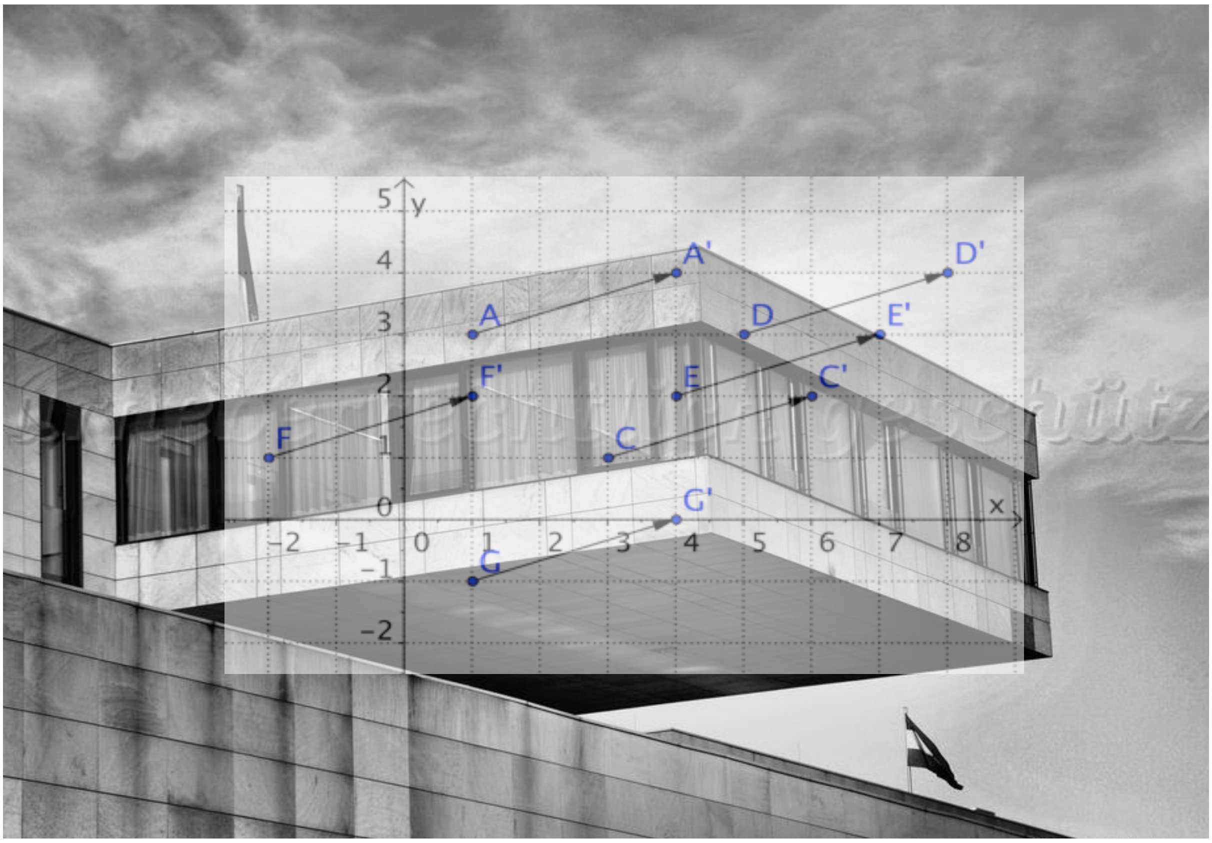
Datum Name



Vektorgeometrie

Ebene

Aufgaben & Lösungen

Inhalt

0 Repetition

Skalarprodukt

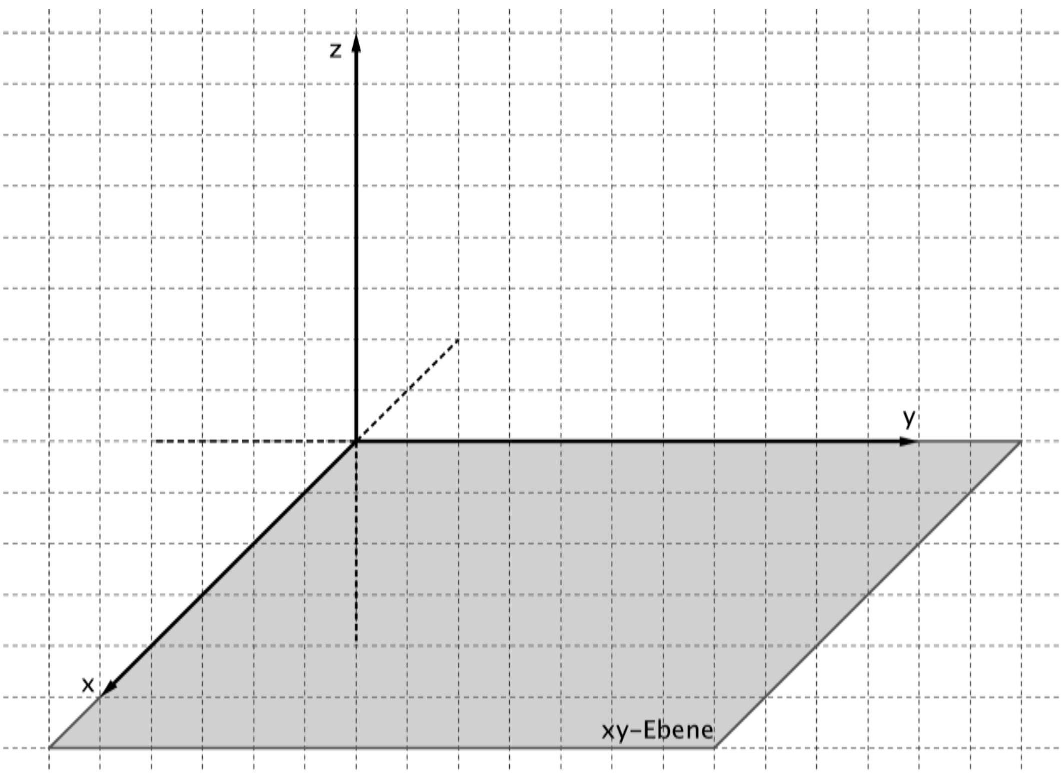
- Geben Sie sich zwei Vektoren vor und berechnen Sie das Skalarprodukt.
- Welche Grösse lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes berechnen?
- Ein wichtiger Zusammenhang! Ergänzen Sie:
  Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander genau dann, wenn gilt: ...

Gerade

- Wie lautet die allgemeine Form der Parametergleichung einer Geraden?
- Gegeben sind die beiden Geraden:

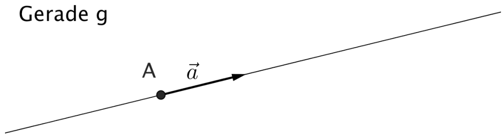
  $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h(CD) mit C(1/–2/3) und D(1/6/3)

  Stellen Sie die Geraden zeichnerisch dar. (Sichtbarkeit, verschiedene Farben.)
  Welche spezielle „Lage“ hat die Gerade h?
  Schneiden sich die beiden Geraden? Wenn ja: unter welchem Winkel?
  Die Geraden als Flugbahnen interpretiert: kommt es zu einen Zusammenstoss?



1 Einstieg

Parametergleichung der Ebene



Die Parametergleichung der Geraden lautet: g: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A + t\cdot\vec{a}$.

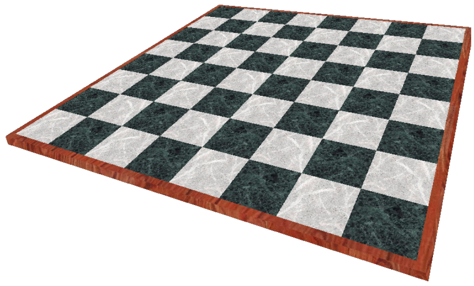
- Zeichnen Sie „qualitativ“ eine Gerade g mit Ausgangspunkt A und Richtungsvektor $\vec{a}$.
  Tragen Sie auf Ihrer Geraden die Punkte P_t ein für t = –2, t = –1, t = 0, t = 1, t = 2, t = 3.5.

Analog zur Geraden können wir auch eine Ebene beschreiben (= „abfahren“). Wie?
Benennen Sie die auftretenden Symbole korrekt!

- Zeichnen Sie „qualitativ“ eine Ebene E mit Ausgangspunkt A und Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

  Zeichnen Sie dann die zwei Punkte $P_{r,s}$ auf E ein für die gilt:
  r = 1, s = 2 und r = 3, s = –1.

- Geben Sie sich selber einen Punkt Q vor.
  Wie lauten die zu Q gehörigen Parameterwerte?

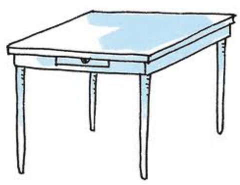


Eine Parameterdarstellung legt ein „internes Koordinatensystem“ auf der Ebene fest.

Zeichnen Sie nochmals eine Ebene E. Tragen Sie die Punkte $P_{r,s}$ auf E ein für:

- r < 0 und s < 0
- r = 4 und s beliebig

Warum kann ein vierbeiniger Tisch wackeln?



Ebene zeichnen

Die Ebene E verläuft durch die Punkte A(4/0/0), B(0/4/0) und C(0/0/2).

a) Zeichnen Sie den (sichtbaren) Ausschnitt der Ebene sauber in ein Koordinatensystem.

b) Geben Sie eine Parametergleichung von E an.

c) Liegt der Punkt P(3/3/1) auf E?

2 Ebene

Grundaufgabe 1 Punkte und Ebene

a) Punkttest

Gegeben sei die Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Liegen die Punkte P(–2/10/7) und Q(1/1/1) auf der Ebene E?
- Berechnen Sie die y-Koordinate des Punktes R(4.5/y/–7) so, dass er auf E liegt.

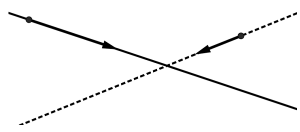
b) Ebene durch drei Punkte

- Geben Sie die Parametergleichung der Ebene E(ABC) an, welche durch die drei Punkte A(1/2/–2), B(0/5/0) und C(5/0/–2) geht. Geben Sie dann einen weiteren Punkt P an, der auf E(ABC) liegt.

Legen drei verschiedene Punkte stets eindeutig eine Ebene fest?

- Wie lautet eine Gleichung der Ebene, die den Punkt Q(2/2/3) und die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält?

Lässt sich eine Ebene auch durch zwei Geraden festlegen? Wie müssen die Geraden zueinander liegen?



Beachte: Verschiedene Parameterdarstellungen derselben Ebene

Sei E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *eine* Parameterdarstellung von E.

Welche der folgenden Parametrisierungen sind weitere Parameterdarstellungen von E?

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + r\vec{a} + s\vec{b}$ eine Parameterdarstellung einer Ebene.

Welcher Teil der Ebene wird beschrieben durch:

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + r^2\vec{a} + s^2\vec{b}$
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + r\vec{a} + s^2\vec{b}$
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + \sin(r)\ \vec{a} + \sin(s)\ \vec{b}$
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + r\vec{a} + s \cdot r\vec{b}$

Grundaufgabe 2 Schnittpunkt/–gerade und Schnittwinkel

a) Schnitt Gerade/Ebene

Berechnen Sie den Schnitt*punkt* der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es ist möglich, dass das Lösen des 3×3 Gleichungssystems in Beispiel 8 ...

- *keine Lösung* besitzt! Wie ist dies dann geometrisch zu interpretieren?
  Wie „liegen" Gerade und Ebene in einem solchen Fall zueinander?
- *unendlich viele Lösungen* besitzt. Geometrische Interpretation?

b) Schnitt Ebene/Ebene

Berechnen Sie die Schnitt*gerade* der Ebenen E und F.

- E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; F: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; F: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Hier Ebenenmodell einsetzen für eine Veranschaulichung!

Warum ist dieses Problem schwieriger als der Schnitt Gerade/Ebene?
Wie könnte man dieses Problem aber auf das Problem Schnitt Gerade/Ebene zurückführen?

Kann man auch drei Ebenen miteinander schneiden?

Und – falls Ihnen dies zu leicht war ☺ – schon mal überlegt, wie man den Schnittwinkel Gerade/Ebene berechnen könnte?

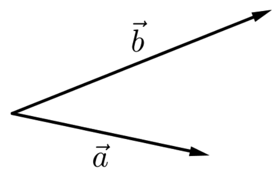
Vektorprodukt

In der Vektorgeometrie basieren viele Lösungsstrategien auf zueinander *senkrecht* stehenden Vektoren.
Statt „senkrecht“ sagen wir oft auch „*normal*“.

Hinführung

Gegeben: zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Gesucht: Vektor $\vec{n}$, der „normal“ (= senkrecht) auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

- Zeichnen Sie einen solchen Vektor ein!
- Wie viele Möglichkeiten haben Sie?
  Was müsste man zusätzlich fordern, damit dieser „Normalenvektor“ *eindeutig* wäre?



Neben dem Skalarprodukt ist das Vektorprodukt die zweite Art, wie man Vektoren multiplizieren kann.
Das Ergebnis ist allerdings *keine Zahl*, *sondern ein Vektor*.

Definition

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Dann „bilden“ wir einen neuen Vektor, das sogenannte **Vektorprodukt**, gemäss

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Sehen Sie ein „Muster“ in der Berechnung? Eselsbrücke bilden!

Beispiel

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

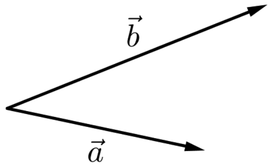
- Bilden Sie das „Vektorprodukt“ $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$
- Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n}$ senkrecht steht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das Vektorprodukt ist **nicht zu verwechseln** mit seinem *„Gegenstück“, dem Skalarprodukt*.

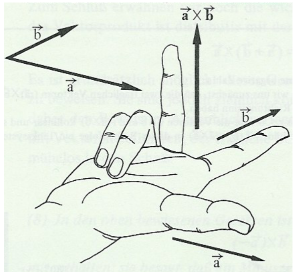
- Wie der Name schon andeutet ist das Ergebnis des Vektorproduktes immer ein *Vektor*.
- Während man mit dem Skalarprodukt überprüfen kann, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen, hilft einem das Vektorprodukt, senkrechte Vektoren zu berechnen.

Eigenschaften

1 $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht *senkrecht* auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



2 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem *Flächeninhalt* des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramms.



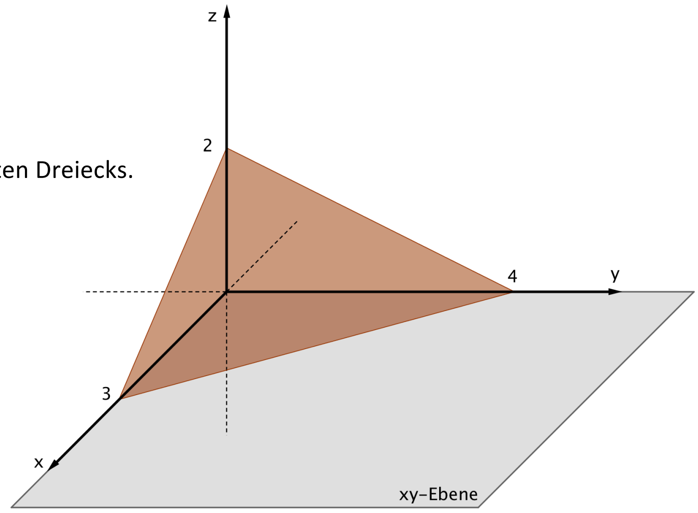
3 Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein so genanntes *Rechtssystem*.

Begriffe

- Statt Vektorprodukt sagen wir auch *Kreuzprodukt.*
- Statt senkrecht, sagen wir auch *normal* oder *orthogonal*; der Vektor $\vec{n}$ steht also *normal* auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Dreiecksfläche, rechte Handregel

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des abgebildeten Dreiecks.
- Zeigt der von Ihnen in a) verwendete Normalenvektor gegen „innen“ oder gegen „aussen“?



Das Vektorprodukt lässt sich auch für zwei kollineare Vektoren bilden. Was könnte das Resultat sein? Geben Sie sich selber zwei kollineare Vektoren vor, bilden Sie das Vektorprodukt!

Begründen Sie, dass die drei Punkte A(1/–1/2), B(–3/–3/4) und C(3/0/1) auf einer Geraden liegen:

- mithilfe des Vektorproduktes
- mithilfe des Skalarproduktes
- weder mit Skalar- noch mit Vektorprodukt

Mit Hilfe des Vektorproduktes bzw. mit dem dabei erzeugten Normalenvektor, lassen sich nun weitere Grundaufgaben der Vektorgeometrie – wie Winkelprobleme und Abstandsprobleme mit Ebenen – lösen!

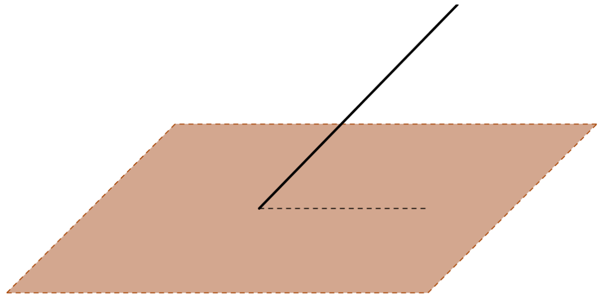
c) Winkel Gerade/Ebene

- Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und der Ebene

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



- Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Eben E:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Merke
Da der Normalenvektor senkrecht zur Ebene steht, muss der mit seiner Hilfe und dem Richtungsvektor berechnete Winkel noch auf 90° „ergänzt“ werden. Eigentlich völlig logisch...

Wie berechnet man den Schnittwinkel Ebene/Ebene?

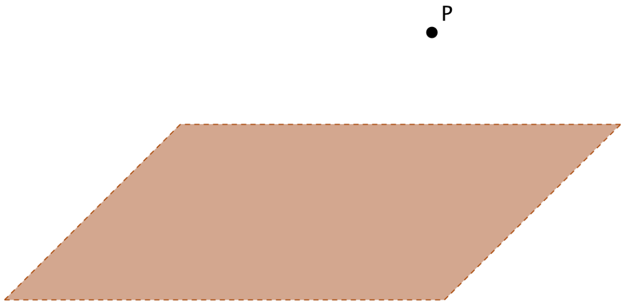
d) Winkel Ebene/Ebene

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den Ebenen E und F.

- $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $F: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $F: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Grundaufgabe 3 Abstand



a) Abstand Punkt/Ebene

Berechnen Sie den Abstand des Punktes

$$P(1/-3/-3)$$

von der Ebene

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Abstand Gerade/Ebene

Gegeben sind die Punkte A(3/–1/7) und B(3/–5/10) und die Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass die Gerade g(AB) parallel zur Ebene E verläuft.
- Berechnen Sie den Abstand von g zu E.

Wie berechnet man den Abstand Ebene/Ebene?

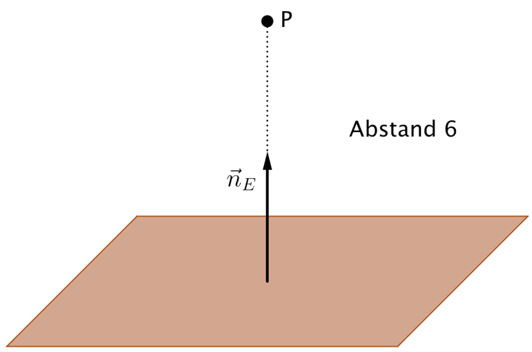
c) umgekehrte Abstandsaufgabe!

Gegeben sei die Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

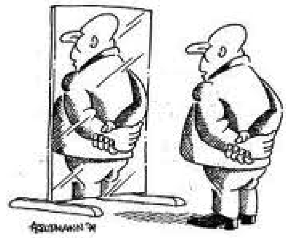
Geben Sie

- einen Punkt an, der
- eine Gerade an, die
- eine Ebene an, die

von der Ebene E den Abstand 6 besitzt.



Spiegeln, ebene Figuren



* Spiegeln *

Jedes Objekt (Punkt, Gerade, Ebene) lässt sich an jedem Objekt spiegeln!

Grundlage sind aber die Spiegelungen eines Punktes – an Punkt, Gerade oder Ebene, denn

- um eine Gerade zu spiegeln, genügt es, *zwei* Punkte dieser Geraden zu spiegeln.
- um eine Ebene zu spiegeln, genügt es, *drei* Punkte dieser Ebene zu spiegeln.

Punkte spiegeln

Spiegeln Sie den Punkt P(1/2/1) an

a) dem Punkt Q(3/4/2).

b) der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) der Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Wird an einer „speziellen“ Ebene gespiegelt, ist es natürlich eleganter man überlegt, bevor man drauflosrechnet.

- Der Punkt K(–1/–6/17) wird gespiegelt an der xz-Ebene.
- Die Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ wird gespiegelt an der xy-Ebene.

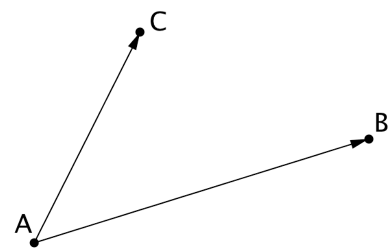
Zum Schluss *die* Standardspiegelaufgabe,

Gerade an Ebene spiegeln

Die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird an der Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gespiegelt.

Wie lautet eine Gleichung der Spiegelgeraden g*?

*** Ebene und ebene Figuren ***



Punkte im Dreieck

a) Durch die drei Punkte A, B und C wird eine Ebene aufgespannt:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}.$$

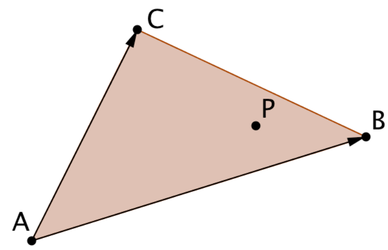
Beschreiben Sie die Lage der Punkte der Ebene E, für die gilt:

- $0 \le r \le 1$ und $0 \le s \le 1$
- $r + s = 1$, wobei $r \ge 0$, $s \ge 0$

b) Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck. Wie lässt sich überprüfen, ob ein Punkt P *im* Dreieck ABC liegt?

Testen Sie Ihre Idee an folgendem Beispiel:

A(4/4/1), B(1/4/1), C(0/0/5) und P(1/2/3)



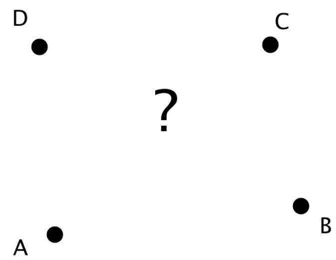
ebenes Viereck, Raute, Rechteck

a) Gegeben sind die Punkte A(5/4/–3), B(–2/8/1), C(2/16/0) und D(9/12/–4).

- Bilden diese vier Punkte ein ebenes Viereck?
- Bilden diese Punkte (in dieser Reihenfolge) sogar ein Rechteck?

b) Gegeben sind die vier Punkte A, B, C und D. Formulieren Sie – mit Hilfe von Vektoren – Bedingungen so, dass die vier Punkte (in dieser Reihenfolge)

- ein Parallelogramm
- ein Rechteck
- eine Raute
- ein Quadrat bilden.



Zusatz warum steht „in dieser Reihenfolge“...?

3 Zusammenfassung

„Jede geometrische Figur kann in eine algebraische Gleichung umgewandelt werden und jede algebraische Gleichung in eine geometrische Form."

„Für mich sind alle Dinge Mathematik."

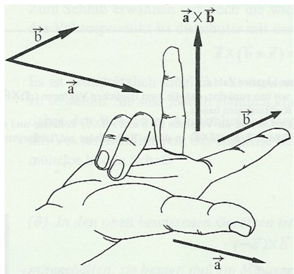
René Descartes (1596-1650),
„Erfinder" des kartesischen Koordinatensystems.

Wie lassen sich **Ebenen** – ein grundlegendes, geometrisches Objekt – mit Hilfe von Vektoren beschreiben?

Was bringt einem eine solche Beschreibung?

Neben dem **Skalarprodukt** haben wir eine weitere Form kennengelernt, wie wir zwei Vektoren miteinander multiplizieren können: das **Vektorprodukt**.

Skalar– und Vektorprodukt liefern uns wertvolle Dienste beim Lösen von Grundaufgaben.



Nennen Sie aus Ihrer Sicht **3 Grundaufgaben** im Zusammenhang mit **Ebenen**.

- Erklären Sie, wie Sie diese lösen.
- Diese Aufgaben sollten sie beherrschen, also in vernünftiger Zeit lösen können.

Weitere Aufgaben

Aufgabe 1 Parametergleichung, Punkttest

a) Gegeben sind die Punkte A(4/–2/–2), B(7/2/4) und C(0/–5/3). Liegt der Punkt P(5/0/3) auf der Ebene E(ABC)?

b) Geben Sie eine Parametergleichung der folgenden Ebenen an.

- E verläuft durch den Punkt P(2/3/1) und ist parallel zur xy-Ebene.
- E verläuft durch den Punkt R(2/–1/6) und enthält die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Wird durch die Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Ebene festgelegt?

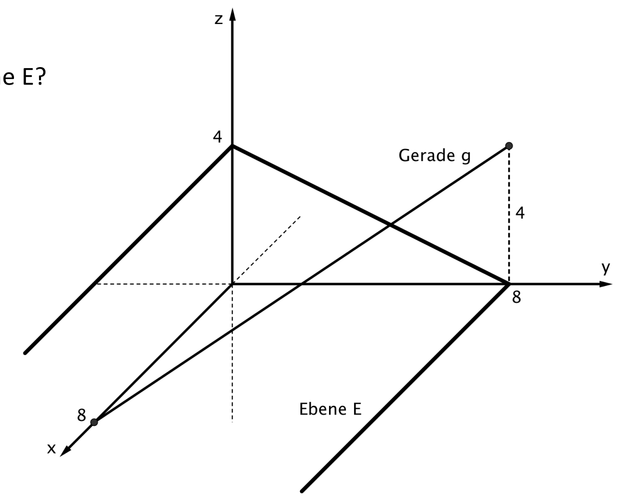
Aufgabe 2 Schnitt, Winkel

a) Gegeben sind die Ebenen E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und F: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel.

b) Siehe Abbildung.
Wo und unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die Ebene E?

*(**Hinweis** Die Ebene E liegt parallel zur x-Achse.)*



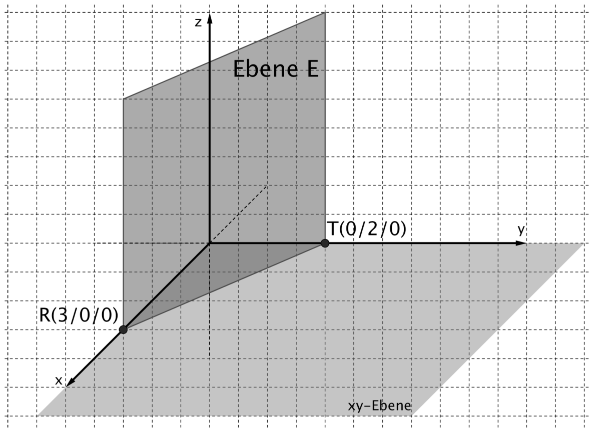
Aufgabe 3 Abstand, Reflexion

Gegeben sind die Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt P(5/8/9).

a) Berechnen Sie den Abstand von P zu E.

b) P wird an E gespiegelt. Wie lauten die Koordinaten des Spiegelpunktes P*?

Aufgabe 4 **spezielle Lage**



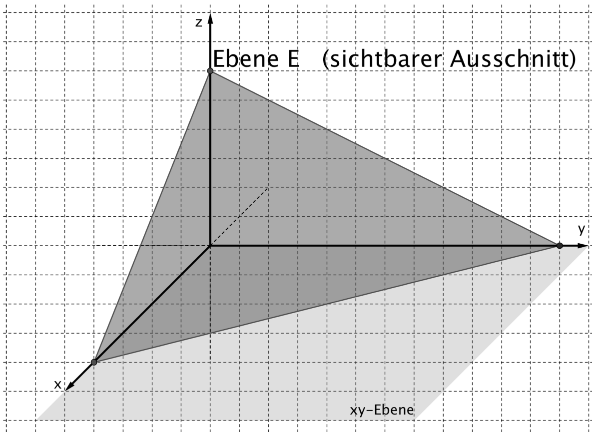
a) Siehe Abbildung.

- Welche spezielle Lage nimmt die Ebene ein?
  (Ohne Rechnung.)
- Wie lautet eine Gleichung von E?
- Berechnen Sie den Normalenvektor von E.
  Wie lässt sich an ihm die spezielle Lage erkennen?

b) Die folgenden Gerade bzw. Ebenen haben spezielle Lage. Welche? Warum?

- g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 70 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- F: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 **Ebenen zeichnen**



Sind von einer Ebene die Achsenschnittpunkte bekannt, lässt sie sich (genauer: der „sichtbare" Ausschnitt) zeichnen.

Nebenan ist dies: X(4/0/0), Y(0/6/0), Z(0/0/3)

Berechnen Sie zuerst die Achsenschnittpunkte, zeichnen Sie dann den sichtbaren Ausschnitt der Ebene.

Hinweis *Um die Achsenschnittpunkte zu berechnen, muss natürlich zuerst eine Ebenengleichung bestimmt werden.*

a) Die Ebene E verläuft durch die Punkte A(3/3/–6), B(–1/1/3), C(1/1/0)

b) Die Ebene F verläuft durch die Punkte A(3/0/5), B(6/–2/1), F(3/0/1).

c) Die Ebene G verläuft durch die Punkte P(2/2/2), Q(3/0/0), R(6/–4/–3).

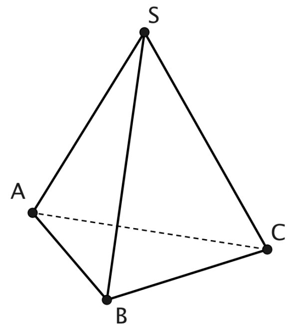
Aufgabe 6 Reflexion & Pyramide

a) Ein Lichtstrahl geht durch P(7/–7/4) und wird reflektiert an der Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Punkt Q(7/–1/8) liegt auf dem reflektierten Lichtstrahl. In welchem Punkt der Ebene erfolgte die Reflexion?

b) Die Punkte A(7/4/0), B(9/2/1), C(8/6/2) bilden die Grundfläche und S(2/1/7) die Spitze einer Pyramide.

- Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.
- Geben Sie eine Gleichung einer Ebene F an, die von der Grundfläche den Abstand 4.5 besitzt.

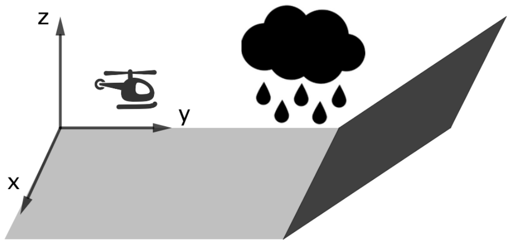


Aufgabe 7 Helikopter

Ein Helikopter fliegt bei *schlechter Sicht* auf ein eben ansteigendes Bergmassiv zu, welches durch die Gleichung

E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Der Helikopter durchfliegt den Punkt H(1/2/2) und fliegt in Richtung SO (x = Süden, y = Osten) auf konstanter Höhe.
100 m ist der erlaubte Mindestabstand.



Angaben in km

a) In welchem Punkt muss der Pilot spätestens auf Steigflug umstellen, um den Hang im Parallelflug zu überwinden?

b) Wie lautet der neue Kurs?

Aufgabe 8 abstrakt

a) Durch die Punkte A(2/0/4), B(6/7/1) und C(–2/3/7) wird eine Ebene E festgelegt. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g an, die senkrecht zu E durch den Punkt P(0/–4/18) verläuft.

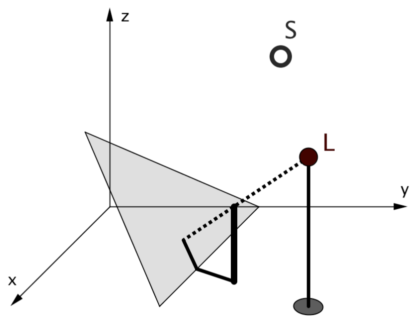
b) Welchen Abstand hat P von E?

c) Welchen Winkel bildet E mit der Ebene F: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

d) Die Gerade h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ schneidet E in einem Punkt S. Berechnen Sie S.

e) Welchen Abstand hat S von g?

Aufgabe 9 Kinderzimmer



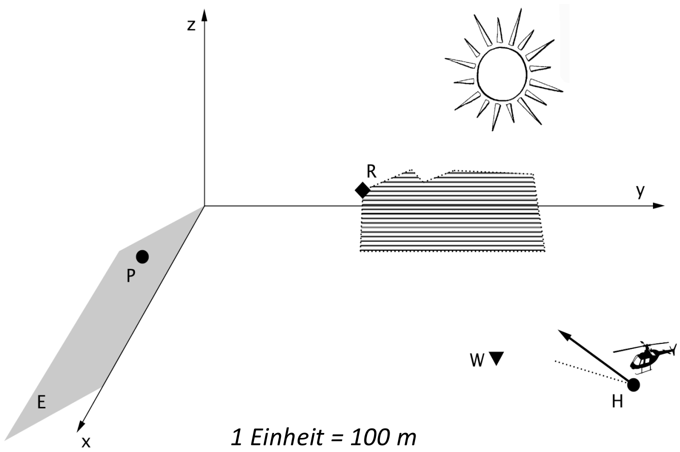
a) Im Kinderzimmer ist ein dreieckiges Tuch gespannt:
von der Wand im Punkt (0.5/0/1) zum Boden in den Punkten (0/1.5/0) und (2/1.5/0).
Wie gross ist das Tuch und welchen Winkel schliesst es mit dem Boden ein?

b) Im Zimmer steht eine Ständerlampe L(2/3/1.5).
Wohin reflektiert der Wandspiegel S(0/2/2) das Licht?
An die xz-Wand oder an die 3 m hohe Decke?

c) Am Boden steht bei T'(1.5/2/0) ein 75 cm hoher Legoturm.
Bestimmen Sie die Länge seines Schattens.
Hinweis *Ein Teil ist am Boden, der andere auf dem Tuch.*

d) Lässt sich ein Ball mit einem Durchmesser von 60 cm unter dem Tuch hindurchrollen?

Aufgabe 10 von Schatten und Pilzen



Der Helikopter startet in der xy-Ebene.
Sein Flug lässt sich beschreiben durch die Gerade

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \text{ mit t in Minuten.}$$

a) Berechnen Sie
- die Geschwindigkeit
- den Abflugwinkel des Helikopters.

b) Aufgrund von Sicherheitsbestimmungen muss der Helikopter auf seinem Flug eine Sicherheitsdistanz von 200 m zum Restaurant in R(2/3/1) einhalten. Erfüllt der Pilot die Bestimmungen?

c) Fliegt er „links“ oder „rechts“ an der z-Achse vorbei?

d) Der Wanderer W(7/10/0) möchte den Flug des Helikopters filmen; für eine gute Bildqualität darf die Entfernung aber höchstens 300 m betragen. In welcher Zeitspanne wäre dies der Fall?

e) Die „xy-Ebene“ geht bei der x-Achse in einen abfallenden (ebenen) Hang E über.
Der Pilzsammler P(2/–2/–1) befindet sich in diesem Hang, hört den startenden Helikopter und hält Ausschau.
Wann und ab welchem Punkt der Flugbahn sieht er den Helikopter?

f) Die Sonne scheint – der Helikopter wirft beim Flug einen Schatten.
Der Wanderer W(7/10/0) wird zwei Minuten nach dem Start des Helikopters von dessen Schatten „getroffen“.
- Aus welcher Richtung scheint die Sonne?
- Wird auch der Pilzsammler vom Schatten getroffen?

Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 1 Parametergleichung aufstellen

a) E(ABC): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + t\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. P liegt *nicht* auf E.

b)
- zB. E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- zB. E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_g + t\cdot\vec{a}_g + s\cdot\overrightarrow{A_gR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.5 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -4.5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Ja, weil die Geraden *nicht windschief* sind. Sie schneiden sich im Punkt S(2/1/4)

Eine mögliche Gleichung der Ebene ist: E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 schneiden

a) Schnittgerade z.B. s: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; Schnittwinkel $\alpha = 90°$

b) Schnittpunkt S(4/4/2); Schnittwinkel $\alpha = 36.6°$

Aufgabe 3 Abstand, Reflexion

a) Abstand d = $\sqrt{116} \approx 10.77$

b) Spiegelpunkt P*(–3/–4/–7)

Aufgabe 4 spezielle Lage

a) parallel zur z-Achse; z.B.: E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

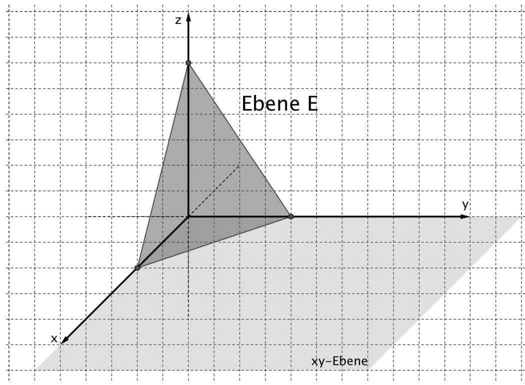
Es ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; weil für die z-Komponente gilt: z = 0 ist E parallel zur z-Achse (vorstellen!).

b) • g: parallel zur y-Achse; dies lässt sich am Richtungsvektor erkennen (x = z = 0).

• E: parallel zur x-Achse; dies lässt sich an der x-Komponente des Normalenvektors erkennen: x = 0.

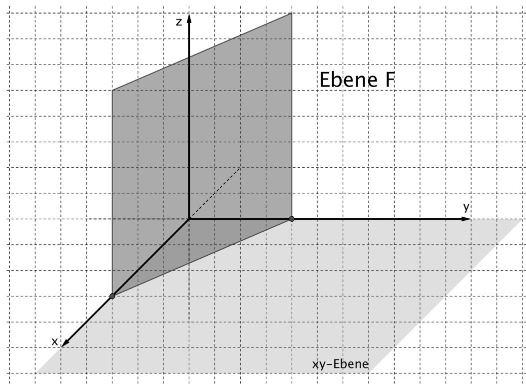
• F: parallel zur z-Achse; dies lässt sich an der z-Komponente des Normalenvektors erkennen: z = 0.
F verläuft sogar „durch" die z-Achse, da offensichtlich der Ausgangspunkt (= Nullpunkt) auf der z-Achse liegt.

Aufgabe 5 Ebenen zeichnen



a) Achsenschnittpunkte: X(2/0/0), Y(0/2/0), Z(0/0/3)

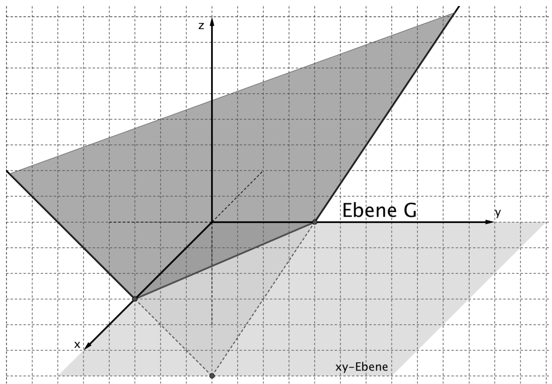
Sichtbarer Ausschnitt vgl. Abbildung.



b) Achsenschnittpunkte: X(3/0/0), Y(0/2/0), kein Z

Sichtbarer Ausschnitt vgl. Abbildung.

Beachte: Ebene ist parallel zur z-Achse.



c) Achsenschnittpunkte: X(3/0/0), Y(0/2/0), Z(0/0/-3)

Sichtbarer Ausschnitt vgl. Abbildung.

Beachte: Ebene schneidet „von unten"
durch die xy-Ebene.

Aufgabe 6 Reflexion & Pyramide

a) Reflexionspunkt R(2/–2/3)

b) • $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4.5 \cdot 9 = 13.5$ (*als Kontrolle:* $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$)

• z.B.: F: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (*es gibt noch eine zweite Ebene, auf der „anderen" Seite*)

Aufgabe 7

a) Spätestens im Punkt U(4.5/5.5/2) muss der Helikopter zum Steigflug ansetzen

Idee: Ebene parallel zur Felswand im Abstand 0.1.

Punkt auf Felswand ist z.B. F(0/3/0) $\Rightarrow F^* = F \pm 0.01 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

beachte: ± weil es zwei parallele Ebenen zur Felswand gibt: eine „oben" und eine „unten" bzw. „hinter" der Felswand, die nicht interessiert.

Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ *der Felswand zeigt nach „unten" (z-Komponente ist negativ), also müssen wir setzen:*

$$F^* = F - 0.01 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.94 \\ 0.08 \end{pmatrix}.$$

b) Die „neue" Richtung des Helikopters wird also durch den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.75 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Der Helikopterflug soll weiterhin Richtung Südosten gehen; also x = y = 1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$

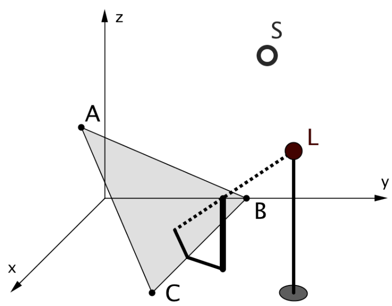
Die z-Kompnente müssen wir so wählen, dass der Helikopter parallel zur Felswand fliegt.
Mit anderen Worten: der Richtungsvektor des Helis und der Normalenvektor der Ebene sollen senkrecht aufeinander stehen. Es muss also gelten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0.75$

(Die „neue" Helikoptergerade hätte die Gleichung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.75 \end{pmatrix}$*.)*

Aufgabe 8

a) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** d = 10 **c)** 36.1° **d)** S(14/11/–5) **e)** d = $\sqrt{850} \approx 29.2$

Aufgabe 9



a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; Fläche = $\frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 1.80\ m^2$;

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot 1} = -0.83;\ \alpha = 146.3°;\ \text{Winkel} = 33.7°$$

b) L an yz-Wand gespiegelt: L''(-2/3/1.5); g(L''S): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ $\cap$ z = 3 (y = 0); t = 3; S_R(4/0/3)

S_R liegt in der „Deckenkante".

c) T(1.5/2/0.75); g(LT): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \\ -0.75 \end{pmatrix}$; E(ABC): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.5 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

S_{Tuch} berechnen: g(LT) $\cap$ E(ABC): t = 1.77; S_{Tuch}(1.12/1.24/0.18)

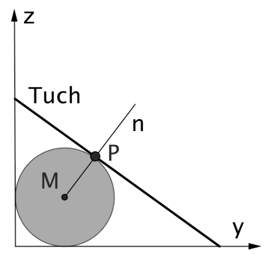
S_{Knick} berechnen: h(L'T'): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; y = 1.5; t = 3; S_{Knick}(1.25/1.5/0)

Schattenlänge = $\left|\overrightarrow{T'S_K}\right| + \left|\overrightarrow{S_KS_T}\right|$ = 0.56 + 0.34 = 0.9 m

d) Ballmitte M(x/0,3/0,3); setze z.B. x = 1

n: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\cap$ E(ABC); t = 0.12; P(1/0.53/0.65)

d = $\left|\overrightarrow{MP}\right|$ = 0.41; Der Ball kann unter dem Tuch hindurchrollen.



Aufgabe 10

a) • v = $\sqrt{1+4+0.25}$ = 2.3, also 230 m/min

• $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5.25}\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = 12.6°$

b) R(2/3/1); L(9 – t/15 – 2t/0.5t) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{RL} \bullet \vec{a} = \begin{pmatrix} 7-t \\ 12-2t \\ -1+0.5t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow \left|\overrightarrow{RL}\right|$ = 2.24 = 224 m > 200 m; ja!

c) zB: y = 0 $\Rightarrow$ t = 7.5 $\Rightarrow$ x = 1.5 > 0; links

d) $\overrightarrow{WL} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 5-2t \\ 0.5t \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{(2-t)^2+(5-2t)^2+0.25t^2} = 3 \Rightarrow t_1 = 1.1; t_2 = 3.5$; zwischen 1.1 und 3.5 min nach dem Start

e) zB: Ebene durch P und x-Achse mit Helikoptergeraden schneiden $\Rightarrow$ t = 5 $\Rightarrow$ nach 5 min im Punkt (4/5/2.5)

f) • W(7/10/0); H_2(7/11/1) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{\text{Sonne}} = \overrightarrow{H_2W} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• zB: schneiden sich die Helikoptergerade und die Gerade durch P mit „Sonnenrichtung"?

P + s$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ = Helikopter $\Rightarrow$ kein Schnittpunkt! nein

"All this 'plane geometry' stuff is great, Euclid, but what if the Earth turns out to be *round?"*