delta x)$ näherungsweise berechnen. Dieser Wert ist umso genauer, je kleiner Δx ist. Bei kleinen Δx erhöht sich aber der Rechenaufwand, weil dann vergleichsweise viele einzelne Berechnungen durchgeführt werden müssen. Um numerische Verfahren sinnvoll einzusetzen, ist es empfehlenswert, mit einem Computer zu arbeiten.

3 Ausfliessen* (ein Experiment!)

Wer beobachtet, wie Wasser aus einem Behälter ausfliesst, stellt fest, dass dies zuerst schnell und dann – mit sinkendem Wasserspiel – immer langsamer passiert. Das wollen wir genauer wissen!

Welche Funktion $h(t)$ beschreibt das Absinken des Wasserspiegels während der Entleerung?

Bei einem Experiment musst du **sorgfältig** arbeiten und am besten in einer **Gruppe**. Lies zuerst den ganzen Text durch.

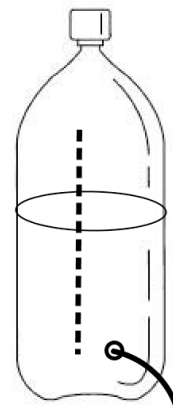
Materialien

- Leere 1.5 Liter PET-Flasche
- Messinstrumente (Lineal, Stoppuhr)
praktischer Hinweis: evt. ein Streifen Millimeterpapier auf Flasche kleben
- Werkzeug, um in die PET-Flasche ein Loch zu bohren
praktischer Hinweis: evt. Loch mit erhitztem Nagel bohren
- Heft, Schreibzeug

Wenn du dein eigenes Material mitbringst und dafür Verantwortung trägst, dass das Experiment durchgeführt werden kann, hast du mehr Freude am Experiment und es bleibt dir besser im Gedächtnis.

Durchführung

- Loch mit ca. 3 mm Durchmesser in den unteren Teil der PET-Flasche bohren (das Loch soll unten am zylinderförmigen Teil der Flasche sein, bevor sich die Flasche wieder verengt)
- Ca. 1 Liter Wasser in die Flasche giessen
- alle 10 Sekunden die Höhe h des Wasserspiegels messen
- mindestens 12 Messungen vornehmen
- in deinem Heft eine genügend grosse Tabelle vorbereiten, wie folgt



Zeit t in s	Höhe $h(t)$ in cm	Höhenänderung $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t)$	Zeitdifferenz Δt	Sinkgeschwindigkeit $h'(t) \approx \Delta h / \Delta t$	Modellparameter $a = h'(t) / h(t)$
0	10
10			10		
20			10		
30			10		
...			...		

Während dem Experiment trägst du in die erste Spalte deine Messwerte ein. Die restlichen Spalten werden später ausgefüllt.

Auswertung

- Übertrage deine Messungen in ein Koordinatensystem.
Vielleicht hast du bereits eine Vermutung, nach welchem „Gesetz“ der Wasserspiegel absinkt.
- Vervollständige in der Tabelle die restlichen Spalten.
- Das Experiment zeigt dir: die Sinkgeschwindigkeit h' nimmt ab.
Was könnte ein Grund dafür sein?

Mathematisch ausgedrückt:

die Sinkgeschwindigkeit ist abhängig von der Wasserhöhe.

Wie du weißt, lautet das einfachste Modell dazu: $h'(t) = -a \cdot h(t)$.

- Ist der Ansatz: $h'(t) = -a \cdot h(t)$ gerechtfertigt?
Dies ist dann der Fall, wenn in der letzten Spalte der Proportionalitätsfaktor $a = \frac{h'(t)}{h(t)}$, zumindest näherungsweise, für alle deine Messungen immer denselben Wert ergibt.
Dies scheint hier aber nicht der Fall zu sein...

Messergebnisse und theoretische Überlegungen (vgl. Bemerkung) zeigen, dass das Modell

$$h'(t) = -a \cdot \sqrt{h(t)}$$

den Prozess des Absinkens besser beschreibt.

- Ist der Ansatz: $h'(t) = -a \cdot \sqrt{h(t)}$ gerechtfertigt?
Dies ist dann der Fall, wenn der Proportionalitätsfaktor $a = \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}}$, zumindest näherungsweise, für alle deine Messungen immer denselben Wert ergibt.
Dies sollte der Fall sein!
Um einen möglichst „genauen“ Faktor a zu erhalten kannst du die einzelnen Werte „mitteln“.
- Löse die Differentialgleichung! (Beachte: den „Anfangswert“ kennst du!)
- Zeichne den Graphen der Lösungsfunktion in dein Koordinatensystem.
Passt er zu den gemessenen Werten?
Was könnten Gründe sein für mögliche Abweichungen? (vgl. auch Bemerkung unten)

Bemerkung

- Vergleicht man die Lösung $h(t)$ mit den tatsächlichen Messwerten stellt man eine gute Übereinstimmung fest für nicht zu kleine Werte von $h(t)$.
Tatsächlich spielen für kleine Werte von $h(t)$ weitere Effekte eine Rolle, die wir bei unserem Ansatz vernachlässigt haben.
- Wir wollen noch die oben angegebene Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $h(t)$ begründen.
Die Herleitung beruht auf zwei Grundprinzipien der Physik, nämlich auf der *Energieerhaltung* und der *Massenerhaltung*.

Den Energieerhaltungssatz kennst du aus der Physik:

$$m \cdot g \cdot h(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2$$

In unserem Beispiel ist $h(t)$ der Pegelstand und $v(t)$ die Geschwindigkeit, mit der das Wasser ausströmt.

Diese Gleichung lösen wir nach $v(t)$ auf und erhalten:

$$v(t) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)} \quad (*)$$

Der Massenerhaltungssatz meint in unserem Beispiel, dass das Volumen an Wasser, welche im Gefäß „verschwindet“, gerade dem Volumen an Wasser entspricht, welche unten ausströmt. Ist Q der Querschnitt des Gefäßes und q der Querschnitt der Öffnung, dann ergibt sich für eine Zeitspanne Δt :

Volumen „oben“ = Volumen „unten“

$$Q \cdot (h(t) - h(t + \Delta t)) = q \cdot v_{\text{mittel}} \cdot \Delta t$$

$$Q \cdot (h(t) - h(t + \Delta t)) = q \cdot \frac{v(t) + v(t + \Delta t)}{2} \cdot \Delta t \quad (**)$$

Kannst du mit (*) und (**) und für $\Delta t \rightarrow 0$ die Differentialgleichung herleiten?

Gedanken zum Modellieren in der Mathematik

Die Mathematik versucht verschiedene Prozesse zu untersuchen.

Weichen die mathematischen Ergebnisse zu stark von Messungen in der Realität ab, muss ein neues, besseres Modell – basierend auf anderen Annahmen – aufgestellt werden!

Allerdings muss eine quantitative Anpassung an die Realität nicht in jedem Fall sinnvoll sein – auch Messungen können fehlerhaft sein.

Bedenke:

Ein Modell entspricht nie ganz der Realität, es gibt nur Modelle die es besser machen als andere.

Modelle können helfen, *die Prozesse selbst* besser zu verstehen.

Beim Modellieren gehen wir – natürlich (!) – von der Annahme aus, dass der Natur überhaupt eine gewisse Regelmässigkeit zu Grunde liegt.

Diese Annahme wird gestützt durch ein Zitat von Galileo Galilei:

„Die Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“



3 Ausfliessen* (ein Experiment!)

Wer beobachtet, wie Wasser aus einem Behälter ausfliesst, stellt fest, dass dies zuerst schnell und dann – mit sinkendem Wasserspiel – immer langsamer passiert. Das wollen wir genauer wissen!

Welche Funktion $h(t)$ beschreibt das Absinken des Wasserspiegels während der Entleerung?

Bei einem Experiment musst du **sorgfältig** arbeiten und am besten in einer **Gruppe**. Lies zuerst den ganzen Text durch.

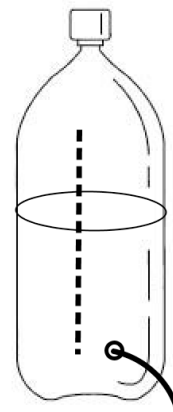
Materialien

- Leere 1.5 Liter PET-Flasche
- Messinstrumente (Lineal, Stoppuhr)
praktischer Hinweis: evt. ein Streifen Millimeterpapier auf Flasche kleben
- Werkzeug, um in die PET-Flasche ein Loch zu bohren
praktischer Hinweis: evt. Loch mit erhitztem Nagel bohren
- Heft, Schreibzeug

Wenn du dein eigenes Material mitbringst und dafür Verantwortung trägst, dass das Experiment durchgeführt werden kann, hast du mehr Freude am Experiment und es bleibt dir besser im Gedächtnis.

Durchführung

- Loch mit ca. 3 mm Durchmesser in den unteren Teil der PET-Flasche bohren (das Loch soll unten am zylinderförmigen Teil der Flasche sein, bevor sich die Flasche wieder verengt)
- Ca. 1 Liter Wasser in die Flasche giessen
- alle 10 Sekunden die Höhe h des Wasserspiegels messen
- mindestens 12 Messungen vornehmen
- in deinem Heft eine genügend grosse Tabelle vorbereiten, wie folgt



Zeit t in s	Höhe $h(t)$ in cm	Höhenänderung $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t)$	Zeitdifferenz Δt	Sinkgeschwindigkeit $h'(t) \approx \Delta h / \Delta t$	Modellparameter $a = h'(t) / h(t)$
0	10
10			10		
20			10		
30			10		
...			...		

Während dem Experiment trägst du in die graue Spalte deine Messwerte ein. Die restlichen Spalten werden später ausgefüllt.

Auswertung

- Übertrage deine Messungen in ein Koordinatensystem.
Vielleicht hast du bereits eine Vermutung, nach welchem „Gesetz“ der Wasserspiegel absinkt.
- Vervollständige in der Tabelle die restlichen Spalten.
- Das Experiment zeigt dir: die Sinkgeschwindigkeit h' nimmt ab.
Was könnte ein Grund dafür sein?

Mathematisch ausgedrückt:

die Sinkgeschwindigkeit ist abhängig von der Wasserhöhe.

Wie du weißt, lautet das einfachste Modell dazu: $h'(t) = -a \cdot h(t)$.

- Ist der Ansatz: $h'(t) = -a \cdot h(t)$ gerechtfertigt?
Dies ist dann der Fall, wenn in der letzten Spalte der Proportionalitätsfaktor $a = \frac{h'(t)}{h(t)}$, zumindest näherungsweise, für alle deine Messungen immer denselben Wert ergibt.
Dies scheint hier aber nicht der Fall zu sein...

Messergebnisse und theoretische Überlegungen (vgl. Bemerkung) zeigen, dass das Modell

$$h'(t) = -a \cdot \sqrt{h(t)}$$

den Prozess des Absinkens besser beschreibt.

- Ist der Ansatz: $h'(t) = -a \cdot \sqrt{h(t)}$ gerechtfertigt?
Dies ist dann der Fall, wenn der Proportionalitätsfaktor $a = \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}}$, zumindest näherungsweise, für alle deine Messungen immer denselben Wert ergibt.
Dies sollte der Fall sein!
Um einen möglichst „genauen“ Faktor a zu erhalten kannst du die einzelnen Werte „mitteln“.
- Löse die Differentialgleichung! (Beachte: den „Anfangswert“ kennst du!)
- Zeichne den Graphen der Lösungsfunktion in dein Koordinatensystem.
Passt er zu den gemessenen Werten?
Was könnten Gründe sein für mögliche Abweichungen? (vgl. auch Bemerkung unten)

Bemerkung

- Vergleicht man die Lösung $h(t)$ mit den tatsächlichen Messwerten stellt man eine gute Übereinstimmung fest für nicht zu kleine Werte von $h(t)$.
Tatsächlich spielen für kleine Werte von $h(t)$ weitere Effekte eine Rolle, die wir bei unserem Ansatz vernachlässigt haben.
- Wir wollen noch die oben angegebene Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $h(t)$ begründen.
Die Herleitung beruht auf zwei Grundprinzipien der Physik, nämlich auf der *Energieerhaltung* und der *Massenerhaltung*.

Den Energieerhaltungssatz kennst du aus der Physik:

$$m \cdot g \cdot h(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2$$

In unserem Beispiel ist $h(t)$ der Pegelstand und $v(t)$ die Geschwindigkeit, mit der das Wasser ausströmt.

Diese Gleichung lösen wir nach $v(t)$ auf und erhalten:

$$v(t) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)} \quad (*)$$

Der Massenerhaltungssatz meint in unserem Beispiel, dass das Volumen an Wasser, welche im Gefäß „verschwindet“, gerade dem Volumen an Wasser entspricht, welche unten ausströmt. Ist Q der Querschnitt des Gefäßes und q der Querschnitt der Öffnung, dann ergibt sich für eine Zeitspanne Δt :

Volumen „oben“ = Volumen „unten“

$$Q \cdot (h(t) - h(t + \Delta t)) = q \cdot v_{\text{mittel}} \cdot \Delta t$$

$$Q \cdot (h(t) - h(t + \Delta t)) = q \cdot \frac{v(t) + v(t + \Delta t)}{2} \cdot \Delta t \quad (**)$$

Kannst du mit (*) und (**) und für $\Delta t \rightarrow 0$ die Differentialgleichung herleiten?

Gedanken zum Modellieren in der Mathematik

Die Mathematik versucht verschiedene Prozesse zu untersuchen.

Weichen die mathematischen Ergebnisse zu stark von Messungen in der Realität ab, muss ein neues, besseres Modell – basierend auf anderen Annahmen – aufgestellt werden!

Allerdings muss eine quantitative Anpassung an die Realität nicht in jedem Fall sinnvoll sein – auch Messungen können fehlerhaft sein.

Bedenke:

Ein Modell entspricht nie ganz der Realität, es gibt nur Modelle die es besser machen als andere.

Modelle können helfen, *die Prozesse selbst* besser zu verstehen.

Beim Modellieren gehen wir – natürlich (!) – von der Annahme aus, dass der Natur überhaupt eine gewisse Regelmässigkeit zu Grunde liegt.

Diese Annahme wird gestützt durch ein Zitat von Galileo Galilei:

„Die Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“



Anhang 1 Integration von $\frac{1}{x}$

Zuerst müssen wir uns an etwas erinnern (oder neu lernen?):

Die Stammfunktionen von $\frac{1}{x}$ lauten $\ln|x| + C$, es gilt also:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (\text{für } x \neq 0).$$

Dies wollen wir kurz begründen, indem wir zeigen, dass gilt: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

- Der Fall $x > 0$:

Mit Hilfe der Definition folgt:

$$e^{\ln x} = x$$

Wir leiten nun beide Seiten ab – wobei wir auf der linken Seite die Kettenregel anwenden:

$$e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1$$

Wir vereinfachen dies zu:

$$x \cdot (\ln x)' = 1$$

und erhalten:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Ein Detail bleibt noch. Die obigen Gleichungen gelten nur für $x > 0$, sonst ist der \ln nicht definiert.

- Der Fall $x < 0$:

Es gilt – wiederum mit der Kettenregel –:

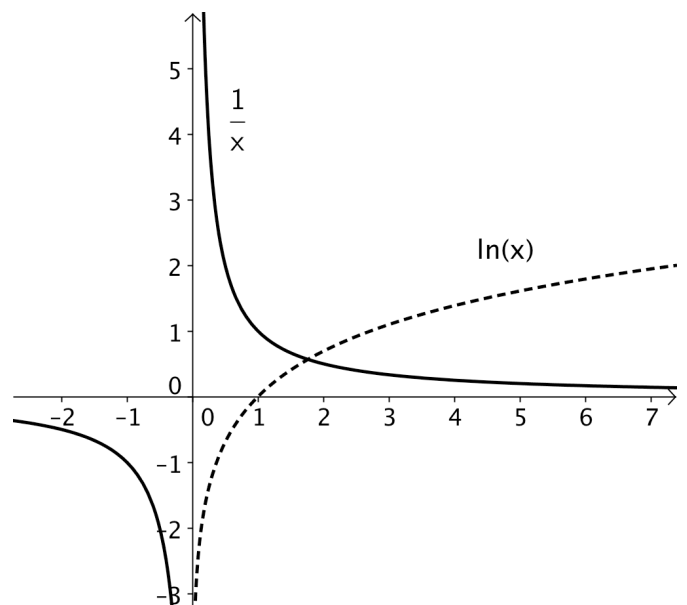
$$\ln(-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Damit ist aber $\ln(-x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ für $x < 0$.

Die beiden Fälle fassen wir elegant zusammen, indem wir Betragsstriche verwenden.

In der Abbildung siehst du noch die Graphen der beiden Funktionen

- $\ln x$ ($x > 0$)
- $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)



Anhang 2 Begründung des Vorgehens bei der Separation der Variablen

Die Begründung der Methode der „Separation der Variablen“ finden wir mit der Kettenregel.

Sie lautet bekanntlich:

$$[g(f(x))]' = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äussereAbleitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innereAbleitung}}$$

bzw. für $y = f(x)$:

$$[g(y)]' = \underbrace{g'(y)}_{\text{äussereAbleitung}} \cdot \underbrace{y'}_{\text{innereAbleitung}}$$

In Worten: die Ableitung von $g(y)$ bzgl. x ist gleich $g'(y) \cdot y'$.

Das heisst natürlich „umgekehrt“: $g(y)$ ist eine Stammfunktion von $g'(y) \cdot y'$.

Wir können also schreiben („Umkehrung der Kettenregel“):

$$\int g'(y) \cdot y' dx = g(y) + C \quad (*)$$

Wenn wir die linke Seite anschauen, sind wir auf gutem Weg... Da steht nämlich:

$$\int \dots y' dx,$$

also genau das, was wir bei der Methode jeweils antreffen.

Die Gleichung (*) sagt uns nun, wie wir damit rechnen können.

Wir rechnen nun „parallel“ zwei Beispiele durch und schauen, was passiert.

Beispiele

$$y' = 2x \cdot y^2$$

Separation

$$y' = \frac{h(x)}{y}$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot y' = 2x$$

$$y \cdot y' = h(x)$$

Integration (Stammfunktion bilden) bzgl. x

$$\int \frac{1}{y^2} \cdot y' dx = \int 2x dx$$

$$\int y \cdot y' dx = \int h(x) dx$$

Offenbar ist die rechte Seite kein Problem...

$$\dots = x^2 + D$$

$$\dots = H(x) + D$$

Die linke Seite aber *ist* ein Problem. Wir sollen eine Stammfunktion bzgl. x finden, aber x liegt auf der linken Seite nicht „griffbereit“ vor: y , als Funktion von x , ist ja gerade unbekannt!

Hilfe kommt jetzt aber von der Kettenregel bzw. deren Umkehrung (*).

Wir setzen:

$$g'(y) = \frac{1}{y^2}$$

$$g'(y) = y$$

dann sagt uns (*), dass wir:

$$\int \frac{1}{y^2} \cdot y' dx = \dots$$

$$\int y \cdot y' dx = \dots$$

berechnen können, indem wir einfach $g(y)$ – eine Stammfunktion von $g'(y)$ bzgl. y – finden müssen.

Wir gehen also genau so vor, wie es uns die Methode der „Separation der Variablen“ rezeptmässig vorschreibt. Statt $\int g'(y) \cdot y' dx$ zu berechnen, berechnen wir $g(y) + C$.

Es ist:

$$g(y) = -\frac{1}{y} + C$$

$$g(y) = \frac{1}{2} y^2 + C$$

Wir haben also auch die linke Seite gemeistert und erhalten also:

$$-\frac{1}{y} + C = x^2 + D \quad (**)$$

$$\frac{1}{2} y^2 + C = H(x) + D \quad (**)$$

Damit haben wir y' endlich „abgeschüttelt“ und die Bahn, um y zu bestimmen, ist frei.

Um ganz sicher zu sein, dass y auch sicher die Differentialgleichung $y' = \dots$ erfüllt, können wir

- die Gleichung (**) versuchen nach y aufzulösen und dann wie gewohnt in die linke und rechte Seite einsetzen, oder
- einfacher (!): direkt in der Gleichung (**) beide Seiten bzgl. x ableiten.

$$\left(-\frac{1}{y} + C\right)' = (x^2 + D)'$$

$$\left(\frac{1}{2} y^2 + C\right)' = (H(x) + D)'$$

$$\underbrace{\frac{1}{y^2}}_{\text{äussere}} \cdot \underbrace{y'}_{\text{innere}} = 2x$$

$$y \cdot y' = h(x)$$

$$y' = 2x \cdot y^2$$

$$y' = \frac{h(x)}{y}$$

Das heisst aber, dass unser y in (**) die Differentialgleichung löst!

Die Methode der „Separation der Variablen“ funktioniert immer dann, wenn eine Differentialgleichung der Form

$$y' = (\text{Ausdruck in } x) \cdot (\text{Ausdruck in } y)$$

bzw.

$$y' = h(x) \cdot k(y)$$

vorliegt.

Denn dann lassen sich die Variablen separieren (y linke Seite, x rechte Seite):

$$\frac{1}{k(y)} \cdot y' = h(x)$$

- Die Methode wirklich zu begreifen, ist nicht einfach. Denk weiter darüber nach! Versuche in Formeln und Worten oder besser: im Gespräch mit einem Kollegen oder einer Kollegin, noch einmal zu erklären, warum die Methode funktioniert.
- Die Vorgehensweise „ x und y separat integrieren“ im Text verbirgt zwar einiges an (sperrigem) Hintergrund, ist aber korrekt.

Anhang 3 Lösen der logistischen Differenzialgleichung

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$P'(t) = 0.5 \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{6}\right)$$

bzw. in einfacherer Schreibweise

$$P' = 0.5 \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{6}\right)$$

Wir lösen diese Gleichung mit Hilfe der Methode Separation der Variablen.

Schritt 1 Separation der Variablen

$$\frac{1}{P \cdot (1 - P/6)} \cdot P' = 0.5$$

Die Schwierigkeit ist offensichtlich: Wie soll man bloss eine Stammfunktion für die linke Seite finden?

Hier hilft eine Technik mit dem Namen „*Partialbruchzerlegung*“.

Es handelt sich um ein (nicht offensichtliches!) Umformen des Quotienten $\frac{1}{P \cdot (1 - P/6)}$.

Zuerst vereinfachen wir:

$$\frac{1}{P \cdot (1 - P/6)} = \frac{6}{P \cdot (6 - P)}$$

und ziehen dann das Ganze auseinander:

$$\frac{6}{P \cdot (6 - P)} = \frac{P + 6 - P}{P \cdot (6 - P)} = \frac{P}{P \cdot (6 - P)} + \frac{6 - P}{P \cdot (6 - P)} = \frac{1}{6 - P} + \frac{1}{P}$$

und bekommen so:

$$\left(\frac{1}{6 - P} + \frac{1}{P}\right) \cdot P' = 0.5$$

$$\frac{1}{6 - P} \cdot P' + \frac{1}{P} \cdot P' = 0.5$$

Schritt 2 Integration

$$-\ln |6 - P| + \ln |P| = 0.5 \cdot t + D$$

Schritt 3 Auflösen nach y

Die erhaltene Gleichung lösen wir nach der Funktion P auf.

Dazu multiplizieren wir die Gleichung zuerst mit (-1):

$$\ln |6 - P| - \ln |P| = -0.5 \cdot t - D$$

Wir fassen zu einem Logarithmus zusammen:

$$\ln \left| \frac{6 - P}{P} \right| = -0.5 \cdot t - D$$

und beseitigen ihn:

$$\left| \frac{6-P}{P} \right| = e^{-0.5t} \cdot e^{-D} = L \cdot e^{-0.5t}$$

$$\frac{6-P}{P} = C \cdot e^{-0.5t}$$

Der Rest ist nicht mehr schwierig:

$$\frac{6}{P} - 1 = C \cdot e^{-0.5t}$$

$$\frac{6}{P} = 1 + C \cdot e^{-0.5t}$$

$$\frac{P}{6} = \frac{1}{1 + C \cdot e^{-0.5t}}$$

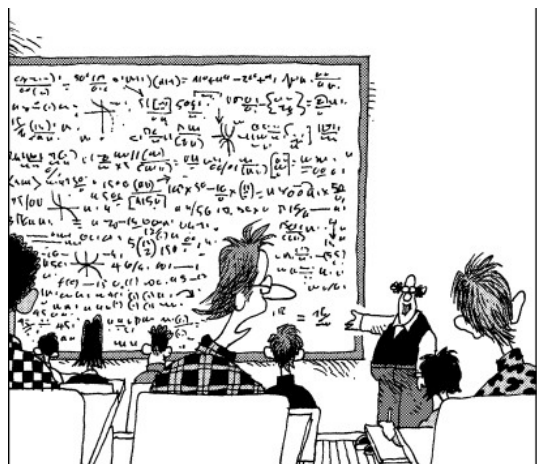
$$P = \frac{6}{1 + C \cdot e^{-0.5t}}$$

Aus dem Text war dir diese Lösung bereits bekannt. Jetzt hast du aber den Weg zur Lösung verfolgen können!

Versuche den Weg zur Lösung der allgemeine logistische Gleichung

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{G}\right) \quad (a > 0).$$

zu finden, indem du die oben gemachten Schritte anpasst!



"This guy writes an equation for over 20 minutes, and he has the nerve to say, 'Voilà!'"

Immer wieder lesen, immer wieder verstehen:

- *Wenn ein Prozess durch eine Differenzialgleichung modelliert wird, kann aus dem Zustand des Prozesses zu einem Zeitpunkt auf dessen Veränderungstendenz in diesem Augenblick geschlossen werden...*
- *... kennt man den Zustand eines Prozesses zu einem Zeitpunkt und seine Änderungstendenz in diesem Zeitpunkt, dann lässt sich für einen folgenden Zeitpunkt den Zustand (zumindest näherungsweise) berechnen.*



... und was hat das mit denen zu tun?